نظرية المباراة

مقدمة: يرجع الفضل في تكوين نظرية المباراة او بما تسمى (نظرية الالعاب) الى العالم جون فون نيومان الذي ارسى قواعد الالعاب في العام (1928) الى العام (1933) و بدأ تطبيقها في النواحي الاقتصادية والحربية عام (1944) ثم بدأت بالتطور الى يومنا هذا.

وترمز نظرية الالعاب الى المنافسة بين التجار أو الشركات أو المؤسسات حيث تقوم على المنافسة بين لاعبين و يمكن ان يكون اللاعبان افرادا او مؤسسات أو شركات وتكون نتيجة المباراة خسارة لأحدهم و ربح للآخر وهناك نوعين من النتائج في المباريات

1- المباراة ذات المجموع الصفري: أي أن ربح الاول = خسارة الثاني

2- المباراة ذات المجموع غير الصفري: — اي انه ليس بالضرورة أن يكون خسارة الاول تساوي ربح الثاني وبالعكس.

وتعرف المباراة: — بانها مجموع القواعد والقوانين التي تستخدم في اتخاذ القرار في مسألة ادارية او اقتصادية او عسكرية

المفاهيم الاساسية في نظرية المباراة :-

1- اللاعبون Players

يمكن ان تكون المباراة بين فريقين او أكثر ويمكن ان يكون الفريق شخص او شركة او مؤسسة

2- مصفوفة الدفع Pay of MatriX

وتتكون من :-

a- العوائد :- ويمكن ان تكون ربحاً او خساره

b- الاستراتيجيات :- وهي الخطط التي توضع من قبل المتسابقين ولكل لاعب استراتيجياته الخاصة به

3- نتيجة المباراة :- وهنالك نتيجتان المباراة

a- المباراة ذات المجموع الصفري وهذا يعني ما يربحه الفريق الاول يساوي تماماً ما يخسره الفريق الثاني

b- المباراة ذات المجموع غير الصفري :- وهنا ليس بالضرورة ان يكون ما يربحه الفريق الاول يساوي تماماً ما يخسره الفريق الثاني .

أولا:- المباراة بين شخصين ذات المجموع الصفري

في هذا النوع من المباريات يكون كسب الدول بمقدار خسارة الثاني ويمكن ان يلعب كل لاعب باكثر من استراتيجية وتسمى الاستراتيجية في هذه الحالة استراتيجية التوازن، اما طريقة الحل فتكون حسب الخطوات:-

1- نجد اصغر قيمة في كل صف ونضعها في عمود جديد بمحاذاة المباراة ونسميه بـ (Min) ثم نختار من هذا العمود اكبر قيمة اي (MaXMin) فتكون هذه قيمة اللعبة بالنسبة للاعب الاول (A) ونرمز لها بالرمز (V_1)

2- نجد اكبر قيمة في كل عمود ونضعها في صف جديد بمحاذاة المباراة ونسميه (MaX) ثم نأخذ من هذا الصف اصغر قيمة اي (MinMaX) (MinMaX) وتكون هذه قيمة اللعبة بالنسبة للاعب الثاني (B) ونرمز لها بالرمز (V_2)

3- يكون مجموع المباراة صفر اذا كانت $V_1 = V_2$ أما قيمة المباراة فانها $(V = V_1 - V_2 = 0)$

مثال: اذا كان لدينا مصفوفة الدفع التالية

اللاعبون	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
X_1	8	-2	9	-3
X_2	6	5	6	8
X_3	-2	4	-9	-1

اوجد قيمة المباراة بالنسبة للاعبين A, B ونقطة التوازن

الحل: نعيد كتابة المصفوفة ونجد عمود Min وصف Max

اللاعبون	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Min
X_1	8	-2	9	-3	-3
X_2	6	5	6	8	5
X_3	-2	4	-9	-1	-9
Max	8	5	9	8	Max Min = 5 / Min Max = 5

