# نظم الهندسة والبديهيات

كلية التربية للعلوم الصرفة

قسم الرياضيات

المرحلة الثانية

نظم الهندسة والبديهيات

مدرس المادة : م. م طارق حمد عبدالله

# الفصل الأول

## الأنظمة البديهية ( Axiomatic System)

يتكون النظام البديهي من:

١- تعاريف
٢- مجموعة البديهيات
٣- مبرهنات

**1-ألتعاريف** : إن أي تعريف جيد لاي كلمة في الرياضيات يجب ان يتصف بالصفات التاليه :

أ- ان يعبر عنه ببساطة
ب- ان يكون غير دوري
ت- يصف بطريقة وحيدة الكلمة المراد تعريفها

فالبساطة تعني ان نعبر عن الكلمة المراد تعريفها بكلمات ابسط منها اي بكلمات معروفة فقد عرف اقليدس النقطة بانها ليست لها بعد والمستقيم له طول فقط وليس له عرض او سمك فالطول والعرض والسمك اصعب من الكلمة المراد تعريفها لذلك لا يمكن قبول من هذه التعاريف .

ويقصد بالدورية عند تعريف كلمة ما فأننا سنمر بسلسلة من التعاريف التي قد تنتهي بنفس الكلمة فمثلا اذا عرفنا المستقيم بانه مجموعة من نقاط ونعرف النقطة بانها تقاطع مستقيمين فان هذه العملية تكون دورية.

ويقصد بالوصف الوحيد ان التعريف الدقيق لكلمة ما يجب ان يصف هذه الكلمة بطريقة بحيث لا ينطبق هذا الوصف على كلمة اخرى فمثلا اذا عرفنا قلم الرصاص بانه اداة تستعمل للكتابة فان هذا التعريف يصف ايضا قلم الحبر وقلم الجاف لذلك لا يمكن قبول مثل هذه التعاريف .

لكي نتجنب هذه المشكلة نختار بعض الكلمات بدون تعريف لتكون كلمات اولية او كلمات غير معروفة (Undefined terms) وبدلالتها تعرف بقية الكلمات او المصطلحات في النظام

**تصنف الكلمات الاولية الى نوعين :**

أ- **الكلمات التـقـنـي : (Technical Terns)**

تختلف هذه الكلمات من موضوع الى موضوع اخر ففي الهندسة بصورة خاصة كمثال (النقطة والمستقيم ، والتطابق ....) ربما تعتبر هذه الكلمات اولية في النظام المعطى ومن المحتمل في انظمة اخرى في الهندسة تختار كلمات اولية اخرى وكل مصطلح جديد يجب ان يعرف اما باستعمال الكلمات الاولية او المصطلحات التي عرفت بدلالتها. لذلك يجب ان توضع قائمة لكلمات اولية في بداية كل نظام .

ب- **الكلمات المنطقية (Logical terms)**

مثل كل و لأي ، بعض ،يوجد .... حيث يوجد عدد غير محدد من الكلمات المنطقية .

**2- البديهيــات (Axioms):**

هي العبارات الاساسية التي نتقبلها بدون برهان وهي الحجر الاساس للبناء في النظام البديهي .

**3-المبـرهنــات (Theorem):**

هي النتيجة التي نحصل عليها من بديهيات النظام او من عبارات في هذا النظام .

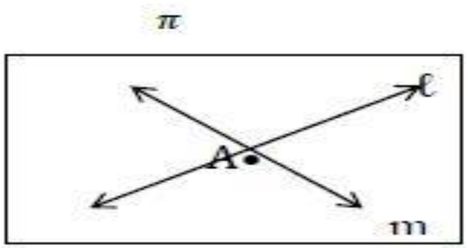
## المستــوى الاســقاطــي (Projective Plane)

سنكون مستويا اسقاطيا كمثال على نظام بديهي

يتكون المستوى الاسقاطي $\pi$ من مجموعة كلمات اولية تقنية [تدعى نقاط ونرمز لها بالحروف الكبيرة A,B,C... ومستقيمات ونرمز لها بحروف صغيره مثل m , ℓ ..... ] ومجموعة بديهيات وهي كما يلي :

١. أي نقطتين مختلفتين في $\pi$ يحتويهما مستقيم واحد فقط .
٢. كل مستقيم يحتوي على ثلاث نقاط في الاقل .
٣. يوجد في الاقل نقطة واحدة مثل A ويوجد في الاقل خط واحد مثل ℓ بحيث ان $A \notin \ell$
٤. أي مستقيمين يشتركان في نقطة واحدة على الاقل

