جامعة الموصل
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم بحوث العمليات والتقنيات الذكائية

محاضرات النمذجة والمحاكاة

المحاضرة الاولى

النموذج (model) :

هو بناء هيكل تصوري لوصف النظام . او هو تجديد للنظام يتكون من تجمع لمعلومات حول النظام بغرض دراسته.

النظام (system):

النظام هو مجموعة من الاشياء تتفاعل وتعتمد على بعضها البعض او هو مجموعة من الكائنانت ترتبط مع بعضها البعض بصورة ما لتحقيق عدد من الاهداف.

النموذج الرياضي (mathematical model) :

هو وصف لنظام بأستعمال لغة الرياضيات ، وهو تمثيل رياضي يتضمن ثوابت ومتغيرات ودوال رياضية ، ويكون بشكل معادلة رياضية اومتباينة او رسم بياني او جدول.

الثابت :

هو الذي يحمل قيمة راسخة لاتتغير ولاتتبدل بتغير الزمن او الظروف.

المتغير :

هو التعبير الذي لايأخذ قيمة واحدة دائما ويمكن لقيمته التغير تبعا لمتغيرات او دالة اخرى مثل الوزن الطول ودرجة الحرارة ...... الخ.

اصناف المتغيرات : (Classes of variables)

١- **المتغيرات المستمرة والمتقطعة:**
يكون المتغير متقطعا اذا كان يأخذ قيما منفصلة يعبر عنها بأعداد صحيحة اويكون مستمر اذا كان يأخذ قيما متصلة يعبر عنها بأعداد حقيقية .

٢- **المتغير الحتمي والمتغير الغير حتمي (deterministic variable and non deterministic variable)**

يكون المتغير حتميا اذا كان يمكن تحديده وحدانيا بوساطة معلمات النموذج وبمجموعات الحالات السابقة لهذه المتغيرات اما المتغير غير الحتمي اذا كان لايوصف بقيم وحيدة بل بتوزيعات احتمالية.

٣- المتغير المستقل والمعتمد (depended and undepanded variable)
يكون المتغير مستقلا اذا كان لايعتمد على متغيرات اخرى وبخلاف ذلك يكون معتمدا .

تصنيف النماذج الرياضية (classification of mathematical models)

١- نماذج خطية مقابل نماذج غير خطية (linear and nonlinear model)
٢- نموذج حتمي مقابل نموذج غير حتمي او احتمالي (deterministic and probabilistic model)
٣- النموذج الساكن مقابل النموذج الحركي (static and dynamic model)

انواع النماذج: (Types of models)

أ- نماذج عامة : تتضمن هيئات ومسميات ذوات استخدامات عامة ، كنماذج من سلعة معينة
ب- نماذج خاصة : ومن هذه النماذج
١- نماذج معمارية : كنماذج التصاميم المعمارية التي تصنع من الكارتون او البلاستيك.
٢- نماذج جغرافية : كالخرائط المختلفة.
٣- نماذج كيمياوية : كالعينات المأخوذة لفحص مختبري معين.
٤- نماذج رياضية : كالعلاقات والمعادلات الرياضية.
٥- نماذج حاسوبية : كالبرامج والمخططات الانسيابية.
٦- نماذج محاكاتية : ادوات رياضية وحاسوبية وضعت لغرض اجراء تجارب محاكاتية.
٧- نماذج ماركوفية : مبنية اساسا على المفاهيم والافكار التي تتضمنها سلاسل ماركوف.

مراحل بناء النموذج الرياضي: (Stages of building a mathematical model)
تبدأ النمذجة الرياضية عادة بمسألة من الحياة الواقعية وتمر بعدد من المراحل .

جامعة الموصل
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم بحوث العمليات والتقنيات الذكائية

١- المرحلة الاولى : وضع الفرضيات للنموذج : تبدأ هذه المرحلة بترجمة المسألة الواقعية الى مسألة رياضية من خلال فرض عدد من الفرضيات السهلة التي تنسجم مع طبيعة المسألة الواقعية.

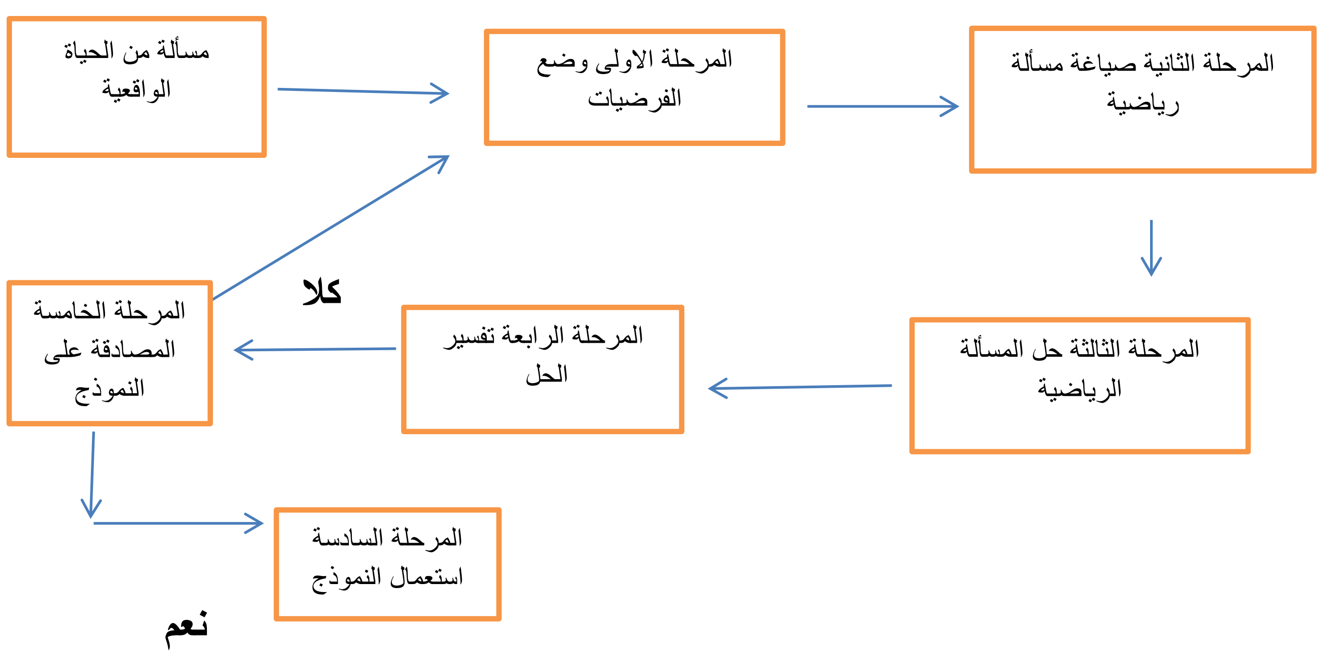
٢- المرحلة الثانية : الصياغة الرياضية للمسألة:
تشخص المتغيرات والعلاقات فيما بينها ، ثم الاستعانة بالفرضيات المفروضة في المرحلة الاولى حيث تحول المسألة الى مسألة رياضية .