$V_1 = \text{Max Min} = 5$

$V_2 = \text{Min Max} = 5$

∴ استراتيجية اللعب بالنسبة للاعب A تساوي استراتيجية اللعب بالنسبة للاعب B

نقطة التوازن $= V_1 = V_2 = 5$

اما قيمة المباراة فإنها $V = V_1 - V_2 =$

ثانياً :- المباراة ذات المجموع غير الصفري :-

وتسمى ايضاً الاستراتيجية المختلفة عندما لا تتساوى قيمة كسب اللاعب الاول مع خسارة اللاعب الثاني اي لا يكون هناك نقطة توازن وفي هذه الحالة تسمى الاستراتيجية التي يلعب بها اللاعبان بالاستراتيجية المختلطة ويمكن حل المباريات من هذا النوع بعدة طرق و منها

1 - طريقة الرسم البياني

2 - اسلوب البرمجة الخطية

اما قيمة المباراة فتكون محصورة بين V_2 و V_1 اي أن

$$\text{Max Min} \leq V = \text{قيمة المباراة} \leq \text{Min Max}$$

اولاً طريقة الرسم البياني

تستخدم هذه الطريقة فقط اذا كان احد اللاعبين يستخدم استراتيجيتان فقط، ولايجاد احتمالات اللعب و قيمة المباراة نتبع الخطوات :-

1 - بالنسبة للاعب A، (اللاعب الاول)

- نرسم عمودين يمثل الاول P_1 و الثاني P_2 و نضع على كل منهما قيمة
- نصل بين النقاط بخطوط مستقيمة
- يكون البعد بين العمودين = 1
- تكون نقطة تقاطع الخطوط على الخط الافقي قيمة P_1

2 - بالنسبة للاعب B (اللاعب الثاني) نتبع نفس الخطوات

3- يمكن استخدامها في حل المباريات الكبيرة ولكن بعد اختزالها الى مباريات صغيرة ويتم ذلك من خلال استبعاد (حذف) صف او عمود اي استبعاد بعض الاستراتيجيات لحين الحصول على استراتيجيتين فقط لاحد المتنافسين على الاقل

ولأجل توضيح هذه الطريقة نفترض مصفوفة الدفع التالية:-

الاحتمالات		q_1	q_2	q_n
	اللاعب B / اللاعب A	B_1	B_2 ---	B_n
P_1	A_1	a_{11}	a_{12} ----	a_{1n}
P_2	A_2	a_{21}	a_{22} ----	a_{2n}

نفترضها عدم وجود نقطة استقرار فان المتنافس A يمتلك الستراتيجية A_1 و A_2 وباحتمال P_1 و P_2 $(P_2 = 1 - P_1)$ حيث ان $0 \leq P_i \leq 1$ فان الربح المتوقع لـ A المناظر لستراتيجية المتنافس B كما في الجدول الآتي:-

ستراتيجيات B	الربح المتوقع لـ A
B_1	$a_{11}P_1 + a_{21}(1-P_1) = (a_{11} - a_{21})P_1 + a_{21}$
B_2	$a_{12}P_1 + a_{22}(1-P_1) = (a_{12} - a_{22})P_1 + a_{22}$
⋮	⋮
B_n	$a_{1n}P_1 + a_{2n}(1-P_1) = (a_{1n} - a_{2n})P_1 + a_{2n}$

من الجدول نلاحظ ان الربح المتوقع لـ A هو دالة خطية تتضمن P_1 بموجب معيار اعتبل الادنى فان A يختار قيمة P_1 التي تعظم الادنى ربح متوقع

مثال: جد احتمالات اللعب و قيمة المباراة لمصفوفة الدفع التالية:-

اللاعب A \ اللاعب B	B_1	B_2
A_1	-2	3
A_2	3	-4

الحل:

A \ B	B_1	B_2	Min
A_1	-2	3	-2
A_2	3	-4	-4
Max	3	3	MaxMin = -2 / MinMax = 3

$\because$ MaxMin $\neq$ MinMax

اذن لاتوجد نقطة استقرار المباراة اذن قيمة المباراة تقع

$$\text{Max Min } V_1 \leq V_{\text{قيمة المباراة}} \leq V_2 \text{ Min Max}$$

اذا الستراتيجيات المتاحة للاعبين A و B تساوي (2) فيكون الحل اما باستخدام استراتيجية A او B / سنرسم المباراة بالنسبة للاعب الاول A

