Linear Programming

البرمجة الخطيّة

Introduction,

Linear Programming is a deterministic mathematical technique , which involves the all location of scarce resources (Machinery , Labor, Money, Time, Warehouse Space, and raw material) in an optimal manner, based on a given criterion of optimality frequently, the criterion of optimality is either maximum profit or minimum cost, depending on the type of problem.

A linear programming (LP) model provides an efficient method for determining and optimal decision chosen from a large number of possible decisions. The optimal decision is the one that meets a specified objective of management subject to various restrictions and constraints.

Constructing Linear Programming Models

Requirements to construct a linear programming model :-

1- ***Objective Function :*** *There must be an objective the firm wants to a achieve, maximize profit or minimize cost .*

2- ***Restriction and Decisions:*** *There must be alternative courses of action or decisions, on of which will achieve the objective.*

3- ***Linear objective function and linear constraints .*** *We must be able to express the decision problem incorporating the objective and restrictions on the decisions using only linear* *equation and linear inequalities. That is, We must be able to state the problem as a Linear programming model .*

Requirements of Linear Programming Problems

متطلبات مشاكل البرمجة الخطية:

1- كل المشاكل تبحث عن تعظيم الأرباح أو تقليل التكاليف ويشار إلى ذلك بدالة الهدف Objective Function.

2- في مشاكل البرمجة الخطية هناك قيود Constraints ومحددات Restrictions التي تحد من تحقيق الهدف.

3- يجب أن تكون هناك بدائل يتم الاختيار منها Alternatives فإذا لم تكن هناك بدائل فعند ذلك لا تكون هناك حاجة لاستخدام البرمجة الخطية.

4- دالة الهدف Objective Function وكافة القيود Constraints في مشاكل البرمجة يجب التعبير عنها بمعادلات خطية أو متباينات.

Basic Assumptions of Linear Programming,

افتراضات أساسية في البرمجة الخطيّة:

1- **التناسبية Proportionally:** سواء كان ذلك لدالة الهدف أو القيود، معنى ذلك إذا كان إنتاج الوحدة يتطلب 2 ساعة عمل فإن إنتاج 10 وحدات يتطلب 20 ساعة عمل .

2- **الإضافية Additivity:** معنى ذلك إذا كان الربح المتحقق للمنتج الأول يساوي 10 دينار، وللمنتج الثاني 15 دينار، وتمّ إنتاج وحدة واحدة من المنتج الأول، ووحدة واحدة من المنتج الثاني، فإن مجموع الأرباح سيكون $10 + 15 = 25$ دينار.

3- **قابلية القسمة Divisibility:** معنى ذلك أن الحل ليس بالضرورة أن يكون أعداد صحيحة أي يمكن أن يكون كسرا.

4- **عدم السلبية None Negative:** أي أن قيم جميع المتغيرات في الحل يجب أن تكون موجبة.

5- يجب أن تكون جميع المعلومات التي تعتمد عليها البرمجة الخطية (LP) مؤكدة (Certainty) ولا تتغير خلال فترة الدراسة سواء كان ذلك لدالة الهدف Objective Function أو القيود Constraints .

Graphical Method (Graphical Solution)

الطريقة البيانيّة (الحل البياني):

It is usually not possible to solve linear programming problems Graphically, If the problem involving more than two decision variables. The graphical Solution Procedure Required to develop a graph that displays the possible solutions, X_1 and X_2 Values, Where the Values of X_1 on the horizontal axis and values of X_2 on the vertical axis. Any point on the graph can be identified by X_1 and X_2 Values, So that every point on graph called a solution.

The point $X_1 = 0$ and $X_2 = 0$ referred to the origin solution (initial solution) . The solution we must consider is that point where the value of X_1 and $X_2 \geq 0$.