٣- المرحلة الثالثة : حل المسألة الرياضية : حيث يستعان بالتقنيات الرياضية والحاسوبية المتاحة لإيجاد الحل الرياضي للمسألة.

٤- المرحلة الرابعة : تفسير الحل : يتم تفسير الحل وواقعيته ومدى انسجامه مع المسألة الواقعية باستخدام عدد من التقنيات الرياضية مثل . (رسم الحل ، اجراء المحاكاة للنموذج ، اختبار عشوائية بواقي النموذج ، اختبار كفاءة النموذج بالتنبؤ).

٥- المرحلة الخامسة : المصادقة على النموذج : في ضوء معطيات المرحلة الرابعة اما يصادق على النموذج اذا كانت نتائجه ايجابية او لا يصادق عليها وفي هذه الحالة نعود من جديد الى المرحلة الاولى لتطوير الفرضيات .

٦- المر حلة السادسة : استعمال النموذج : بعد نجاح النموذج في جميع المراحل السابقة يمكن استعماله للأغراض التي بني من اجلها .



جامعة الموصل
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم بحوث العمليات والتقنيات الذكائية

استخدام المعادلات التفاضلية في بناء النماذج (Using differential equations in model building)

نماذج السكان : Population models:

ان نمذجة السكان تطبيق للنمذجة الرياضية لدراسة حركة ديناميكية الكائنات الحية في النمو والاضمحلال وتعد مسألة نمذجة السكان من المسائل الاساسية التي يهتم بها علم البيئة . ولقد كانت البداية الحقيقية لنمذجة السكان في القرن الثامن عشر . ويعد الباحث البريطاني توماس مالثوس واحد من الرواد في هذا المضمار .

مراحل بناء نموذج رياضي لعدد السكان :

المرحلة الاولى : الفرضيات

ان الفرضية التي افترضها توماس مالثوس هي انه خلال فتراتى زمنية صغيرة فان اعداد الولادات والوفيات تتناسب مع كل من حجم المجتمع وطول الفترة الزمنية .

المرحلة الثانية : الصياغة الرياضية

نفرض

$N(t)$: عدد السكان في البلد قيد الدراسة عند الزمن t

$B(t)$: عدد الولادات في ذلك البلد في الزمن t

$D(t)$: عدد الوفيات في ذلك البلد في الزمن t

$\delta(t)$: تمثل فترة زمنية صغيرة

$$B(t) \propto N(t)\,\delta(t)$$

$$D(t) \propto N(t)\,\delta(t)$$

اذ ان $\propto$: تناسب

$$B(t) = a\,N(t)\,\delta(t)$$

$$D(t) = b\,N(t)\,\delta(t)$$

اذ ان a,b مقداران ثابتان

ان التغير في عدد السكان في فترة زمنية صغيرة $\delta(t)$

$\delta N(t)$: يمثل الفرق بين اعداد الولادات واعداد الوفيات في تلك الفترة

$$\delta N(t)= B(t) - D(t)$$

$$= a\,N(t)\,\delta(t) - b\,N(t)\,\delta(t)$$

$$\delta N(t) = C\,N(t)\,\delta(t)$$

$c=a-b$ كمية ثابتة

اذا نجد ان

$$\delta N(t) / \delta(t)= C\,N(t)$$

وبأخذ غاية الطرفين عندما تقترب $\delta(t)$ من الصفر

فيكون النموذج الرياضي المقترح لعدد السكان في ضوء الفرضية التي افترضها توماس هو

$$\frac{dN(t)}{dt} = cN(t) \quad ،$$

C كمية ثابتة

المرحلة الثالثة : الحل الرياضي

ان النموذج الذي تم الحصول عليه عبارة عن معادلة تفاضلية من المرتبة الاولى ويمكن بيسر حل هذه المعادلة والحصول على نموذج توماس مالثوس وهو

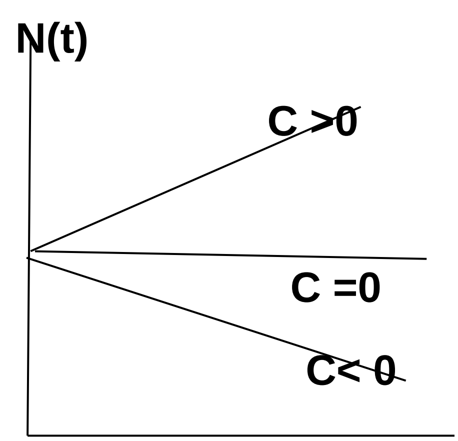
$$N(t) = N(0)e^{ct}$$

جامعة الموصل
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم بحوث العمليات والتقنيات الذكائية

المرحلة الرابعة :

تفسير الحل سيقتصر على جانبين هما

١- رسم الحل : الشكل الاتي يوضح حل نموذج توماس مالثوس



وكما واضح من الشكل فأن نموذج
فأن حجم C =0توماس مالثوس يعطي وصفا معقولا للتغير في حجم السكان فأذا كانت
C< 0المجتمع سيبقى كما هو في مكانه لان نسبة الولادات تساوي نسبة الوفيات ، واذا كان
فأن حجم المجتمع سوف يتناقص لان نسبة الولادات ستكون اقل من نسبة الوفيات ، اما اذا كان
فأن حجم المجتمع سيزداد بأضطراد لان نسبة الولادات ستكون اكبر من نسبة الوفيات .C >0

٢- اختبار كفاءة النموذج في التنبوء : ان اختبار كفاءة النموذج في التنبوء يتطلب بيانات واقعية مسجلة حسب تعدادات السكان لكل ١٠ سنوات حيث سيطلق على السنة التي نبدأ بها نمذجة السكان بتسمية سنة الاساس .

جامعة الموصل
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم بحوث العمليات والتقنيات الذكائية

المرحلة الخامسة : المصادقة على النموذج

لوحظ ان نموذج توماس مالثوس كفء عند استخدامه للتنبوء على المدى القريب اما على المدى البعيد فهو ضعيف . لذا فهناك خلل في هذا النموذج اذا اريد استخدامه للتنبوء بعدد السكان على المدى البعيد .

س1) بوصف السنة ١٩٤٧ هي سنة الاساس لائم نموذج توماس مالثوس لعدد سكان العراق واختبر دقته في التنبوء بعدد السكان للسنوات ١٩٧٧ و ١٩٨٧ و١٩٩٧

Q1) Using 1947 as the base year, fit Thomas Malthus's model for the population of Iraq and test its accuracy in predicting the population for the years 1977, 1987 and 1997

ملاحظة:

يتم استخراج السنة المستقبلية او الدليل المقابل لها t من العلاقة التالية

$$t = \frac{year - \text{السنة الاساس}}{10}$$

Year= السنة الاساس +10t

س٢) استخرج نسبة النمو الاسي في نموذج توماس اذا كانت سنة الاساس في (1790) N(0)=3.9 مليون نسمة وفي السنة (1800) N(1)=5.3 مليون نسمة

Q2) Extract the exponential growth rate in the Thomas model if the base year was 1790 (N(0) = 3.9 million people) and in (the year 1800 (N(1) = 5.3 million people

جامعة الموصل
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم بحوث العمليات والتقنيات الذكائية

نماذج النمو والاضمحلال (Growth and decay models)

ان نماذج النمو والاضمحلال عبارة عن نماذج رياضية تكون نسبة النمو / الاضمحلال متناسبة مع القيمة الحالية للنموذج.