استراتيجية B	الربح المتوقع لـ A
B_1	$-2P_1+3(1-P_1) = 3-5P_1$
B_2	$3P_1-4(1-P_1) = 7P_1-4$

اللاعب A يحاول ان يحصل V الجرما يمكن [تعظيم V] فاذا وقع اختيار اللاعب B على الاستراتيجية الاولى (العمود الاول) فإن نتيجة الاختيار بالنسبة للاعب A سيكون

$$3-5P_1 = -2P_1+3(1-P_1)$$

اما اذا وقع اختيار اللاعب B على الاستراتيجية الثانية (العمود الثاني) من مصفوفة الدفع فإن نتيجة الاختيار للاعب A سيكون $3P_1-4(1-P_1)$ وتساوي $7P_1-4$.

والربح المتوقع لـ (A_1) تم ترتيبه بالجدول الاتي:

الرسم: بعد ان حددنا الربح المتوقع لـ A مع استراتيجيات B نبدأ بالرسم وفق الخطوات

1- نرسم الاحداثي السيني ليمثل الاحتمال ويقسم المحور السيني الى عدة اجزاء من (0 الى 1) وطول كل جزء $\frac{1}{10}$ لأن $0 \le P_i \le 1$

2- نرسم الاحداثي الصادي ليمثل نتيجة المنافسة

العمود الاول $3-5P_1$

if $P_1 = 0 \Longrightarrow$ النقطة $(0, 3)$

if $P_1 = 1 \Longrightarrow$ النقطة $(1, -2)$

الحد الثاني $7p_1 - 4$

If $p_1 = 0 \Rightarrow$ النقطة $(0, -4)$

if $p_1 = 1 \Rightarrow$ النقطة $(1, 3)$

ولايجاد قيمة المباراة عندما يكون الربح المتوقع لـ A هو نفسه اختيار B لأي استراتيجية B_1, B_2 وهذا يتحقق عند مقاطع المعادلتين

$$3 - 5p_1 = 7p_1 - 4$$

$$7p_1 + 5p_1 = 3 + 4$$

$$\therefore p_1 = \frac{7}{12}$$

لدينا $p_2 = 1 - p_1 \Leftarrow p_2 = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$

$$\therefore p_1 = \frac{7}{12} \; ; \; p_2 = \frac{5}{12}$$

∴ الربح المتوقع لـ A نحصل عليه بتعويض p_1 في أحد المعادلتين :

$$3 - 5p_1 \stackrel{?}{=} 7p_1 - 4$$

$$3 - 5\left(\frac{7}{12}\right) \stackrel{?}{=} 7\left(\frac{7}{12}\right) - 4$$