من غير الممكن حل مشاكل البرمجة الخطية بيانيا عندما يكون عدد المتغيرات (متغيرات القرار) Decision Variables أكثر من اثنان ، حيث يمثل المحور الأفقي Horizontal Axis قيم المتغير X_1 والمحور الرأسي Vertical Axis قيم متغير القرار X_2 ، ويمكن تحديد قيم X_1 و X_2 عند أية نقطة ، والنقطة التي يكون فيها قيمة X_1 و X_2 تساوي الصفر تشير إلى نقطة الأصل (أي الحل الأولي) Initial Solution ، كما يجب الانتباه إلى أن قيم X_1 و X_2 يجب أن تكون أكبر من أو مساوية إلى الصفر $\geq$ (شرط عدم السلبية) .

Example,

D and A company manufactures two products, each requiring a different manufacturing technique. The deluxe product requires 3 hours of labor, 1 hour of testing, and Yields a profit of 10 Dinars. The standard product requires 2 hours of labor, 2 hours of testing *and Yield profit 15 Dinars . There are 15,000 hours of Labor and 10,000 hours of testing available each year. A marketing forecast has shown that the yearly demand for the deluxe model to be no more than 7,000 , and yearly demand for the Standard Model to be no more that 8,000 Units.*

Management want to know the number of each model to produce yearly that will maximize total profit.

b this as a linear programming problem, and solve the problem by using the graphical method.

Solution :-

Assume:

$$\left.\begin{array}{lll} X_1 & = & \text{number of deluxe units} \\ X_2 & = & \text{number of standard units} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Decision} \\ \text{Variables} \end{array}$$

Graphical Method

Objective Function :

Maximize $Z = 10X_1 + 15X_2$

Constraints:

$$\begin{array}{rcll} 3X_1 + 2X_2 & \leq & 15{,}000 & (\text{ Labor hours }) \\ X_1 + 2X_2 & \leq & 10{,}000 & (\text{ Testing hours }) \\ X_1 & \leq & 7{,}000 & (\text{ Delux Units Demand }) \\ X_2 & \leq & 8{,}000 & (\text{ Standard Units Demand }) \\ X_1 \ , \ X_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

بعد صياغة المشكلة يمكن توضيح ذلك بيانيا كما يلي :-

1- نقوم برسم كل معادلات القيود (Constraint Equations) .

2- ومن ثم تحديد منطقة الحل الممكن (Feasible Solution Region) وهي المساحة التي تفي بكافة القيود معا.

3- تحديد كل زاوية أو النقاط المتطرفة لمنطقة الحل .

4- القيام بحساب الأرباح أو التكاليف لكل نقطة من النقاط وذلك بالتعويض في دالة الهدف.

5- تحديد الحل الأمثل (Optimal Solution) عن طريق اختيار النقطة التي تعطي أعلى ربح ممكن أو أقل كلفة ممكنة .

ولغرض القيام بعملية رسم معادلات القيود يتطلب إيجاد قيمة X_1 و X_2 لكل قيد من قيود المشكلة وذلك بافتراض قيمة أحد المتغير مساوية للصفر لإيجاد قيمة المتغير الثاني وبالعكس. علماً بأن المتباينات Inequalities في الطريقة البيانية Graphical Method تعامل كمعادلات:

ولإيجاد قيمة X_1 و X_2 للقيد الأول :

$$3X_1 + 2X_2 \leq 15000 \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} \quad (1)$$

لإيجاد قيمة X_1 نفترض أن قيمة $X_2 = 0$.