فعندما يكون المتغير الذي نتعامل معه متقطعا يطلق على النمو / الاضمحلال هندسي (لان القيم للنموذج تكون متوالية هندسية)

وعندما يكون المتغير مستمرا فيطلق على النمو / الاضمحلال اسي (لانه يكون دالة بدلالة الدالة الاسية)

ويعرف ايضا بأسم النموذج المالثوسي .

لنفرض انه لدينا متغيرين Y(t), X(t) العلاقة بينها هي

$$\frac{dy(t)}{dx(t)} = k\, y(t)$$

K : ثابت . حيث يمكن حل المعادلة بفصل المتغيرات ونحصل على المعادلة او الحل النهائي

$$y(t) = y(0)e^{k[\,x(t)-x(0)]}$$

بفرض ان x(t)> x(0) . فعندما يكون k>0 يعني ان y(t) هناك نمو فيها.

واذا كان k<0 يعني ان هناك اضمحلال في قيم y(t) .

نمذجة خطر حوادث السيارات جراء تناول المشروبات الكحولية

(Modeling the risk of motor vehicle accidents due to alcohol consumption)

سيتناول هذا التطبيق نمذجة العلاقة بين تناول المشروبات الكحولية وحوادث السيارات

حيث ان الفرضية التي سنفرضها هي

R :ترمز الى المخاطر النسبية لحوادث السيارات وتتناسب طرديا مع مستوى الكحول في الدم

b : ترمز الى مستوى الكحول في الدم . يعني

$$\frac{dR(b)}{db} \propto b$$

بتحويل التناسب الى معادلة ينتج النموذج الرياضي

$$\frac{dR(b)}{db} = k\ b$$

اذ ان k : ثابت تناسب وبعد حل المعادلة التفاضلية ينتج النموذج الرياضي التالي

$$R(b) = R(0)e^{kb}$$

R(0) =1

لانه عند عدم تناول المشروبات فلا يوجد مخاطرة بوقوع حوادث

اذا النموذج الرياضي النهائي

$$R(b) = e^{kb}$$

يتم اخذ مستوى الكحول في الدم مع نسبة الحوادث المقابلة لها وتعويضها في النموذج اعلاه . ولايجاد قيمة K

نمذجة تسخين الماء (Water heating modeling)

بفرض ان الخزان المعدني مملوء بالماء البارد وهذا الخزان يسخن بواسطة سخان كهربائي مغمور بالكامل في الماء لنمذجة هذه الحالة . نفترض ان حرارة الماء متساوية في جميع مواضع الخزان وعند التشغيل سيكون الماء حول السخان اكثر سخونة من المواضع الاخرى بحيث تصل حرارته في الغالب الى منتصف الخزان .

نفرض ان

q : هي الحرارة المنتجة من السخان تكون بنسبة ثابتة

T : الزمن

اذا الحرارة الكلية المكتسبة هي

$$h=qT$$

وبما ان الحرارة اللازمة لتغيير حرارة كتلة من المائع (m) بمقدار (θ) تتناسب مع

$$h \propto \theta m$$

$$qT \propto \theta m$$

وبما ان ثابت التناسب للمائع يعرف بسعة الحرارة النوعية ويرمز له بـ C نجد

$$H=qT=cm\theta$$

س) مامقدار الزمن اللازم لسخان مغمور قدرته 3kw من تسخين 100 kg من الماء حرارته 15 درجة مئوية الى 60 درجة مئوية

Q) How much time does a 3 kW immersion heater need to heat 100 kg of water at 15°C to 60°C?

تحديد التواريخ بالكربون المشع (Radiocarbon dating)

ان تحديد التواريخ بالكربون المشع تقنية يعود اكتشافها الى القرن العشرين . فقد لوحظ انه لو كانت

N(t) : تمثل عدد الذرات الموجودة في عينة من مادة مشعة فأن عدد الذرات التي تتعرض للتحلل الاشعاعي في وحدة الزمن تتناسب مع العدد الكلي من الذرات الموجودة.

جامعة الموصل
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم بحوث العمليات والتقنيات الذكائية

اذا النموذج الرياضي الاتي يعبر عن نسبة التغير في عدد الذرات بالنسبة للزمن

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda\, N(t)$$

λ : يثل ثابت الاضمحلال

اذا ناتج حل المعادلة التفاضلية هو النموذج الرياضي

$$N(t) = N(0)e^{-\lambda t}$$

حيث ان تقنية تحديد التواريخ بالكربون المشع تتلخص بأيجاد الزمن $t = \tau$

والذي يحقق القيد $N(\tau) = \frac{N(0)}{2}$

وحيث ان τ هو العمر النصفي من النموذج الرياضي الاخير نعوض عن الزمن بالعمر النصفي

$$N(\tau) = N(0)e^{-\lambda\tau}$$

نعوض في القيد اعلاه $\frac{N(0)}{2} = N(0)e^{-\lambda\tau}$

وبعد حل المعادلة ينتج

$$\tau = \frac{Ln\,2}{\lambda}$$

اذا

$$\lambda = \frac{Ln\,2}{\tau}$$

ومن النموذج الرياضي

$$N(t) = N(0)e^{-\lambda t}$$

$$\frac{\mathbf{N(t)}}{N(0)} = e^{-\lambda t}$$

وبأخذ Ln الطرفين

$$Ln\left[\frac{\mathbf{N(t)}}{N(0)}\right] = -\lambda t$$

وبفرض

$$k = Ln\left[\frac{\mathbf{N(t)}}{N(0)}\right]$$

اذا

$$t = \frac{-\mathbf{k}}{\lambda}$$

وبالتعويض عن قيمة λ في المعادلة ينتج معادلة تحديد العمر

$$t = \frac{-\tau\, k}{Ln\, 2}$$

العمر النصفي (Half-life) : هو المدة الزمنية التي تتحلل فيها نصف ذرات عنصر مشع معين . ان مدة العمر النصفي خاصية مميزة لكل النظائر المشعة فلكل نظير مشع عمر نصفي خاص به.

يوجد الكربون في جسم الكائن الحي في حالة توازن طبيعية ان الكربون المشع يقوم بتحليل المواد العضوية وفق نسبة اضمحلال اسي ثابتة للكربون المشع.

جامعة الموصل
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم بحوث العمليات والتقنيات الذكائية

فمقابل عملية تخزين الكربون المشع في جسم الكائن الحي هناك ذرات من الكربون المشع تتحلل حسب معادلة كمياوية وبمقارنة النسبة المتبقية من الكربون المشع يمكن الوصول الى العمر التقريبي للعينة .