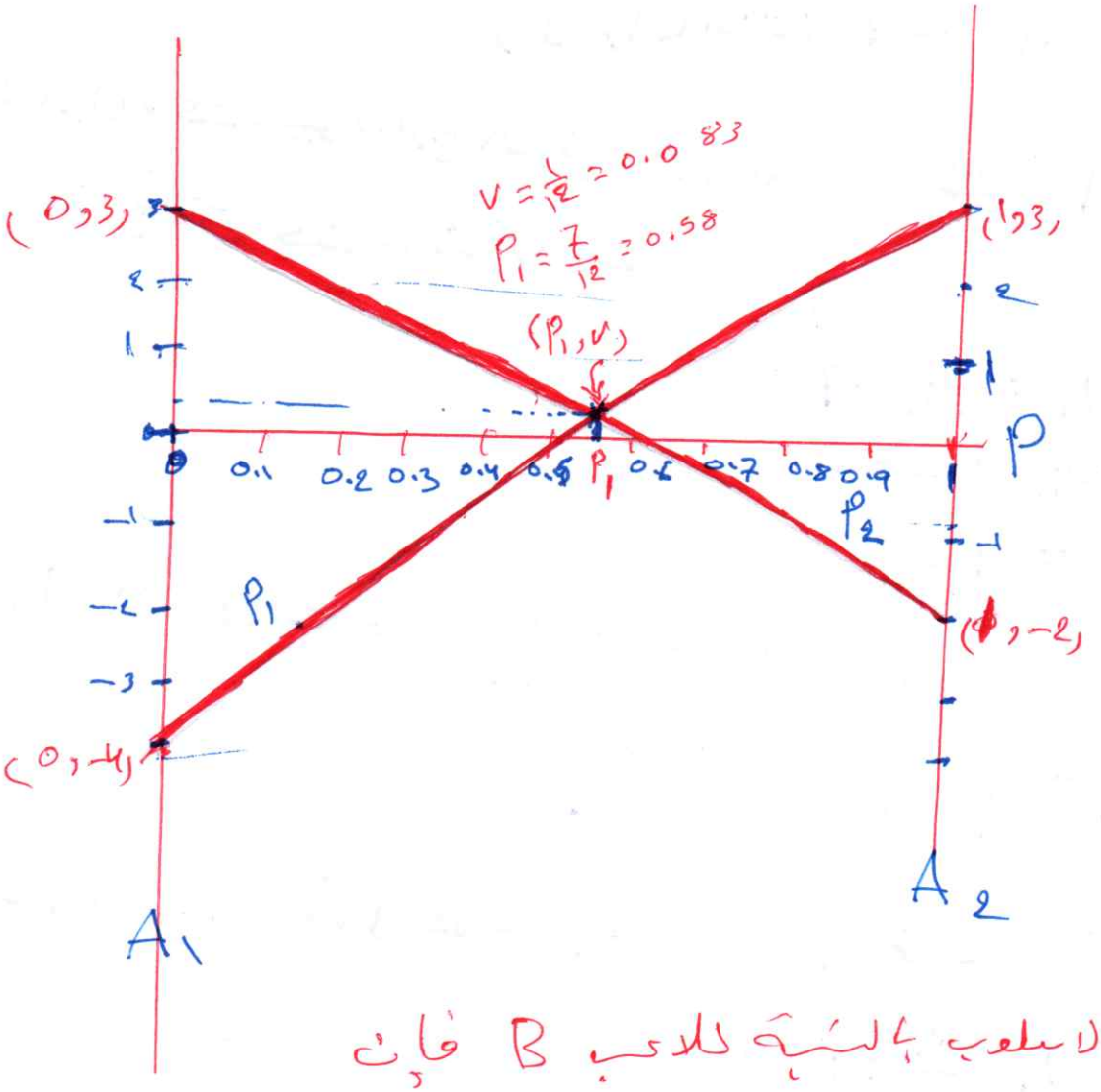
$$3 - \frac{35}{12} \stackrel{?}{=} \frac{49}{12} - 4$$

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{12}$$

∴ قيمة المباراة تساوي $\frac{1}{12}$ $\left(V = \frac{1}{12}\right)$

$$(MaxMin = -4) \leq \left(V = \frac{1}{12}\right) \leq (MinMax = 3)$$

نستطيع رسم المحاور لكل اللاعبين اذا كانت مصفوفة الدفع (4×4) لكن اذا كانت غير ذلك $(4 \times n)$ او $(n \times 4)$ نرسم فقط اللاعب الذي يملك استراتيجيتين اما اللاعب الآخر فنجد قيمته بالمعادلات فقط دون رسم .



وبنفس الاسلوب بالنسبة للاعب B فإن

الاستراتيجيات	الخسارة المتوقعة لـ B
A_1	$-2q_1 + 3q_2 = -2q_1 + 3(1-q_1) = 3 - 5q_1$
A_2	$3q_1 - 4q_2 = 3q_1 - 4(1-q_1) = 7q_1 - 4$