$$3X_1 + 2 \times 0 = 15000$$

$$3X_1 = 15000$$

$$X_1 = 15000/3 = 5000$$

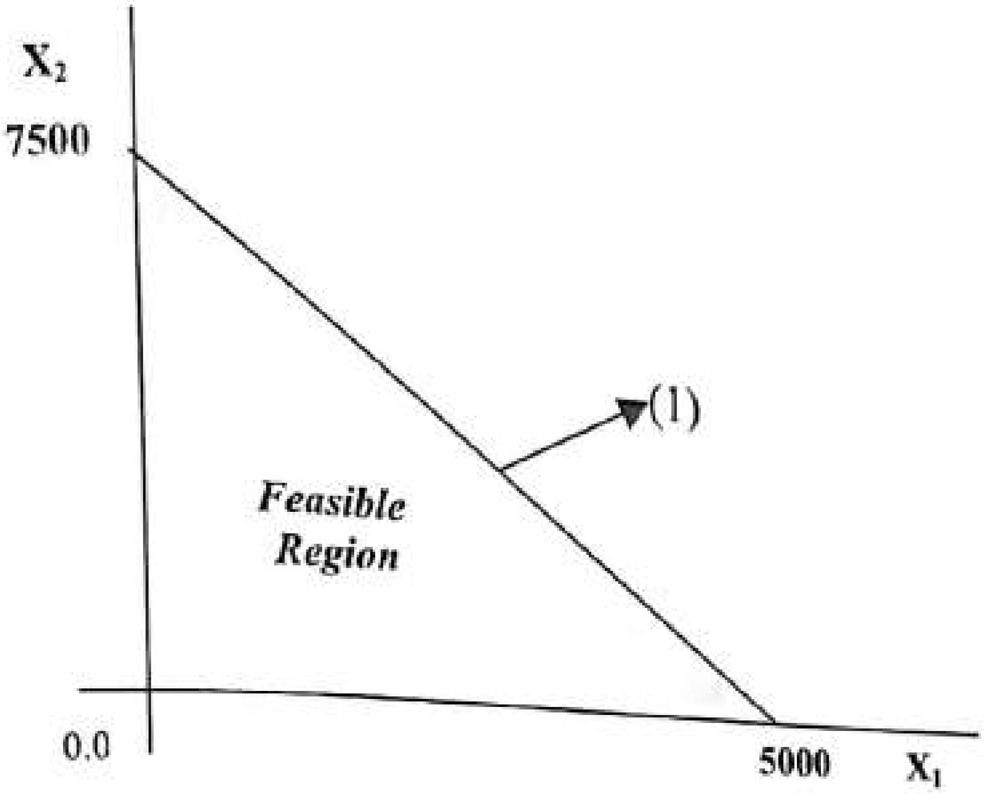
لإيجاد قيمة X_2 نفترض أن قيمة $X_1 = 0$.

$$3 \times 0 + 2X_2 = 15000$$

$$X_2 = 7500$$

يتم بعد ذلك رسم قيد المتباينة رقم واحد (1) Constraint حيث نصل بين النقطة 5000 على المحور الأفقي X_1 والنقطة 7500 على المحور الرأسي X_2 ، ولأن القيد

الأول أقل أو يساوي فإن اتجاه منقطة الحل Feasible Solution سيكون باتجاه نقطة الأصل .



شكل رقم (1)

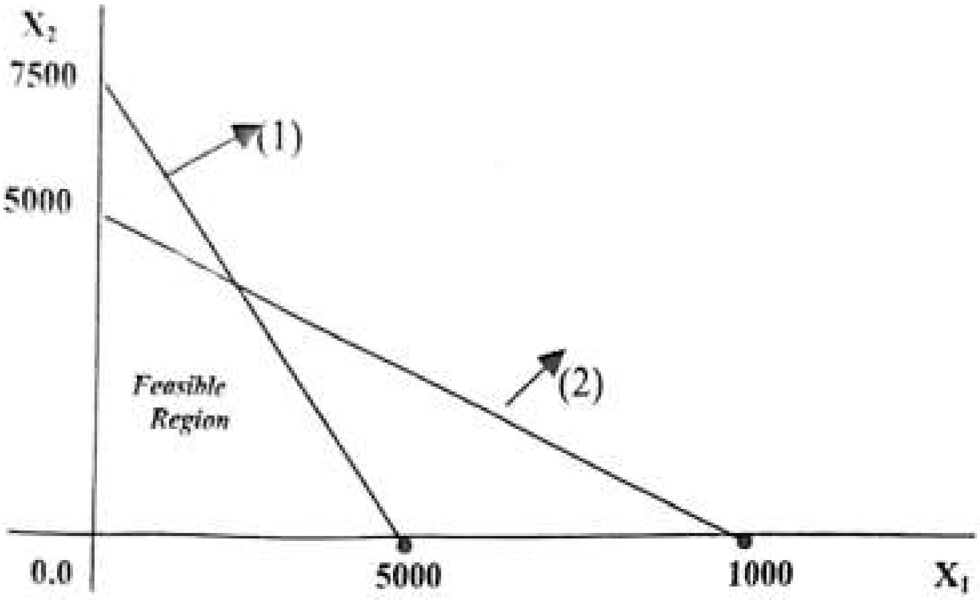
وبنفس الطريقة يتم إيجاد قيمة X_1 و X_2 للقيد الثاني

