المحاضرة الثانية

الاحد ١٣/١٢/٢٠٢٠

الصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطية

الصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطية تتضمن دالة الهدف (Z) في حالتي الـ (MaX) و الـ (Min) و لـ (n) من متغيرات القرار و M من القيود / مميز بالعلاقات الرياضية التي من الممكن ان تأخذها وهي ($\leq$ / $=$ / $\geq$).

و يمكن التعبير عن الصيغة العامة للنموذج الرياضي للبرمجة الخطية و على النحو الاتي

دالة الهدف لـ n من المتغيرات

$$\text{MaX } Z \quad \text{or} \quad \text{Min } Z = \sum_{j=1}^{n} c_j X_j$$

M من القيود

S.t.

$$\sum a_{ij} X_i \begin{pmatrix} \leq \\ \text{or } = \\ \text{or } \geq \end{pmatrix} b_i \quad ; i = 1, 2, \ldots, m$$

شرط عدم السالبية

$$X_j \geq 0 \quad ; j = 1, 2, \ldots, n$$

- ان الرموز $(Z, X_j, C_j, a_{ij}, b_i)$ الواردة في الصيغة السابقة تأخذ نفس التعريف الوارد في المحاضرة السابقة عند صياغة النموذج الرياضي للبرمجة الخطية .

إن الصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطية تأخذ نوعين من الصيغ عند التطبيق , كالآتي :-

١ - الصيغة القانونية

٢- الصيغة القياسية أو المعيارية

أولاً الصيغة القانونية

ان الصيغة القانونية لنموذج البرمجة الخطية في حالة التعظيم تأخذ الشكل الآتي

$$\text{Max } Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

s.t.

$$\sum a_{ij} x_j \leq b_i \quad , (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$x_j \geq 0 \quad , (j = 1, 2, \dots, n)$$

ان خصائص الصيغة القانونية في هذه الحالة هي :-

١- ان دالة الهدف من النوع تعظيم Max

٢- ان كل المتباينات جميع قيود النموذج تكون من نوع اقل او يساوي ($\leq$)

٣- ان جميع متغيرات القرار تكون مقيدة بالاشارة اي ان $x_j \geq 0$

3/

ب - حالة التقليل Minimization

ان الصيغة القانونية Canonical form, لنموذج البرمجة الخطية في حالة التقليل تأخذ الشكل الآتي

$$\text{Min } Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \quad \sum a_{ij} x_j \geq b_i \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_j \geq 0 \quad ; \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

إن خصائص الصيغة القانونية في حالة التقليل هي :-

1- ان دالة الهدف Z يكون من النوع Minimum

2- ان علامات جميع قيود النموذج تكون من نوع $\geq$

3- ان جميع متغيرات القرار تكون مقيدة بالاشارة اي $x_j \geq 0$

ثانياً- الصيغة القياسية Standard Form

تعد الصيغة القياسية او المعيارية افضل من الصيغة السابقة من الناحية التطبيقية، كونها تستخدم في حل مسائل البرمجة الخطية بصورة اسرع من طرق الحل السابقة، ويمكن الحصول على الصيغة القياسية لنموذج البرمجة الخطية من الصيغة القانونية بعد اجراء بعض التحويرات الرياضية حسب نوع المشكلة، وفيما يلي الوصف العام للحصول على الصيغة القياسية في حالتي التعظيم والتقليل وكما يأتي:-

أ- حالة التعظيم

يمكن الحصول على الصيغة القياسية لنموذج البرمجة الخطية في حالة ال Max وفقاً للخطوات الآتية:-

1. اضافة المتغيرات الراكدة (Slack Variables) الى قيود الصيغة القانونية لغرض تحويل المتباينات الى معادلات
2- اضافة المتغيرات الراكدة (S_i) ابتداءً الى دالة الهدف (Z) بمعاملات صفر
3- تضمين شرط عدم السالبية، اي المتغيرات الراكدة (S_i) باعتبارها تمثل مستلزمات الانتاج غير المستغلة الى جانب متغيرات القرار X_j

وفيما يلي ، ماتقدم يمكن الصيغة القياسية لنموذج البرمجة الخطية وكما يلي

1- حالة التعظيم Max

ان الصيغة القياسية لنموذج البرمجة الخطية في حالة Max هو

$$\text{Max } Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j + 0 \sum_{i=1}^{m} S_i$$

st

$$\sum a_{ij} X_j + S_i = b_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$X_j \geq 0, \; S_i \geq 0 \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

2- حالة التقليل Min

ان الصيغة العامة (القانونية) لنموذج البرمجة الخطية هو

$$\text{Min } Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

s.t.

$$\sum a_{ij} X_j \geq b_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$X_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

ويمكن الحصول على الصيغة القياسية لنموذج البرمجة الخطية في حالة التقليل باتباع الخطوات الآتية

1- طرح المتغيرات الراكدة S_i من قيود المتباينة القانونية لغرض تحويل المتباينات الى معادلات

حيث ان S_i :- هي متغيرات وهمية تمثل الفرق بين الجانب الايمن والايسر لكل قيد

2- اضافة المتغيرات الاصطناعية (Artificial variable) الى قيود الشكل 1 لمعالجة الاشارات السالبة للمتغيرات الراكدة (S_i) ليتماشى مع شرط عدم السالبية $S_i \geq 0$

