نظرية المباراة والبرمجة الخطية :-

ترتبط نظرية المباراة ارتباط وثيق مع البرمجة الخطية حيث ان كلاهما يمثل اسلوب رياضي، وان صانع القرار يستعين في البرمجة الخطية الى تحقيق التخصيص الامثل للموارد المحدودة بحيث يحقق اعلى ربح ممكن او اقل كلفة ممكنة. إلا أنه لا يأخذ بنظر الاعتبار المنافسة له من قبل جهات اخرى في الانتاج او التسويق بينما في نظرية المباراة تعين لتحديد الستراتيجيات المثلى التي تحقق اعلى ربح متوقع او اقل خسارة متوقعة آخذة بنظر الاعتبار المنافسة من قبل جهات اخرى.

يتم اللجوء الى الحل بطريقة البرمجة الخطية (السمبلكس) عند عدم وجود نقطة توازن بالمباراة اياً كان حجم المصفوفة وعند مثل جميع الطرق في التوصل الى حل للمباراة

تحويل مسألة مباراة الى مسألة برمجة خطية :-

إن مباراة الشخصين ذات المجموع الصفري يمكن ان تحل بواسطة البرمجة الخطية ولتوضيح عملية تحويل المباراة الى مسألة برمجة خطية نفترض ان مصفوفة الدفع الآتية والتي تمثل مباراة $M*n$,

A \ B	B_1	B_2	B_3 ---	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	a_{13} ———	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	a_{23} ———	a_{2n}
⋮				
A_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3} ———	a_{mn}

وبافتراض ان X_i يمثل احتمالات (m) من ستراتيجيات المنافس A

فان $\sum_{i=1}^{m} X_i = 1 \quad \forall \; X_i \geq 0$

ان الربح المتوقع لـ A عندما يختار المنافس B الستراتيجية B_1 هو

$$a_{11}X_1 + a_{21}X_2 + a_{31}X_3 + \cdots + a_{m1}X_m$$

وعلى هذا الأساس فان الربح المتوقع لـ A المناظر لستراتيجيات B هو:-

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}X_1 + a_{21}X_2 + \cdots + a_{m1}X_m \\ a_{12}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{m2}X_m \\ \vdots \\ a_{1n}X_1 + a_{2n}X_2 + \cdots + a_{mn}X_m \end{array}\right\} \geq \quad \cdots (1)$$

الهدف المتنافس A هو اختيار قيم X_i لكل $i = 1, 2, \ldots, m$ التي تعظم اقل ربح متوقع (V) ولذلك فان نظام المعادلات (1) تصبح بالصيغة الآتية

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}X_1 + a_{21}X_2 + \cdots + a_{m1}X_m \geq V \\ a_{12}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{m2}X_m \geq V \\ \vdots \\ a_{1n}X_1 + a_{2n}X_2 + \cdots + a_{mn}X_m \geq V \end{array}\right\} \quad (2)$$

يضاف الى النظام المعادلات (2) قيد مجموع الاحتمالات يساوي الواحد
اي ان

$$\sum_{i=1}^{m} X_i = 1 \quad \cdots \quad (3)$$

اذ ان الهدف لنموذج البرمجة الخطية للمتغير A تمثل تعظيم
اقل ربح متوقع اي (MaxV)

تمثل لنظام القيود (2) و (3) ولتسهيل مسألة البرمجة الخطية يتم
قسمة طرفي القيود على (V) وكذلك تصبح القيود بالصيغة الآتية

$$a_{11} X_1' + a_{21} X_2' + \cdots + a_{m1} X_m' \geq 1$$
$$a_{12} X_1' + a_{22} X_2' + \cdots + a_{m1} X_m' \geq 1$$
$$\vdots$$
$$a_{1n} X_1' + a_{2n} X_2' + \cdots + a_{mn} X_m' \geq 1$$

$$\sum X_i' = \frac{1}{V}$$

$$X_1', X_2', \cdots, X_m' \geq 0$$

where $X_i' = \frac{X_i}{V}$

وبما ان $Max\, V = Min\, \frac{1}{V}$

وعلى فرض ان $Z = \frac{1}{V}$ فان الصيغة السابقة تسمى بـ الصيغة

الخطية المتناظرة A

The primal

$$\min Z = \sum_{i=1}^{m} X_i'$$

S.t

$$\sum a_{ij} X_i' \geq 1 \quad ; \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$X_i' \geq 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

وبنفس الاسلوب يمكن تكوين مسألة L.P. المتناظرة B والتي تمثل

النموذج المقابل لمسألة L.P. المتناظرة A اي أن :-

The dual

$$Max\ T = \sum Y_j'$$

S.t.

$$\sum a_{ij} Y_j' \leq 1 \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots m$$

$$Y_j' \geq 0 \quad , \quad j = 1, 2, \ldots n$$

مثال حيث قيمة المباراة والاستراتيجيات المثلى لمعرفة الدفع التالية:

	B_1	B_2	B_3
A_1	2	3	2
A_2	4	1	5

الحل:

The Primal
(L.P. fo Player A)

$$\text{Min } Z = X_1' + X_2'$$

s.t.

$$2X_1' + 4X_2' \geq 1$$
$$3X_1' + X_2' \geq 1$$
$$2X_1' + 5X_2' \geq 1$$
$$X_1', X_2' \geq 0$$

The Dual
(L.P. For B)

$$\text{Max } T = Y_1' + Y_2' + Y_3'$$

s.t.

$$2Y_1' + 3Y_2' + 2Y_3' \leq 1$$
$$4Y_1' + Y_2' + 5Y_3' \leq 1$$
$$Y_1', Y_2', Y_3' \geq 0$$

نحل بالنسبة للعب B للمسألة

$$2Y_1' + 3Y_2' + 2Y_3' \leq 1 \Rightarrow 2Y_1' + 3Y_2' + 2Y_3' + S_1 = 1$$
$$4Y_1' + Y_2' + 5Y_3' \leq 1 \Rightarrow 4Y_1' + Y_2' + 5Y_3' + S_2 = 1$$

	C_j	1	1	1	0	0		
CB	B.V.	Y_1'	X_2'	Y_3'	S_1	S_2	b	Ratio
0	S_1	2	3	2	1	0	1	1/2
0	S_2	(4)	1	5	0	1	1	1/4
	Z_j	0	0	0	0	0	0	
	$C_j - Z_j$	1	1	1	0	0		

Key Col

Key Row

$$R_2^* = \frac{R_2}{\text{Pivot}(4)} \quad ; \quad R_1^* = R_1 - 2R_2^*$$

	C_j							
CB	B.V	X_1'	X_2'	Y_3'	S_1	S_2	b	Ratio
0	S_1	0	(5/2)	-1/2	1	-1/2	1/2	1/2 / 5/2 = 1/5
1	Y_1'	1	1/4	5/4	0	1/4	1/4	1/4 / 1/4 = 1
	Z_j	1	1/4	5/4	0	1/4	1/4	
	$C_j - Z_j$	0	3/4	-1/4	0	-1/4		

Key Row

Key Col

$$R_1^* = \frac{R_1}{\text{Pivot}} = \frac{2}{5} R_1 \qquad R_2^* = R_2 - \frac{1}{4} R_1^*$$

C_j		1	1	1	0	0	
C_B	B.V.	Y_1'	Y_2'	Y_3'	S_1	S_2	b
1	Y_2'	0	1	$\frac{-1}{5}$	$5/2$	$-1/5$	$1/5$
1	Y_1'	1	0	$13/10$	$-1/10$	$3/10$	$1/5$
	Z_j	1	1	$7/10$	$3/10$	$1/10$	$2/5$
	$C_j - Z_j$	0	0	$-7/10$	$-3/10$	$-1/10$	

$$\therefore T = \frac{2}{5} \quad , \quad Y_1' = Y_2' = \frac{1}{5} \quad , \quad Y_3' = 0$$

$$T = \frac{1}{V} \Rightarrow V = \frac{1}{T} \Rightarrow V = \frac{1}{2/5} = \frac{5}{2}$$

$$Y_1' = \frac{Y_1}{V} \Rightarrow Y_1 = Y_1' * V = \frac{1}{5} * \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore Y_1 = \frac{1}{2}$$

$$Y_2' = \frac{Y_2}{V} \Rightarrow Y_2 = Y_2' * V = \frac{1}{5} * \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore Y_1^* = Y_2^* = \frac{1}{2} \; ; \; Y_3^* = 0$$

من جدول الحل الامثل للتمرين 3 نلاحظ ان الحل الامثل للاعب A يمكن ايجاده من القيم اسفل المتغيرات (S_1, S_2) الوهمية ونلاحظ ان قيم المتغيرات في الجدول النهائي ان اشارة الحل المبدئي سالبة وحيث انها تمثل معدل الزيادة في التعظيم وتمثل النقصان في حالة التقليل لذلك يتم اخذ القيمة بغض النظر عن الاشارة السالبة

على العموم فان الحل الامثل للمتنافس A هو :-

$$X_1' = \frac{3}{10} \Rightarrow X_1' = \frac{X_1}{V} \Rightarrow X_1 = X_1' * V$$

$$\therefore X_1 = \frac{3}{10} * \frac{5}{2} = \frac{3}{4} = X_1$$

$$X_2' = \frac{1}{10} \Rightarrow X_2 = X_2' * V = \frac{1}{10} * \frac{5}{2} = \frac{1}{4} = X_2$$

$$Z = \frac{1}{V} \Rightarrow Z = \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}$$

The opt soln if V

- For Player A

$$Z^* = \frac{2}{5} \; ; \; X_1^* = \frac{3}{4} \quad X_2^* = \frac{1}{4}$$

- for Player B is

$$T = \frac{2}{5} \; ; \; Y_1^* = Y_2^* = \frac{1}{2} \; ; \; Y_3^* = 0$$