$$X_1 + 2X_2 \leq 10000 \quad —— \quad (2)$$

$$X_1 = 10000$$

$$X_2 = 5000$$

ثم بعد ذلك يتم رسم القيد الثاني وذلك برسم مستقيم يصل بين النقطة 10000 على المحور الأفقي X_1 والنقطة 5000 على المحور الرأسي X_2 ، وكما موضح في الشكل:



شكل رقم (2)

نقطة الأصل حيث سيتم اقتطاع جزء من منطقة الحل في الشكل رقم **(1)** وكما مبين أعلاه في الشكل رقم **(2)** .

أما فيما يتعلق بالقيد الثالث :

$$X_1 \leq 7000 \quad \text{———} (3)$$

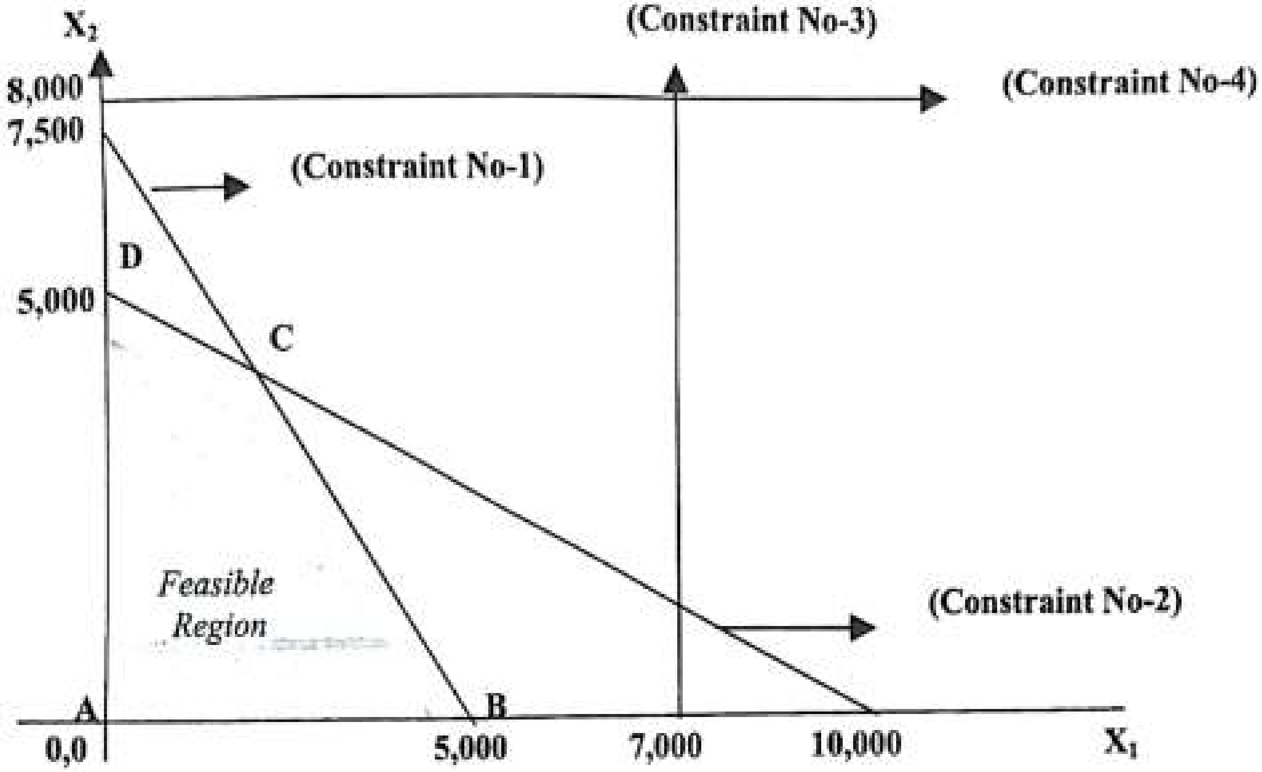
$$X_1 = 7000$$

في هذه الحالة يتم رسم مستقيم القيد الثالث عمودياً على المحور الأفقي X_1 ، ولما كان القيد الثالث أيضا أقل من أو يساوي $\leq$ لذلك ستكون منطقة الحل باتجاه نقطة الأصل، وكما يلاحظ في الشكل أدناه رقم (3) أن هذا القيد لا يقطع أي جزء من منطقة الحل المبين في الشكل رقم (2) وبذلك لا يكون له أي تأثير على منطقة الحل وبالمثل للقيد الرابع :

$$X_2 \leq 8000 \quad \text{———} (4)$$

$$X_2 = 8000$$

حيث يتم رسم مستقيم القيد الرابع عمودياً على المحور الرأسي X_2 عند النقطة 8000 ولما كان القيد أقل من أو يساوي فإن الحل سيكون باتجاه نقطة الأصل (0.0) وهو لا يقتطع أي جزء من منطقة الحل في المبين في الشكل رقم (2)، وبالتالي فليس له أي تأثير على منطقة الحل وكما موضح في الشكل رقم (3) أدناه :-