س) في عينة متحجرة كانت نسبة الكربون المشع الى الكربون الطبيعي مقارنة بالنسبة الطبيعية 10% فكم يبلغ العمر التقريبي لهذا المتحجر

Q) In a fossil sample, the ratio of radioactive carbon to natural carbon compared to the natural ratio was 10%. What is the approximate age of this fossil

س) عنصر مشع لديه نسبة نضوب مقدارها 2% لكل 20 سنة جد

1- اذا كانت الكمية الابتدائية من هذا العنصر هي 165 غرام فكم سيبقى من هذه الكمية بعد 60 سنة .

2- مالعمر النصفي لهذا العنصر

3- بفرض ان عظام حيوان معين تبقى على نسبة ثابتة من هذا العنصر المشع خلال حياتها ثم يبدأ هذا العنصر بالنضوب حال موت الحيوان فأذا وجد عظم من هذا الحيوان ووجد انه يحوي 10% من المستوى الطبيعي للعنصر المشع قدر عمر ذلك الحيوان

Q) A radioactive element has a depletion rate of 2% every 20 years. Find:

1. **If the initial amount of this element was 165 grams, how much of this amount will remain after 60 years?**
2. **What is the half-life of this element?**
3. **Assume that the bones of a certain animal retain a constant level of this radioactive element throughout its life, and then this element begins to deplete upon the animal's death. If a bone from this animal is found and it contains 10% of**

the normal level of the radioactive element, estimate the age of that animal..

النمذجة بأستخدام المعادلات الفرقية (Modeling using difference equations)

سيتم التعامل مع المتتاليات والمتغيرات الحتمية كالزمن مثلا

المتتالية sequence :

هي دالة منطلقها (اي مدخلاتها input) مجموعة الاعداد الطبيعية {...,0,1,2 }=N ومداها Range (اي مخرجاتها output) مجموعة جزئية من مجموعة الاعداد الحقيقية.

النظام الحركي Dynamical system

هو عبارة عن علاقة رياضية بين حدود متتالية

امثلة

اكتب اول خمس حدود للمتتاليات المولدة من كل من النماذج الاتية

Examples

Write the first five terms of the sequences generated from each of the following models

1) $a_{n+1}= 2a_n \quad ,a_0=1 \quad ,n=1,2,3,\ldots\ldots.$
2) $b_{n+1}= 2b_n +3 \quad , \quad b_0 =0 \quad , n=1,2,3,\ldots\ldots$
3) $c_{n+1} = c_n(c_{n+1}) \quad , c_0 =2 \quad , \quad n=1,2,3,\ldots\ldots$

امثلة : اكتب النموذج الرياضي للنظام الحركي لكل من المتتاليات الاتية

Examples: Write the mathematical model of the kinetic system for each of the following sequences:

1) A={ 1,3,5,7,9,….}
2) B={ 1,3,7,15,31,….}
3) C={ 2,4,16,256,…..}

نموذج سهل في نمذجة التغيير (An easy model for modeling change)

يمكن نمذجة العديد من الظواهر في حياتنا وفق النموذج الاتي :

القيمة المستقبلية = القيمة الحالية + التغيير

س) اذا كان مقدار النمو في حجم مجتمع حيوان في بيئة معينة هو 2% لكل عام . فلو كان حجم المجتمع في تلك البيئة في احدى السنين هو 100 حيوان ، جد النموذج الرياضي المعبر عن تغيير حجم مجتمع الحيوان في تلك البيئة . ثم استخدم النموذج للتنبؤ بأعداد هذا الحيوان في تلك البيئة للسنوات الخمس القادمة.

Q) If the rate of growth in the size of an animal population in a certain environment is 2% per year, then if the population size in that environment in one year was 100 animals, find the mathematical model that expresses the change in the size of the animal population in that environment. Then use the model to predict the numbers of this animal in that environment for the next five years

مؤثر الفرق difference operator :

جامعة الموصل
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم بحوث العمليات والتقنيات الذكائية

تعريف : مؤثر الفرق

ان الفرق بين a_{n+1} ، a_n يرمز له Δa_n ويعرف على النحو الاتي

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$$

تعريف : مؤثر التغير الامامي (Forward change effect)

$$a_{n+1} = F a_n , \ldots\ldots \quad a_{n+k} = F^k_{a_n}$$

$$a_{n+2} = F^2_{a_n}$$

من التعريفين السابقين نستنتج بأن

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$$

$$= F a_n - a_n$$

$$=(F-1) a_n$$

فتكون العلاقة بين مؤثر الفرق ومؤثر التغير الامامي هي ان :

$$\Delta = F-1$$

استخدام المعادلة الفرقية الخطية من المرتبة الاولى في حل النماذج الرياضية

Using the first-order linear difference equation to solve mathematical models

نستعرض ادناه معادلات فرقية يتم الاعتماد عليها في حل النماذج الرياضية

$$a_{n+1} = c_0 + c_1 a_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$a_n = \begin{cases} \frac{c_0(1-c_1^n)}{1- c_1} + a_0 c_1^n & ; \ c_1 \neq 1 \\ n\, c_0 + a_0 & ; \quad c_1 = 1 \end{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$n = \frac{Ln\left[\frac{c_0 + a_n\,(c_1 - 1\,)}{c_0 + a_0(\;c_1 - 1\,)}\right]}{Ln(\;c_1)} \qquad ; \quad c_1 \;\neq 1 \text{...............} (3)$$

$$n = \frac{a_n - a_0}{c_0} \qquad ; \quad c_1 = 1 \text{.......................} (4)$$

س) اذا كان النموذج الرياضي للمتتالية $\{a_n\}$ هو

$$a_{n+1} = 5 + a_n \qquad ; n \in N$$

$$a_0 = 3$$

١- جد اول اربع حدود من هذه المتتالية
٢- جد الحد الخامس عشر والحد المئة من هذه المتتالية
٣- ماهو رقم الحد في هذه المتتالية والذي قيمته 103

س) اذا كان النموذج الرياضي للمتتالية $\{a_n\}$ هو

$$a_{n+1} = 1 + 3a_n \qquad ; n \in N$$

$$a_0 = 2$$

١- جد اول خمس حدود من هذه المتتالية
٢- جد الحد الخامس عشر والحد المئة من هذه المتتالية
٣- ماهو رقم الحد في هذه المتتالية والذي قيمته 147622

جامعة الموصل
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم بحوث العمليات والتقنيات الذكائية

دراسة حالات في النمذجة الحتمية للتغيير : (Case studies in deterministic modeling of change)

<u>قانون نيوتن للتبريد</u>

من تطبيقات نمذجة التغيير ، نمذجة التغيير في درجة حرارة شيء يوضع في بيئة ذات حرارة ثابتة ، مثل وضع جسم داخل مجمدة او ادخال قطعة من الايس كريم الباردة الى داخل غرفة .