لإيجاد q_1 نأخذ المعادلة

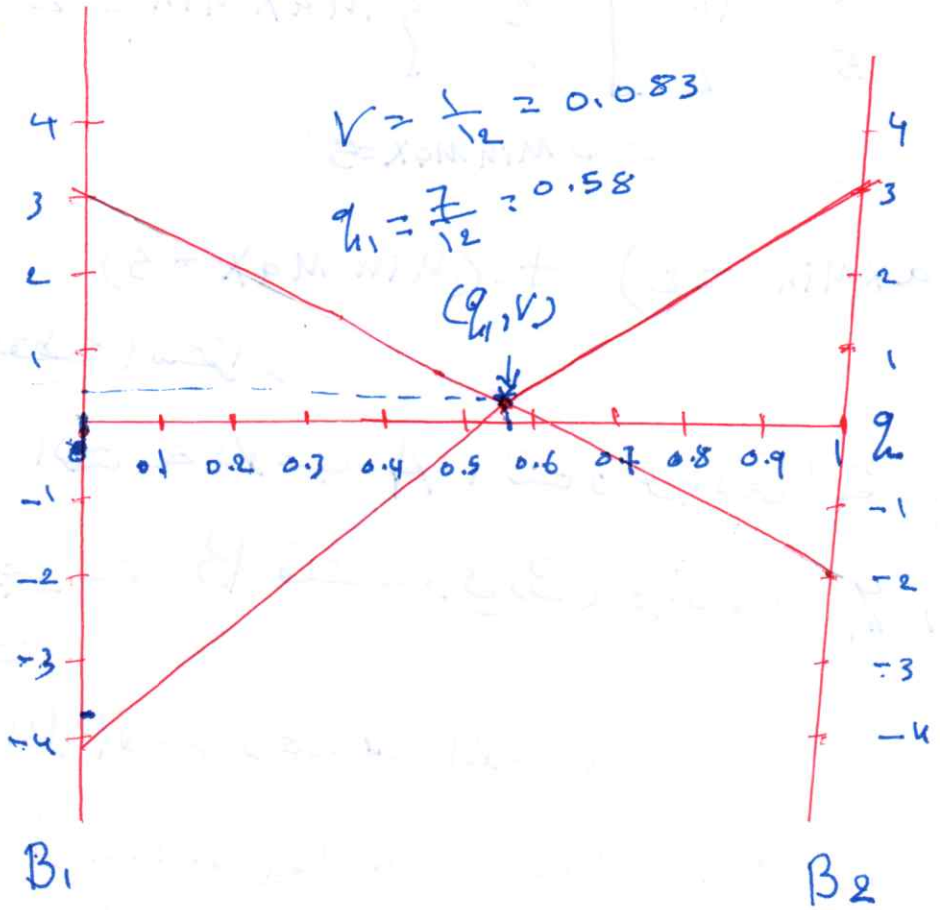
$$7q_1 - 4 = 3 - 5q_1$$

$$7q_1 + 5q_1 = 3 + 4 \Longrightarrow q_1 = \frac{7}{12} \Longrightarrow q_2 = 1 - q_1 = \frac{5}{12}$$

ولايجاد قيمة المباراة V نعوض بأحد صادرات q بقيمة q_1

$$7q_{11} - 4 = 7 * \frac{7}{12} - 4 = \frac{1}{12}$$

$$\therefore V = \frac{1}{12} = \text{قيمة المباراة}$$



توضيح ١- القيمة الوحيدة لنتيجة المباراة $(V = \frac{1}{12})$ تمثل الربح لـ A والخسارة لـ B والعكس صحيح أي القيمة السالبة لنتيجة المباراة تمثل الخسارة لـ A والربح لـ B

مثال-2- : جد قيمة الاحتمال وقيمة المباراة لمصفوفة الدفع الآتية

	B_1	B_2	B_3
A_1	1	3	10
A_2	8	5	2

الحل: بالبداية نختبر فيما اذا يوجد نقطة استقرار

	B_1	B_2	B_3	Min	
A_1	1	3	10	1	MaxMin = 2
A_2	8	5	2	2	
Max	8	5	10		⇒ MinMax = 5

$\therefore (MaxMin = 2) \neq (Min\,Max = 5)$

اذن لا توجد نقطة استقرار

الستراتيجيات المتاحة للاعب A اثنتان وباحتمالية P_1 و $(P_2 = 1 - P_1)$

اما ستراتيجيات B فتساوي (3) وباحتمال q_1, q_2, q_3 على التوالي

لهذا سيتم الحل بالاعتماد على لاعب A

ان اللاعب A يحاول ان يجعل قيمة المباراة (V) اكبر ما يمكن (تعظيم)
فاذا وقع اختيار اللاعب B على الستراتيجية الاولى (العمود الاول)
فان نتيجة الاختيار بالنسبة لـ A ستكون