شكل رقم (3)

وبعد أن تم رسم جميع معادلات القيود نقوم الآن بتحديد منطقة الحل الممكن Feasible Region وبالنظر لكون كل القيود كانت أقل من أو يساوي or equal to Less than فإن منطقة الحل ستكون في اتجاه نقطة الأصل وهي المساحة التي لا يمر خلالها أي مستقيم من مستقيمات القيود وبذلك ستكون المنطقة المحددة بالنقاط A, B, C, and D.

يتم بعد ذلك بإيجاد قيمة X_1 و X_2 عند كل نقطة من نقاط الحل الممكن وكما يلي :-

Points	X_1	X_2
A	0	0
B	5000	0
C	2500	3750
D	0	5000

حيث تم إيجاد قيمة النقطة C إما برسم عمود من النقطة C على المحور الأفقي وآخر على المحور الرأسي ، وكذلك يمكن إيجادها جبريا عن طريق حل المعادلتين التي كونت النقطة C وهي المعادلة رقم (1) والمعادلة رقم (2) وكما يلي :-

$$3X_1 + \cancel{2X_2} = 15,000 \quad \text{----------- (1)}$$

$$(-1) \times \_\_\_ \quad X_1 + \cancel{2X_2} = 10,000 \quad \text{-----------(2)}$$

$$2X_1 = 5,000$$

$$X_1 = 5000/2 = 2,500$$

وبالتعويض عن قيمة X_1 في أي من المعادلتين ولتكن المعادلة (1) نحصل على ما يلي :-

$$3 \times 2,500 + 2X_2 = 15,000$$

$$2X_2 = 15,000 - 7,500$$

$$2X_2 = 7,500$$

$$X_2 = 7,500/2 = 3,750$$

يتم بعد ذلك حساب الأرباح لكل نقطة من نقاط الحل الممكن وذلك بالتعويض في دالة الهدف.