فلو كان

T_0 : يرمز الى درجة الحرارة الابتدائية للجسم

C : يرمز الى درجة الحرارة الثابتة في البيئة المحيطة بالشيء

T_n : يرمز الى درجة حرارة الشيء في الوحدة الزمنية الواحدة ويحسب من المعادلة الفرقية الاتية : وهذا هو قانون نيوتن للتبريد

$$\Delta T_n = T_{n+1} - T_n = k(T_n - c) \quad ; \quad n \in N$$

اذ ان k هومقدار ثابت

اذا قانون نيوتن للتبريد ينص على :

الفرق في درجة الحرارة ΔT_n بين الجسم الساخن والبيئة المحيطة يتناقص بنسبة تتناسب مع الفرق بين درجتي الحرارة

س) ادخل كوب شاي درجة حرارته 62 درجة مئوية الى داخل غرفة درجة حرارتها 22 درجة مئوية ، وبعد دقيقة واحدة اصبحت درجة حرارته 60 درجة مئوية

1- كم ستكون درجة حرارة الشاي بعد في الدقائق 5 الاولى

2- بأستخدام قانون نيوتن للتبريد نمذج هذه الحالة ثم حل النموذج الناتج

3- جد درجة الحرارة الشاي في الدقيقة 40

4- بعد كم دقيقة ستكون درجة حرارة الشاي 23 درجة مئوية.

جامعة الموصل
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم بحوث العمليات والتقنيات الذكائية

Newton's law of cooling

Q) A cup of tea with a temperature of 62°C is placed in a room with a temperature of 22°C. After one minute, its temperature becomes 60°C.

1- How hot will the tea be after the first 5 minutes

2- Using Newton's law of cooling, model this situation and then solve the resulting model.

3- Find the temperature of the tea in 40 minutes

4- After how many minutes will the temperature of the tea be 23 degrees Celsius.

شهادات التوفير

س)شهادة توفير قيمتها الابتدائية C دينار تتقاضى فائدة شهرية مقدارها α %

1- صغ النموذج الحركي لقيمة هذه الشهادة

2- جد الحل للنموذج الحركي

3- جد مقدار الربح الشهري في هذه الشهادة

4- جد عدد الاشهر اللازمة لكي تتضاعف فيها قيمة شهادة التوفير K من المرات.

5- افرض ان القيمة الابتدائية لشهادة التوفير هي C= 20000 دينار ، وان الفائدة الشهرية مقدارها 1% . جد قيمة هذه الشهادة خلال اشهر السنة الاولى ، وكذلك مجموع الارباح التراكمية . ثم جد بعد كم سنة سوف تتضاعف قيمة هذه الشهادة

Savings certificates

Q) A savings certificate with an initial value of C dinars, earning a monthly interest of α%

1- Formulate a dynamic model for the value of this certificate

2- Find the solution to the kinetic model

3- Find the monthly profit amount in this certificate

4- Find the number of months required for the value of the K savings certificate to double

5- Suppose the initial value of a savings certificate is C = 20,000 dinars, and the monthly interest is 1%. Find the value of this certificate during the first months of the year, as well as the total cumulative profits. Then find after how many years the value of this certificate will double

رهن البيت

اشتريه بيت بمبلغ C دينار ودفع مبلغ اولي مقداره A دينار من قيمة البيت وقسط المبلغ المتبقي بأقساط شهرية مقدارها M دينار وبفائدة شهرية مقدارها r %

المطلوب :

1- اكتب النموذج الحركي المعبر عن المبلغ الشهري المطلوب عن هذا البيت

2- جد الحل للنموذج الحركي

3- جد عدد الاشهر اللازمة لتسديد كامل ثمن البيت

4- جد مجموع المبالغ المدفوعة من قبل المشتري لحين تسديد المبلغ الكلي والناجمة عن الفوائد

Home mortgage

He bought a house for C dinars and paid an initial amount of A dinars of the house's value. He paid the remaining amount in monthly installments of M dinars, with a monthly interest of r%.

Required:

1. **Write the dynamic model that expresses the monthly amount required for this house.**
2. **Find the solution to the kinetic model**
3. **Find the number of months needed to pay off the entire price of the house.**
4. **Find the total amounts paid by the buyer until the full amount is paid, resulting from interest.**

الحل :

نفرض ان المتغير b_n يمثل الدين المطلوب من المشتري بعد n من الاشهر من شراء البيت

اذا النموذج الرياضي هو على النحو الاتي

الدين المطلوب في الشهر n+1 = الدين المطلوب في الشهر السابق + فائدة الشهر السابق- القسط الشهري

فلو فرضنا ان

$$D=C-A$$

حيث ان D : يمثل المبلغ المتبقي في ذمة المشتري عند الشراء

اذا النموذج الرياضي يكون بالشكل الاتي:

$$b_{n+1} = b_n + r\, b_n - M$$
$$b_0 = D$$

اذا

$$b_{n+1} = b_n(1+r) - M$$
$$b_0 = D$$

نلاحظ ان Δb_n

$$\Delta b_n = b_{n+1} - b_n$$

وبتعويض النموذج اعلاه في المعادلة ينتج

$$\Delta b_n = b_n + r b_n - b_n - M$$
$$\Delta b_n = r b_n - M$$

وهذا يعني ان الذي يحدد اتجاه الدين هو الفرق بين المبلغ المضاف والناجم عن الفائدة $i_n = r b_n$ ومقدار القسط الشهري M

فأذا كان المبلغ المضاف والناجم عن الفائدة i_n < M فأن دين المشتري سوف يزداد بأستمرار وبالنتيجة سوف لايستطيع المشتري من تسديد الدين الى الابد

اما اذا كان المبلغ المضاف والناجم عن الفائدة i_n > M فأن دين المشتري سوف ينتهي بعد مدة محددة من الزمن

واذا كان المبلغ المضاف والناجم عن الفائدة i_n = M فأن دين المشتري سوف يبقى كما هو دون زيادة او نقصان.

الان نقوم بحل النموذج الرياضي الناتج سابقا وذلك بقارنة النموذج بالمعادلة الفرقية التالية

$$a_{n+1} = c_0 + c_1 a_n$$

$$b_{n+1} = (1+r) b_n - M$$

$$b_0 = D$$

اذا $b_0 = D$ ، $c_1 = 1 + r$ ، $c_0 = -M$

وبما انه $c_1 \neq 1$ اذا نستخدم الشطر الاول من المعادلة التالية

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{c_0(1 - c_1^n)}{1 - c_1} + a_0 c_1^n & ; \; c_1 \neq 1 \\ n\, c_0 + a_0 & ; \; c_1 = 1 \end{cases}$$

وبعد التعويض وسلسلة من التبسيطات نتج لنا

$$b_n = \frac{M[1 - (1 + r)^n]}{r} + D(1 + r)^n$$

حيث ان b_n تعطي قيمة المبلغ المتبقي في ذمة المشتري في الشهر n

ولايجاد معادلة حساب الاشهر اللازمة لتسديد كامل ثمن البيت نأخذ المعادلة الاخيرة اعلاه ونساويها بالصفر وبعد سلسلة من التبسيطات نتنتج لدينا المعادلة التالية

$$n = \frac{Ln\left[\dfrac{M}{M - rD}\right]}{Ln(1 + r)}$$

اما معادلة مجموع الفوائد المدفوعة من قبل المشتري فهي

$$S_i = \sum_{i=1}^{n} r\, b_n$$

جامعة الموصل
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم بحوث العمليات والتقنيات الذكائية

اضمحلال الراديوم : (radium decay)

الراديوم هو عنصر مشع وان نسبة اضمحلاله هي 1% لكل 25 سنة وهذا يعني ان الكمية المتبقية من هذا العنصر في بداية كل 25 سنة تساوي الكمية نفسها في بداية ال 25 سنة السابقة مطروحا منها 1% من تلك الكمية .