$$1 * P_1 + 8P_2 = P_1 + 8(1 - P_1) = 8 - 7P_1$$

اما اذا اختار اللاعب B الستراتيجية الثانية (العمود الثاني B_2)
فإن نتيجة الاختيار للاعب A هي :-

$$3P_1 + 5P_2 = 3P_1 + 5(1-P_1) = 5 - 2P_1$$

اما اذا اختار اللاعب B الستراتيجية الثالثة (العمود الثالث B_3)
فان نتيجة الاختيار للاعب A هي :-

$$10P_1 + 2P_2 = 10P_1 + 4(1-P_1) = 8P_1 + 4$$

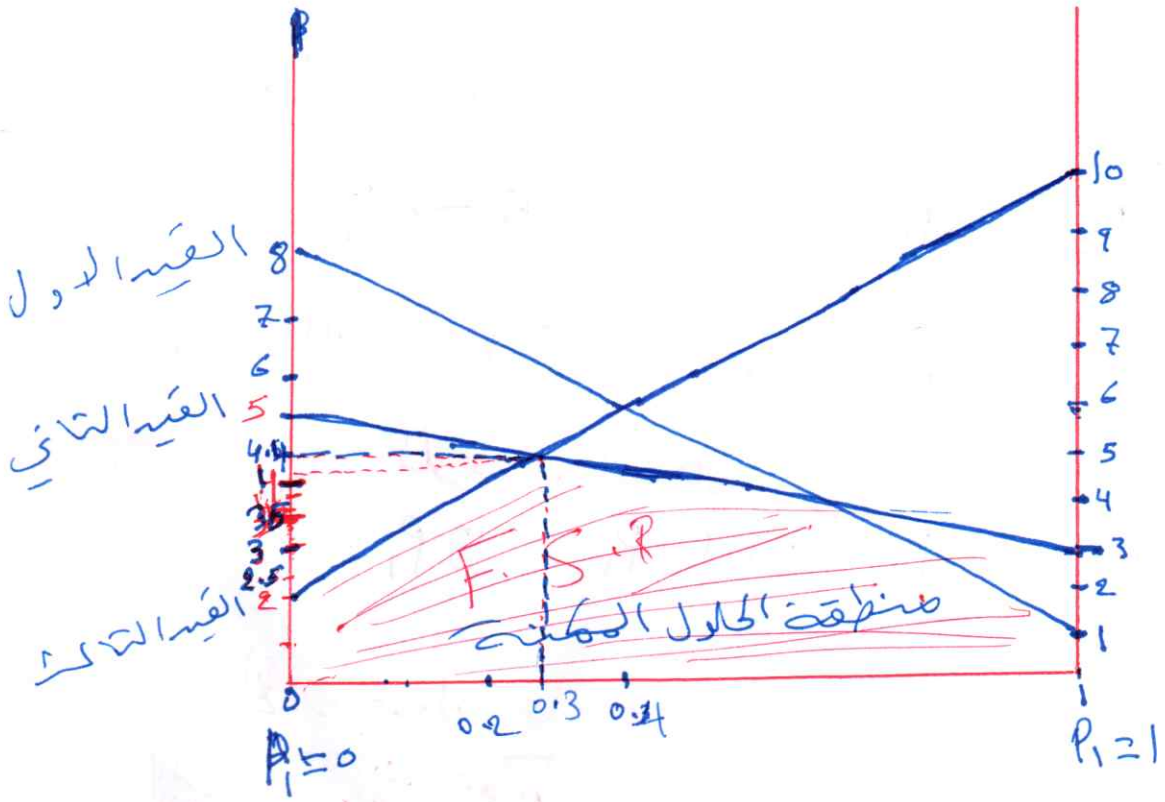
نرتب النتائج في الجدول التالي

B's Strategy	الربح لـ A's	الربح عند الاحتمالية $P_2=0$	الربح عند الاحتمالية $P_1=1$
B_1	$8-7P_1$	(الربح عند $P_1=0$) $8-7*0=8$ $(0,8)$	$8-7*1=1$ $(1,1)$
B_2	$5-2P_1$	$(0,5)$	$(1,3)$
B_3	$4+8P_1$	$(0,4)$	$(1,10)$