$$Z = 10X_1 + 15X_2$$

عند النقطة A	Z	=	10×0	$+ \; 15 \times 0$	=	0
عند النقطة B	Z	=	$10 \times 5{,}000$	$+ \; 15 \times 0$	=	50,000
عند النقطة C	Z	=	$10 \times 2{,}500$	$+ \; 15 \times 3{,}750$	=	81,250
عند النقطة D	Z	=	10×0	$+ \; 15 \times 5{,}000$	=	75,000

يتضح من أعلاه أن النقطة C هي التي تحقق أكبر عائد ممكن ومقداره 81,250 دينار وذلك بإنتاج 2,500 وحدة من X_1 و 3,750 وحدة من X_2 .

كما أسلفنا سابقا فإن مشاكل البرمجة الخطية هي إما تعظيم الأرباح أو تقليل التكاليف ، والمثال التالي يتعلق بتقليل التكاليف .

Example,

The dean of the college of Business Administration must plan the school's course offering for the fall semester. Student demands make it necessary to offer at least 30 undergraduate and 20 graduate courses in the term. Faculty Contracts also dictate that at least 60 courses be offered in total. Each undergraduate course taught cost the college an average of 2,500 Dinars, in Faculty Wages, and each graduate course cost 3,000 Dinars.

a-Formulate this as a linear programming problem .

b-How many undergraduate and graduate courses should be taught in the fall so that total

faculty salaries are kept to a minimum? by using graphical method.

Solution:-

Assume:

X_1 = *number of undergraduate courses.*

X_2 = *number of graduate courses.*

Objective Function :

Minimization $\boldsymbol{Z = 2500X_1 + 3000X_2}$

Constraints:

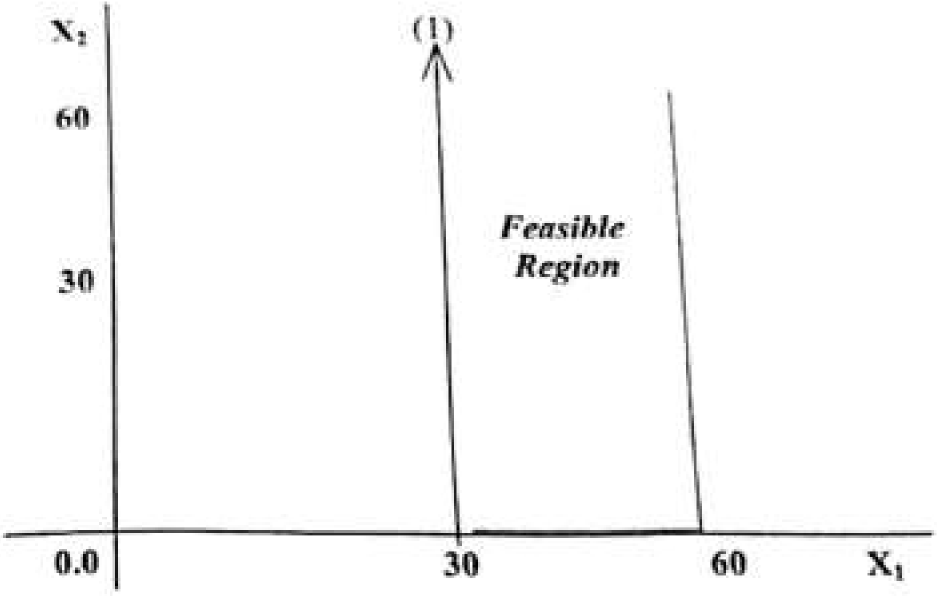
$$X_1 \geq 30 \quad \text{..........} (1)$$

