جامعة الموصل
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم بحوث العمليات والتقنيات الذكائية

محاضرات النمذجة

المحاضرة الثانية

استخدام المعادلات التفاضلية في بناء النماذج (Using differential equations in model building)

نماذج السكان : Population models:

ان نمذجة السكان تطبيق للنمذجة الرياضية لدراسة حركة ديناميكية الكائنات الحية في النمو والاضمحلال وتعد مسألة نمذجة السكان من المسائل الاساسية التي يهتم بها علم البيئة . ولقد كانت البداية الحقيقية لنمذجة السكان في القرن الثامن عشر . ويعد الباحث البريطاني توماس مالثوس واحد من الرواد في هذا المضمار .

مراحل بناء نموذج رياضي لعدد السكان :

المرحلة الاولى : الفرضيات

ان الفرضية التي افترضها توماس مالثوس هي انه خلال فتراتى زمنية صغيرة فان اعداد الولادات والوفيات تتناسب مع كل من حجم المجتمع وطول الفترة الزمنية .

المرحلة الثانية : الصياغة الرياضية

نفرض

$N(t)$: عدد السكان في البلد قيد الدراسة عند الزمن t

$B(t)$: عدد الولادات في ذلك البلد في الزمن t

$D(t)$: عدد الوفيات في ذلك البلد في الزمن t

$\delta(t)$: تمثل فترة زمنية صغيرة

$$B(t) \propto N(t)\,\delta(t)$$

$$D(t) \propto N(t)\,\delta(t)$$

جامعة الموصل
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم بحوث العمليات والتقنيات الذكائية

اذ ان $\propto$: تناسب

$$B(t) = a\,N(t)\,\delta(t)$$

$$D(t) = b\,N(t)\,\delta(t)$$

اذ ان a,b مقداران ثابتان

ان التغير في عدد السكان في فترة زمنية صغيرة $\delta(t)$

$\delta N(t)$: يمثل الفرق بين اعداد الولادات واعداد الوفيات في تلك الفترة

$$\delta N(t) = B(t) - D(t)$$

$$= a\,N(t)\,\delta(t) - b\,N(t)\,\delta(t)$$

$$\delta N(t) = C\,N(t)\,\delta(t)$$

$c=a-b$ كمية ثابتة

اذا نجد ان

$$\delta N(t) / \delta(t) = C\,N(t)$$

وبأخذ غاية الطرفين عندما تقترب $\delta(t)$ من الصفر

فيكون النموذج الرياضي المقترح لعدد السكان في ضوء الفرضية التي افترضها توماس هو

$$\frac{dN(t)}{dt} = cN(t) \quad ،$$

كمية ثابتة

C

جامعة الموصل
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم بحوث العمليات والتقنيات الذكائية

المرحلة الثالثة : الحل الرياضي

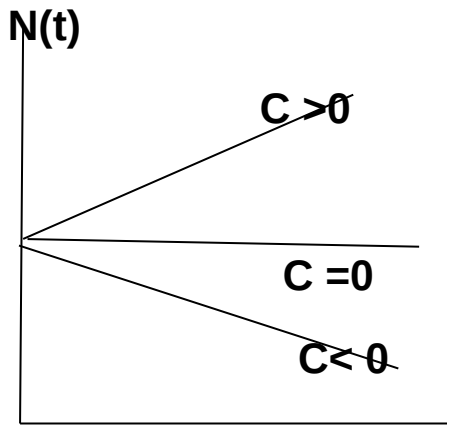
ان النموذج الذي تم الحصول عليه عبارة عن معادلة تفاضلية من المرتبة الاولى ويمكن بيسر حل هذه المعادلة والحصول على نموذج توماس مالثوس وهو

$$N(t) = N(0)e^{ct}$$

المرحلة الرابعة :

تفسير الحل سيقتصر على جانبين هما

١- رسم الحل : الشكل الاتي يوضح حل نموذج توماس مالثوس



وكما واضح من الشكل فأن نموذج
فأن حجم C =0 توماس مالثوس يعطي وصفا معقولا للتغير في حجم السكان فأذا كانت C< 0 المجتمع سيبقى كما هو في مكانه لان نسبة الولادات تساوي نسبة الوفيات ، واذا كان فأن حجم المجتمع سوف يتناقص لان نسبة الولادات ستكون اقل من نسبة الوفيات ، اما اذا كان C >0. فأن حجم المجتمع سيزداد بأضطراد لان نسبة الولادات ستكون اكبر من نسبة الوفيات

جامعة الموصل
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم بحوث العمليات والتقنيات الذكائية

٢- اختبار كفاءة النموذج في التنبوء : ان اختبار كفاءة النموذج في التنبوء يتطلب بيانات واقعية مسجلة حسب تعدادات السكان لكل ١٠ سنوات حيث سيطلق على السنة التي نبدأ بها نمذجة السكان بتسمية سنة الاساس .

المرحلة الخامسة : المصادقة على النموذج
لوحظ ان نموذج توماس مالثوس كفء عند استخدامه للتنبوء على المدى القريب اما على المدى البعيد فهو ضعيف . لذا فهناك خلل في هذا النموذج اذا اريد استخدامه للتنبوء بعدد السكان على المدى البعيد .

س1) بوصف السنة ١٩٤٧ هي سنة الاساس لائم نموذج توماس مالثوس لعدد سكان العراق واختبر دقته في التنبوء بعدد السكان للسنوات ١٩٧٧ و ١٩٨٧ و١٩٩٧

Q1) Using 1947 as the base year, fit Thomas Malthus's model for the population of Iraq and test its accuracy in predicting the population for the years 1977, 1987 and 1997

ملاحظة:
يتم استخراج السنة المستقبلية او الدليل المقابل لها t من العلاقة التالية

$$t = \frac{year - \text{السنة الاساس}}{10}$$

Year= السنة الاساس +10t

س٢) استخرج نسبة النمو الاسي في نموذج توماس اذا كانت سنة الاساس في (1790) N(0)=3.9 مليون نسمة وفي السنة (1800)N(1)=5.3 مليون نسمة

Q2) Extract the exponential growth rate in the Thomas model if the base year was 1790 (N(0) = 3.9 million people) and in (the year 1800 (N(1) = 5.3 million people

جامعة الموصل
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم بحوث العمليات والتقنيات الذكائية