اذا نفرض

X_0 : تمثل الكمية الابتدائية من الراديوم

X_n : تمثل كمية الراديوم المتبقية بعد 25n من السنين

اذا النموذج الرياضي لكمية الراديوم بعد 25n من السنين

$$X_{n+1} = X_n - 0.01\, X_n$$

$$X_{n+1} = 0.99\, X_n \quad , n \in N$$

$$X_0 = 100$$

ولحل هذا النموذج يتم مقارنته بالمعادلة الفرقية التالية

$$a_{n+1} = c_0 + c_1 a_n$$

نجد انه $C_0 = 0$ ، $C_1 = 0.99$ اذا $c_1 \neq 1$ لذا سنستخدم المعادلة التالية

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{c_0(\,1 - c_1^n)}{1 - \ c_1} + \ a_0 c_1^n & ; \ c_1 \neq 1 \\ n\, c_0 + \ a_0 & ; \quad c_1 = 1 \end{cases}$$

وبعد التعويض بالشطر الاول من المعادلة اعلاه نجد

$$X_n = 0.99^n \, X_0 \quad , n \in N$$

وهذا هو النموذج الرياضي الذي يتم التنبؤ به عن عمر العنصر المشع بعد n من السنين

العمر النصفي للعنصر المشع : (half-life of a radioactive element)

العمر النصفي هو الزمن الضروري لتفكك نصف ذرات مادة مشعة . اي ان العمر النصفي هو عدد السنين اللازمة للكمية الابتدائية من المادة المشعة لكي تضمحل .

نفرض ان

H : هو اصغر عدد صحيح

X_H : اقل من نصف الكمية الابتدائية من الراديوم . اي انه

$$X_n = 0.99^n \, X_0$$

$$X_H = 0.99^H \, X_0$$

$$0.99^H \, X_0 \, \le \, \frac{1}{2} X_0$$

وبعد قسمة طرفي المتباينة الاخيرة على X_0 وبأخذ Ln الطرفين بعد ذلك نجد

$$H \cong 69$$

وبمانه الوحدة الزمنية لهذه المسألة هي 25 سنة فهذا يعني بأن العمر النصفي للراديوم هو حوالي

25(69)=1725 سنة

فلو فرضنا ان الكمية الابتدائية من الراديوم كانت 100 غرام فبعد 1725 سنة سيبقى منها 50 غرام ثم بعد 1725 سنة سيبقى 25 غرام

<u>اضمحلال الدواء في مجرى الدم : (Drug dissolution in the bloodstream)</u>

جامعة الموصل
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم بحوث العمليات والتقنيات الذكائية

من المسائل الطبية المهمة هو بقاء كمية تركيز الدواء في مجرى الدم فوق مستوى الفعالية وعدم تجاوز مستوى السلامة للمريض.

الجدول ادناه يبين كمية دواء للقلب a_n متبقية في مجرى الدم بعد n من الايام من اخذه الجرعة الاولى والبالغة 0.5 ملغرام

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	0.500	0.345	0.238	0.164	0.113	0.078	0.054	0.037	0.026

1- جد Δa_n

2- جد النموذج الحركي لكمية الدواء a_n المتبقية في مجرى الدم لهذا المريض بعد n من الايام ثم حل النموذج

3- اذا كانت الوصفة الطبية اليومية للمريض هي 0.1 ملغرام وكان معلوما ان نصف الدواء يبقى في النظام (مجرى الدم) عند نهاية فترة الجرعة . جد النموذج الحركي لكمية الدواء المتبقية في مجرى الدم لهذا المريض بعد n من الايام ثم ادر س السلوك بعيد المدى للدواء في مجرى الدم لهذا المريض

النموذج اللوجستي(the logistic model)

النموذج اللوجستي عبارة عن معادلة فرقية من المرتبة الاولى ومن الدرجة الثانية . ويعد هذا النموذج من الامثلة المهمة والسهلة للنماذج الحركية غير الخطية . ان تطبيقات هذا النموذج تغطي العديد من المجالات مثل الشبكات العصبية الاصطناعية، علم الاحياء ، علم السكان ، الاقتصاد ، الكيمياء . وبفرض اننا نهتم بدراسة التغيير في نسبة شيء معين يتغير بتغير الزمن ، مثل التغير في نسبة البكتيريا في بيئة معينة ، والتغير في نسبة الاصابة بمرض معين في محيط معين والتغير في نسبة مبيعات سلعة معينة في سوق معين . في مثل هكذا تطبيقات تكون امامنا الفرضية الاتية

نسبة تغاير الشيء عند الزمن n	تتناسب مع	نسبة وجوده عند الزمن n	و	نسبة عدم وجوده عند الزمن n

فلو كان

X_n : يرمز الى متغير نسبة وجود الشيء عند الزمن n

$1- X_n$: يرمز الى نسبة عدم وجود الشيء عند الزمن n

ومن الفرضية السابقة وبعد تحويل التناسب الى معادلة مع ملاحظة ان " و " تحول الى علامة الضرب دلالة على التفاعل ، نتوصل الى النموذج الرياضي الاتي :

$$\Delta X_n \propto X_n(1 - X_n)$$

$$X_{n+1} = X_n + rX_n(1 - X_n) \qquad n=0,1,2,\ldots..$$

حيث ان r كمية ثابتة تمثل نسبة النمو ، ويعرف هذا النموذج بالنموذج اللوجستي في الزمن المتقطع.

تطبيقات :

النمو في حجم مجتمع الحيتان:

اذا علمت ان حجم مجتمع الحيتان يكون مقيدا بظروف البيئة وانه اذا كان اقل منمستوى معين N_{min} ، فأنه يكون مهددا بالانقراض في تلك البيئة . أما اذا كان اكبر من مستوى معين N_{max} ، فأن اعدادها سوف تتناقص لان البيئة لاتستطيع تحمل اعداد كبيرة من الحيتان.

نمذج حجم مجتمع الحيتان في تلك البيئة بعد n من السنين

:

Applications

Growth in whale population size:

Knowing that the size of a whale population is limited by environmental conditions, if it falls below a certain level (Nmin), it is threatened with extinction in that environment. If it falls above a certain level (Nmax), its numbers will decline

because the environment cannot support large numbers of whales.