$$X_2 \geq 20 \quad \text{..........} (2)$$

$$X_1 + X_2 \geq 60 \quad \text{..........} (3)$$

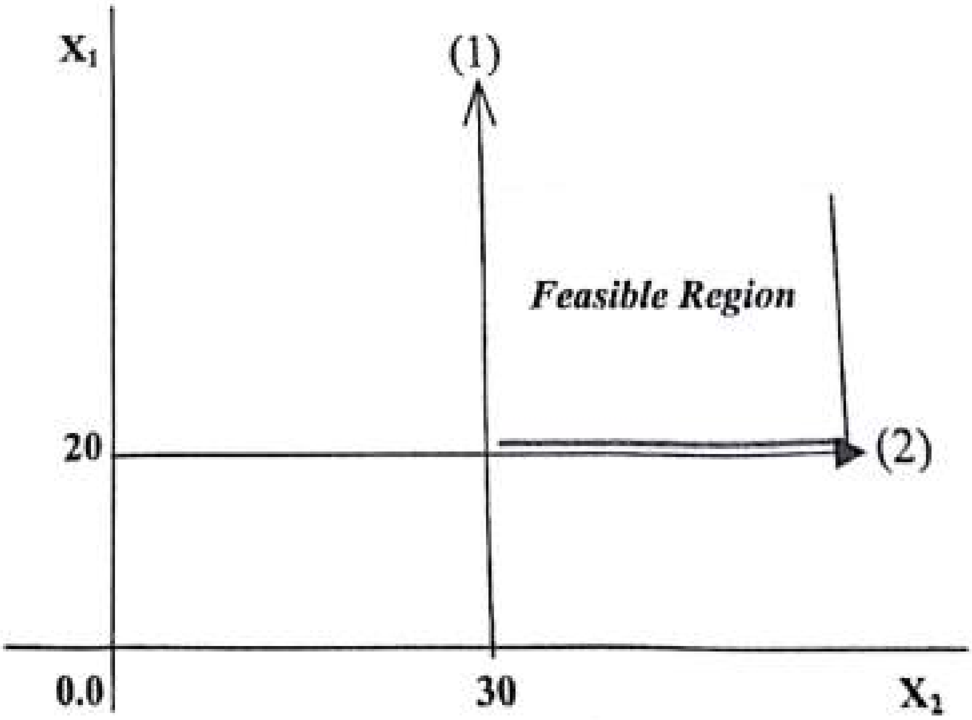
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

كما أسلفنا سابقا فإن الحل باستخدام الطريقة البيانية Graphical Method يفترض أن المتباينات هي معادلات وبالتالي فإن قيمة X_1 للمتباينة رقم (1) يساوي 30 ، وبالتالي يرسم المستقيم الذي يمثل المتباينة رقم (1) عمودياً على المحور الأفقي X_1 وكما موضح بالشكل التالي، وحيث أن المتباينة من نوع أكبر من أو يساوي $\geq$ فإن منطقة الحل ستكون باتجاه اليمين أي بعكس اتجاه منطقة الأصل .