وللرسم نتبع مايلي

1- نرسم الاحداثي السيني ليمثل الاحتمال وتكون قيمته محصورة بين (صفر وواحد) وبهذا نقسم المحور السيني الى عدة اجزاء بطول $\frac{1}{10}$

2- اما المحور العمودي فيمثل نتيجة المنافسة



في حالة وجود اكثر من مستقيمين يتم اختيار المستقيمين الذين يمثلان اعلى نقطة في منطقة الحل الممكن (لأن استراتيجية A هي تعظيم اقل ربح)

اي ان العمود الواصل بين نقاط تقاطع المستقيم الثاني والثالث ومحور السينات يمثل قيمة P_1 المثالي أي

$$5-2P_1 = 2+8P_1$$
$$8P_1+2P_1 = 5-2$$
$$\therefore P_1 = \frac{3}{10} \quad \therefore P_1 = 0.3$$

وبالحل ينتج

وبتعويض قيمة P_1 في المعادلة (2) او معادلة القيد 3 تنتج قيمة الميار V

$$5-2P_1 = 5-(2\times 0.3) = 4.4$$

$$\therefore \text{قيمة الميار } V = 4.4$$

مثال (3): جد احتمالات اللعب وقيمة المباراة لمعطوفة الدفع التالية

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 5 \\ 10 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

الحل: بالبداية نختبر فيما اذا يوجد نقطة استقرار

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \text{Max} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 5 \\ 10 & 2 \end{bmatrix} \\ \{10 \quad 8\} \end{array}\begin{array}{c} \text{Min} \\ 1 \\ 3 \\ 2 \\ \Rightarrow \text{Min Max} = 8 \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{Max Min} = 3$$

$$(\text{Max Min} = 3) \neq (\text{Min Max} = 8)$$

اذن لايوجد نقطة (استقرار لنقطة توازن) للمباراة.

الستراتيجيات الثابتة للاعب A هي (3) وباحتمالية P_1, P_2, P_3

اما ستراتيجيات B فتساوي (2) وباحتمالية q_1, q_2

لهذا سيتم الحل بالاعتماد على تقليل الخسارة للاعب B لأنه يمتلك ستراتيجيتان

ان اللاعب B يحاول ان يجعل قيمة المباراة V اقل ما يمكن (تقليل) اي Min.

فاذا وقع اختيار اللاعب A على الاستراتيجية الاولى فان نتيجة الاختيار للاعب B ستكون

$$1*q_1 + 8q_2 = q_1 + 8(1-q_1) = 8 - 7q_1$$

اما اذا اختار اللاعب A الستراتيجية الثانية (الصف الثاني A_2) فان نتيجة الاختيار للاعب B هي :-