Model the size of the whale population in that environment after n years

الحل :

نفرض ان

X_n : يمثلحجم مجتمع الحيتان في تلك البيئة في السنة n لذا فأن

$$\Delta X_n = X_{n+1} - X_n$$

يمثل مقدار التغيير في حجم مجتمع الحيتان في سنتين متتاليتن . ومن معطيات هذه المسألة فأن

$$\Delta X_n \propto (X_n - N_{min}) \text{و} (N_{max} - X_n)$$

اي ان وبعد تحويل التناسب الى معادلة يصبح النموذج بالشكل النهائي الاتي

$$\Delta X_n = r(X_n - N_{min}) \text{و} (N_{max} - X_n)$$

اذان r هو ثابت التناسب . اي ان

$$X_{n+1} = X_n + r(X_n - N_{min})(N_{max} - X_n)$$

انتشار مرض معد :

افرض ان هناك N من الاشخاص في محيط ما ، مالايقل عن واحد من هؤلاء الاشخاص مصاب بمرض معد وبفرض وجود تفاعل بين المصابين وغير المصابين لنقل المرض ، وعدم وجود

اي علاج . نمذج اعداد المصابين بهذا المرض في هذا المحيط بعد 8 ايام في ذلك المحيط عندما يكون N=100 ونسبة النمو r=0.005 وعدد المصابين $X_0=3$.

<u>Spread of an infectious disease</u>:

Suppose there are N people in a given environment, at least one of whom is infected with a contagious disease, and assuming there is interaction between infected and uninfected people to transmit the disease, and no treatment is available. Model the number of people infected with this disease in this environment after 8 days in that environment when N = 100, the growth rate r = 0.005, and the number of infected people X0 = 3.

<u>simulation المحاكاة</u>

المحاكاة هو مصطلح لاتيني يعني نسخة او صورة انعكاسية مصغرة والمقصود بالمحاكاة من الناحية اللغوية هو المشابهة او التقليد . ومن الناحية العلمية هو بناء نموذج رياضي من اجل حل طريقة ما او حالة معينة لغرض دراسة سماتها وميزاتها او حل المسائل التي لها علاقة بها احتماليا بدلالة النموذج.

ان نهج المحاكاة هو نهج حاسوبي مفيد وسلس وسهل التطبيق وهو تقليد للواقع يتعامل مع الحالات التي تعد فيها الخاصية العشوائية المفتاح لوصف نظام معين .وان نهج المحاكاة يعد الملاذ الاخير الذي يمكن استخدامه عند اخفاق الطرائق العددية التقليدية في ايجاد الحلول للمسائل المختلفة .

Simulation step

خطوات المحاكاة

1- تعريف المسألة ومتغيراتها ثم بناء النموذج الرياضي لها

2- تعيين العناصر المراد تفحصها ثم تسيير عملية المحاكاة.

3- تفحص النتائج واختيار الافضل منها.

ان نماذج المحاكاة الحاسوبية تستخدم على نطاق واسع لدراسة الانظمة الكبيرة والمعقدة والباهظة التكاليف ، مثل شبكات المواصلات والمفاعلات النووية والموانئ وسدود المياه ومنظومات الدفاع الجوي.

ان الميزة الاساسية لنمذجة المحاكاة هي ان اتجاهها عكس اتجاه النمذجة التقليدية. فأن بناء نموذج انحداري او نموذج لمتسلسلة زمنية يبدأ بالبيانات او المشاهدات الواقعية ثم ينتهي بالنموذج الرياضي الملائم . في حين ان نمذجة المحاكاة تبدأ بالنموذج الرياضي كي تنتهي ببيانات مولدة منه وتحمل خصائصه.

Application areas of simulation (مجالات تطبيق المحاكاة)

1- التطبيق الصناعي

2- تصنيع اشباه الموصلات

3- هندسة البناء وادارة المشاريع

Simulation methods (اساليب المحاكاة)

1- symmetry method (طريقة التناظر)

2- montecarlo method (طريقة المونت كارلو)

Generate random numbers (توليد الارقام العشوائية)

1- طريقة اوسط المربع (mean square method)

Algorithm of mean square method

جامعة الموصل
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم بحوث العمليات والتقنيات الذكائية

Generate a random number of d ranks using the mean square method

(توليد عدد عشوائي مؤلف من d من الرتب بطريقة اوسط المربع)

الخطوة الاولى : نختار العدد البذرة X_0 ذو d من الرتب العشرية

الخطوة الثانية : نربع X_i كي نحصل على X_{i+1} ذي (2d) من المراتب

الخطوة الثالثة : نأخذ المراتب d الواقعة في منتصف العدد المولد من الخطوة الثانية وذلك بقطع 25% من طرفي المراتب كي ينتج العدد الجديد ذو المرتبة d

Q) Let X_0 = 8234 , Use the middle square method to generate four random numbers

$X_0 = 8234 ,(X_0)^2 = 67798756$

$X_1=7987 , (X_1)^2 =$

{ 7987,7921,7422,0860,…..}

طريقة اوسط الضرب average multiplication method

Algorithm of average multiplication method

الخطوة الاولى : نختار عددين X_1, X_0 كل منهما مؤلف من d من المراتب

الخطوة الثانية : نجد حاصل ضرب العددين لنحصل على عدد مؤلف من 2d من المراتب

الخطوة الثالثة : نأخذ المراتب d الواقعة في منتصف العدد المولد من الخطوة 2 وذلك بقطع 25% من طرفي المراتب كي ينتج العدد المولد ذو المراتب d .

Q)use the average multiplication method to generate ten random numbers using two numbers X_0= 12 , X_1=53

جامعة الموصل
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم بحوث العمليات والتقنيات الذكائية

طريقة فيبوناسي Fibonacci method

يتم توليد الاعداد وفق هذه الطريقة من العلاقة الاتية

$$X_i = X_{i-1} + X_{i-2} \ mod \ m \quad i=3,4,5,\dots\dots\dots$$

اذان X_1 ,X_2 هما عددا بذرة يجب تحديدهما وان m عددا كبيرا . من سلبيات هذه الطريقة ان الاعداد المولدة يكون بينها ترابط ذاتي مما ، يضعف الخاصية العشوائية المفروضة في هذه الاعداد.

طريقة المعكوس : Inverse method

هي طريقة يتم بموجبها الحصول على متغير عشوائي يتبع توزيعا معينا لتوليد ارقام عشوائية تتبع ذلك التوزيع وذلك بالاعتماد على الارقام العشوائية التي تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم القياسي .

نفترض اننا نريد الحصول على عينة عشوائية من دالة توزيع احتمالية f(x) سواء كان التوزيع متصل او متقطع فطريقة المعكوس تقوم اولا بأيجاد دالة الكثافة التراكمية

$$F(x) = P\{ y \le x \}$$

حيث $0 \le F(x) \le 1$ لكل قيم y المعرفة ثم نتبع الخطوات التالية

1- توليد ارقام عشوائية R من التوزيع المنتظم القياسي U(0,1)

2- حساب او ايجاد قيمة X المرادة من $X=F^{-1}(R)$

خوارزمية طريقة المعكوس

- **اذا كان x يأخذ القيم $x_1, x_2, x_3, \dots\dots\dots, x_n$ بأحتمال $p_1, \dots\dots\dots p_n$ بحيث**
-
- $1 \le p_i \le 0$ $\quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$
- **نتبع الخطوات التالية لايجاد القيم العشوائية**
- **الخطوة الاولى : نوجد الدالة التراكمية F_n**

$F_1=P_1$

$F_2 = P_1 + P_2$

.