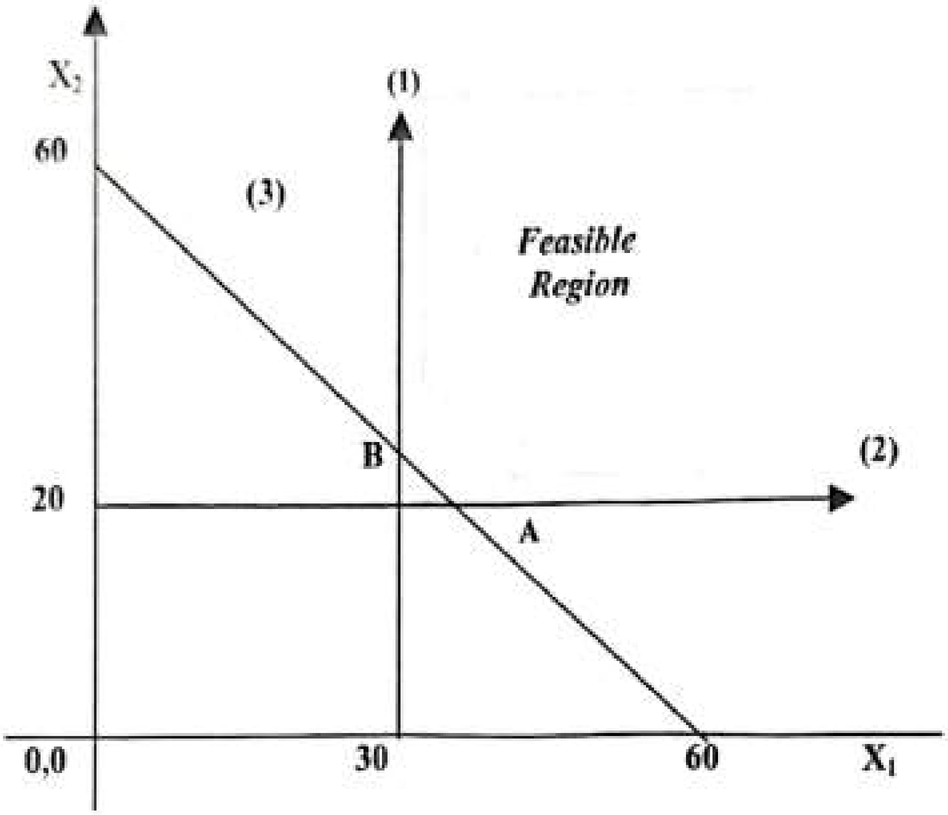
شكل رقم (4)

ولرسم مستقيم القيد الثاني $X_2 \geq 20$ حيث ان فيمه $X_2 = 20$ ، وبالتالي سوف يتم رسم هذا القيد عمودياً على المحور الرأسي عند النقطة 20 وبذلك ستكون منطقة الحل في الجهة العليا من القيد، وكما موضح في الشكل رقم (5) التالي:



شكل رقم (5)

ولرسم مستقيم القيد الثالث $X_1 + X_2 \geq 60$ حيث ستكون قيمة $X_1 = 60$ ، $X_2 = 60$ ، وذلك برسم مستقيم يصل بين النقطتين وكما موضح في الشكل رقم (6) التالي، ولكون القيد أكبر من أو يساوي ≤ فإن منطقة الحل ستكون إلى الجهة اليمنى من القيد وكما موضح في الشكل رقم (6) التالي:-



شكل رقم (6)

وبعد ذلك يتم إيجاد قيمة X_1 و X_2 عند كل نقطة من نقاط الحل والمتمثلة بالنقطة A و B .

بما أن قيمة X_2 عند النقطة A تساوي 20 (من المعادلة رقم 2) وهذه المعادلة متقاطعة مع المعادلة (رقم 3) عند النقطة (A) , وبالتعويض عن قيمة X_2 في المعادلة رقم (3) نحصل على الآتي :-

$$X_1 + X_2 = 60 \qquad \text{..........}(3)$$

$$X_1 + 20 = 60$$

$$X_1 = 40$$

وبنفس الطريقة بالنسبة للنقطة B حيث أن قيمة X_1 تساوي 30 من المعادلة رقم (1) وحيث أن المعادلـة رقم (1) تتقاطع مـع المعادلـة رقـم (3) عند النقطة B وبالتعويض عن قيمة X_1 في المعادلة رقم (3) نحصل على قيمة X_2 وكما يلي:-

$$30 + X_2 = 60$$

$$X_2 = 30$$

Point	X_1	X_2
A	40	20
B	30	30

وبالتعويض عن قيمة X_1 و X_2 في كل نقطة من نقاط الحل في معادلة دالة الهدف وكما يلي :-

$$A \rightarrow \quad Z = 2{,}500 \times 40 + 3{,}000 \times 20 = 160{,}000$$

$$B \rightarrow \quad Z = 2{,}500 \times 30 + 3{,}000 \times 30 = 165{,}000$$

يتضح أن النقطة A هي الأقل كلفة وبالتالي على الكلية أن تعرض 40 مادة للدراسات الأولية و 20 مادة للدراسات العليا ويكون إجمالي التكاليف 160,000 دينار.