3- طرح المتغيرات الراكدة S_i من دالة الهدف بمعامل صفر مع اضافة المتغيرات الاصطناعية R_i للدالة 1 مسبوقة بكميات افتراضية M 1 غالبا ماتكون الكمية M كمية كبيرة جدا ومن مضاعفات العدد 10

4- تضمين شرط عدم السالبية 1 قيد متغيرات القرار X_j

وكل ضوء ما تقدم يمكن صياغة النموذج القياسي للبرمجة الخطية على الشكل وكما يلي

$$\text{Min } Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j - 0 \sum_{i=1}^{m} S_i + M \sum_{i=1}^{m} R_i$$

s.t.

$$\sum a_{ij} X_j - S_i + R_i = b_i \quad ; i = 1, 2, \dots m$$

$$X_j \geq 0 \;, R > 0 \quad \text{و} \quad S_i \geq 0 \quad ; j = 1, 2, \dots n$$

M is very large

حيث ان S_i :- المتغير الراكد رقم i ، R_i :- المتغير الاصطناعي رقم i ،

M :- تمثل معامل المتغير الاصطناعي وهي كمية كبيرة جدا

Ex1 لدينا نموذج البرمجة الخطية الآتي

$$\text{Min } Z = 2X_1 + 3X_2$$

s.t.

$$6X_1 + 3X_2 \geq 30$$
$$4X_1 + 2X_2 \geq 40$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

والمطلوب اكتب الصيغة القياسية لنموذج البرمجة الخطية السابق

$$\text{Min } Z = 2X_1 + 3X_2 - 0S_1 - 0S_2 + MR_1 + MA_2$$

s.t.

$$6X_1 + 3X_2 - S_1 + R_1 = 30$$
$$4X_1 + 2X_2 - S_2 + R_2 = 40$$
$$X_1, X_2, S_1, S_2, R_1, R_2 \geq 0$$

مثال: حل البرمجة الخطية بالصيغة القياسية

$$\text{Max } Z = 10X_1 + 20X_2$$

s.t.

$$2X_1 + 3X_2 \le 30$$
$$5X_1 + 4X_2 \le 60$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

نحوّل البرمجة الخطية بالصيغة القياسية

$$\text{Max } Z = 10X_1 + 20X_2 + 0S_1 + 0S_2$$

$$2X_1 + 3X_2 + S_1 = 30$$
$$5X_1 + 4X_2 + S_2 = 60$$
$$X_1, X_2, S_1, S_2 \ge 0$$

Ex(3)

ملاحظة

- ان احد فرضيات طريقة السمبلكس ان الاطراف اليمنى للقيود تكون موجبة، وان المتغير الوهمي يمثل متغيرا اساسيا في الحل الممكن الاساسي الابتدائي، وفي حالة القيد $\ge$ سيأخذ المتغير الوهمي S_i قيمة سالبة وللتغلب على هذه المشكلة يتم اضافة متغير اصطناعي وعليه يكون المتغير الاصطناعي هو المتغير الاساسي الابتدائي

- يكون معامل R (او M) قيمته كبيرة جداً فنعمل على تقليل دالة الهدف في حالة التعظيم وتعظيم دالة الهدف في حالة التقليل لكي يتم استبعاد المتغير الاصطناعي من الحل الأمثل حيث يبدأ الحل بمعالجة المتغيرات الاصلية للمسألة، اي ان الحل الامثل سوف يعطي قيم صفرية للمتغيرات الاصطناعي وهذا مايسمى بطريقة M الكبيرة

والجدول الآتي يوضح المتغيرات التي تم اضافتها للقيود ودالة الهدف لتحويل المتباينة 2.3 الى الصيغة القياسية

نوع العلاقة الرياضية	آلية اخذ S_i و R_i مع القيود	آلية اخذ S_i و R_i في دالة الهدف	
		MaX	Min
اقل او يساوي	$+S_i$	$+0S_i$	$+0S_i$
اكبر او يساوي	$-S_i+R_i$	$-0S_i-MR_i$	$-0S_i+MR_i$
يساوي	$+R_i$	$-MR_i$	$+MR_i$

Ex(3) لديك نموذج البرمجة الخطية التالي

$$\text{Max } z = 3x_1 + 6x_2$$

s.t.

$$x_1 + 2x_2 \leq 10$$
$$2x_1 = 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

والمطلوب هو النموذج الى الصيغة القياسية

S.1^h

صيغة كاملة

$$\text{Max } z = 3x_1 + 6x_2$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 10$$
$$2x_1 = 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

⟹

صيغة قياسية

$$\text{Max } z = 3x_1 + 6x_2 + 0s_1 - MR_1$$
$$x_1 + 2x_2 + s_1 = 10$$
$$2x_1 + R_1 = 6$$
$$x_1, x_2, s_1, R_1 \geq 0$$

Ex(4) حول نموذج البرمجة الخطية التالي الى الصيغة القياسية

$$\text{Min } z = 5x_1 + 10x_2$$

s.t.

$$3x_1 + 6x_2 \geq 30$$
$$4x_2 = 10$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

S.1^n

$$\text{Min } z = 5x_1 + 10x_2 - 0s_1 + MR_1 + MR_2$$

s.t.

$$3x_1 + 6x_2 - s_1 + R_1 = 30$$
$$4x_2 + R_2 = 10$$
$$x_1, x_2, s_1, R_1, R_2 \geq 0$$