.

.

.

$F_k = \sum_{i=1}^{k} p_i$ -

.

.

$F_n = \sum_{i=1}^{n} p_i$ -

الخطوة الثانية : نختار العدد العشوائي R_i فأذا كان

$$\sum_{i=1}^{n-1} P_i < R_i \le \sum_{i=1}^{n} P_i$$

اي

$$F_{n-1} < R_i \le F_n$$

فعندئذ الكمية العشوائية تأخذ القيمة X_n وكما موضح

$X_1 \quad if \quad 0 < R \le P_1$

$X_2 \quad if \quad P_1 < R \le P_1 + P_2$

.

.

.

$$X_n \quad if \quad \sum_{i=1}^{n-1} P_i < R \le \sum_{i=1}^{n} P_i$$

Q) Let the probability distribution for the time interval between machine shutdowns in a factory be as follows:

P_1=0.12	T_1=4
P_2=0.48	T_2=5
P_3=0.22	T_3=6
P_4=0.18	T4=7

Find (4) random values by inveres method, knowing that the random numbers Ri are:

(0.6955, 0.5806, 0.1129,0.3232)

Monte carlo method (طريقة المونت كارلو)

Algorithm

1- تحديد الهدف : معرفة الطلب اليومي المتوقع

2- تصميم النموذج

الطلب اليومي المتوقع = (مجموع الطلب اليومي) ÷ (عدد الايام)

عدد الايام : هو عدد ايام التي يتم فيها اجراء المحاكاة

جامعة الموصل
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم بحوث العمليات والتقنيات الذكائية

3- تصميم التجربة : بما ان السيطرة على المخزون تعتمد على متغير عشوائي هو الطلب اليومي لذلك نضع فترة ارقام عشوائية له حيث نتبع الخطوات التالية .

أ- ايجاد الدالة الاحتمالية للطلب اليومي

$$P_i = \frac{F_i}{\sum F_i}$$

ب – ايجاد الدالة التراكمية F_n $\qquad F_i = \sum_{i=1}^{n} P_i$

ج – انشاء فترة I_n للرقام العشوائية للخطوة ب $\qquad I_n = F_{n-1} – F_n$

4-اجراء التجربة : حيث يتم تحديد الفترة التي يقع بها الرقم العشوائي ومن خلالها تحديد الرقم المقابل للفترة العشوائية

5-تصميم وتحليل النتائج من خلال القانون التالي : (مجموع الطلب اليومي) ÷ (عدد ايام المحاكاة)

Q) If the daily demand for auto parts in the last 500 days is as shown in the table

Repetition	Daily demand for auto parts
40	0
80	1
100	2
120	3
100	4
60	5

جامعة الموصل
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم بحوث العمليات والتقنيات الذكائية

Conduct a simulation of the daily demand for auto parts using the Monte Carlo method for a period of (10) days, knowing that the random numbers
(0.32، 0.73 ،0.41 ،0.38 ، 0.73 ، 0.01، 0.09 ، 0.64 ، 0.34، 0.55)

المحاكاة اليدوية (Manual simulation)
المحاكاة اليدويةتعطي بعد نظر عميق في تفاصيل المحاكاة . سنجري المحاكاة اليدوية على وصول الزبائن في محل بقالة صغير له محاسب واحد.
المطلوب هو تحليل النظام بمحاكاة وصول وخدمة 4 زبأن ولاجراء المحاكاة اليدوية نحتاج الى توليد ازمنة مابين الوصول وازمنة الخدمة لكل زبون وذلك بالمعاينة من توزيعاتها المعطاة في الجداول

Q)) Inter-arrival time distribution table

Time Between arrival	probability
3	0.175
2	0.250
4	0.325
6	0.250

Knowing that the numbers are random (0.5014, 0.9065, 0.4033, 0.2481)

Service time table

Time services	probability
2	0.20
4	0.80
5	0.20

Knowing that the numbers are random (0.627, 0.0870 , 0.354 ,0.0740)

Conduct a manual simulation of the two tables above for (4) customers, finding the arrival time, start of service, end of service, waiting time in the system, number of items in the queue, and free time in the service.

Metrics for system performance(مقاييس الاداء للنظام)

1- **Average waiting time = (Total queue time) ÷ (Number of customers)**
2- **Possibility of waiting in line =(Number of customers who waited) ÷ (Number of customers)**
3- **Server effectiveness = (Total free time) ÷ (Total time)**
4- **Average service time = (Total service times)÷ (Number of customers)**
5- **Average inter-arrival time = (Total inter-arrival times) ÷ (Number of customers)**

6- Average system waiting time = (Total system waiting time) ÷ (Number of customers)

تكامل المونت كارلو (montecarlo integration)

ان طريقة تكامل المونت كارلو من طرائق المحاكاة العددية التي تستخدم وبنجاح تام لايجاد التكاملات العددية ولاي عدد من الابعاد فأذا اخفقت كل الطرائق في ايجاد التكامل العددي ، وبأي عدد من الابعاد كان فأن طريقة تكامل المونت كارلو تستطيع ان تقدم الحل المطلوب وبدقة مقبولة .

تكامل المونت كارلو ذو البعد الواحد (one-dimensional montecarlo integration)

1-خوارزمية ايجاد تكامل المونت كارلو الاحادي البعد بطريقة القبول – الرفض
Algorithm of the acceptance and rejection method for montecarlo integration

Input : n : عدد النقاط المراد توليدها بالمحاكاة

Output : المساحة التقريبية المراد حسابها $0 \le g(x) \le c$, $a \le x \le b$, $y=g(x)$

Step (1): put counter=0

Step (2): Follow the steps 3-----5

Step (3) : Calculate the random coordinates X_i , Y_i And so it is $a \le X_i \le b$, $0 \le Y_i \le c$

Step (4): Calculate $g(X_i)$

Step (5): if $Y_i \le g(X_i)$ put counter =counter + 1

Step (6) : Calculate the required area from the following equation:

Area =(c(b- a) counter) ÷ n

Step (7) : This is the approximate value of the required integration.

2- الطريقة الاحصائية (statistical method)

ان الفكرة العامة لهذه الطريقة تعتمد على مفاهيم احصائية ، وتتلخص بأفتراض ان المتغير X يتبع التوزيع المنتظم في الفترة (a,b) ثم حساب القيمة المتوقعة للدالة Y= g(x) ومساواتها بالمقدر الاحصائي للقيمة المتوقعة ينتج مقدر المونت كارلو الاتي للتكامل .

$$\hat{I} = \frac{(a-b)}{n} \sum_{i=1}^{n} g(x_i)$$

اذ ان $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ عبارة عن بيانات مولدة من التوزيع المنتظم في الفترة (a, b) فلو كانت $U_1, U_2, \ldots\ldots, U_n$ بيانات مولدة من التوزيع المنتظم في الأفترة (0, 1) فيمكن تحويلها الى بيانات مولدة من التوزيع المنتظم في الفترة (a, b) ومن خلال التحويل الاتي

$$x_i = a + (b-a)U_i$$