$$3q_1 + 5q_2 = 3q_1 + 5(1-q_1) = 5 - 2q_1$$

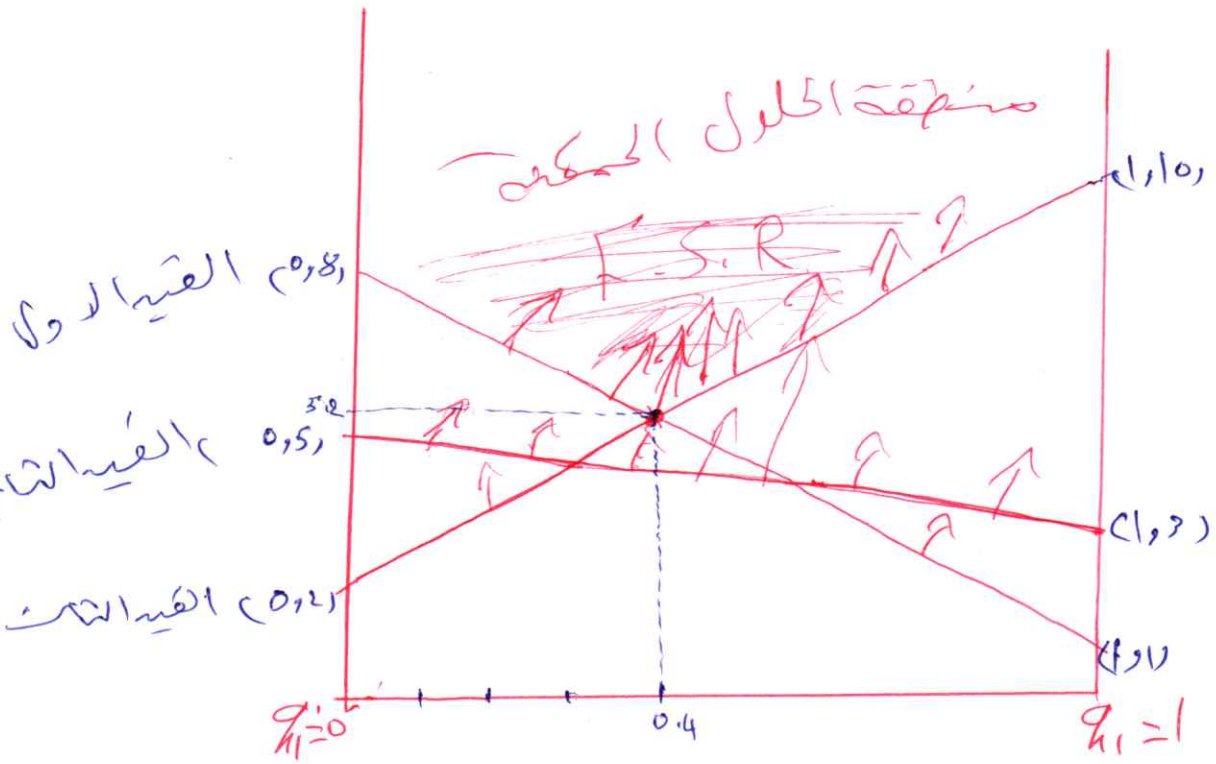
اما اذا اختار اللاعب A الستراتيجية الثالثة (الصف الثالث A_3) فان نتيجة الاختيار للاعب B هي :-

$$10q_1 + 2q_2 = 10q_1 + 2(1-q_1) = 8q_1 + 2$$

ترتيب النتائج في الجدول التالي :-

A's Strategy	B's Strategy	الاستراتيجية المقابلة $q_1 = 0$	الاستراتيجية المقابلة $q_1 = 1$
A_1	$8 - 7q_1$	$q_1 = 0 \Rightarrow 8 - 7q_1 = 8$ النقطة $(0, 8)$	$(1, 1)$
A_2	$5 - 2q_1$	$(0, 5)$	$(1, 3)$
A_3	$8q_1 + 2$	$(0, 2)$	$(1, 10)$

وبعد ترتيب الجدول نرسم المحور



بالنسبة للاعب B في حالة وجود اكثر من مستقيمين يتم اختيار المستقيم الذي يحتوي على ادنى نقطة في منطقة الحل الممكنة (لان استراتيجية B هي تقليل اي Min)

اي ان المستقيم الواصل بين نقاط تقاطع المستقيم الثاني والاول وصور البيانات يمثل قيمة q_1 الحل وبالحل نحصل على:

$$8-7q_1 = 2+8q_1 \implies 8q_1+7q_1 = 8-2 \implies q_1 = \frac{6}{15}$$

$$\therefore q_1 = 0.4$$

وبتعويض قيمة q_1 في المعادلة ① او معادلة القيد الثالث تنتج قيمة الباراة

$$8-7q_1 = 8-(7*0.4) = 5.2 = V \text{ قيمة الباراة}$$