**مبرهنة ( 1 )** : أي مستقيمين مختلفيـن فــي المســتوى الاسـقاطــي يشتركـان في نقطة واحدة فقط




**البرهان :**

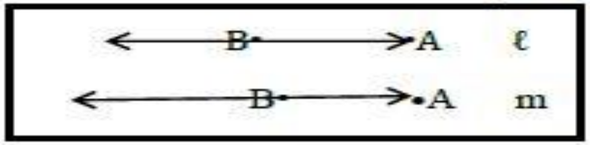
**المعطى:**- ليكن m ، ℓ مستقيمين مختلفين في $\pi$

**المطلوب اثباته:**- يشتركـان في نقطة واحدة فقط

من المعطى ليكن m ، ℓ مستقيمين مختلفين في $\pi$ هذا يعني $\ell \neq m$

من البديهية (4) [ **أي مستقيمين يشتركان في نقطة واحدة على الاقل**]

$\therefore \exists A \in \pi$ بحيث ان $A \in m$ ، $A \in \ell$




سنفرض انه توجد نقطة اخرى B تختلف عن A

بحيث ان $B \in \ell$ , $B \in m$

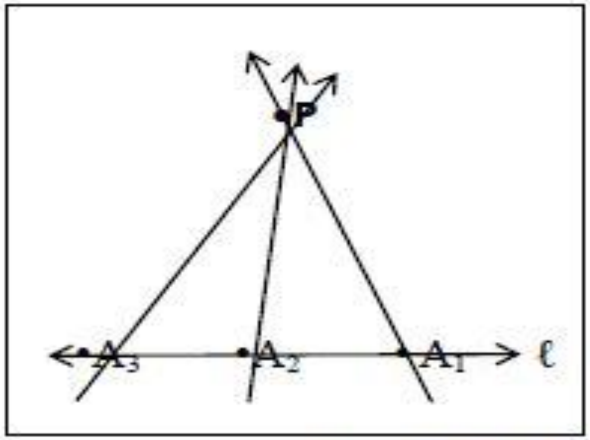
من البديهية ( 1 )[ **أي نقطتين مختلفتين في $\pi$ يحتويهما مستقيم واحد فقط** ]

سوف نستنتج $\ell = m$ وهذا يتناقض مع الفرض ( لكون $\ell \neq m$ )

∴ ℓ ، m يشتركان في نقطة واحدة فقط .

مبرهنة ( 2 ) : أي نقطة في المستوى الاسقاطي هي عنصر لثلاثة خطوط في الاقل الاقل .

$\pi$




البرهان :

المعطى:- ليكن P نقطه في $\pi$

المطلوب اثباته:- يوجد في الاقل ثلاث مستقيمات(خطوط)

يمرون في النقطه P

من المعطى لتكن P نقطه في المستوي الاسقاطي $\pi$ .

من البديهية ( 3 ) **[توجد في الاقل نقطة واحدة ويوجد في الاقل خط واحد بحيث ان النقطه لا تنتمي الى المستقيم ]**

⇐ يوجد مستقيم مثل ℓ بحيث ان $P \notin \ell$

كذلك من البديهية ( 2 )[ **كل مستقيم يحتوي على ثلاث نقاط في الاقل** ]

⇐ توجد ثلاثة نقاط في الاقل على المستقيم ℓ ولتكن $A_1, A_2, A_3$

من البديهية ( 1 )[ **أي نقطتين مختلفتين في $\pi$ يحتويهما مستقيم واحد فقط** ]

⇐ اذن نستنتج من بديهيه (1) توجد ثلاث مستقيمات في الاقل وهي $PA_1, PA_2, PA_3$ التي تمر من P وتكون مختلفة.

وهو المطلوب

## ملاحظه :

**من مبرهنة (1) ان أي مستقيمين في المستوى الاسقاطي يتقاطعان في نقطة واحدة فقط . بتعبير اخر لا يمكن ان تتكلم عن المستقيمات المتوازيـــة او المسـقيـمات التي لا تتقاطع لهذا لا يمكن ان تكون هذه المستقيمات في المستــوى الاسقاطي .**

## المستوى الاسقاطى المنتهى:

هو نفسه المستوي الاسقاطي ولكن يحتوي مجموعة منتهية ( من النقاط والمستقيمات) ويحقق نفس بديهيات المستوي الاسقاطي من (1) – (4) وهي

١- أي نقطتين مختلفتين في $\pi$ يحتويهما مستقيم واحد فقط .

٢- كل مستقيم يحتوي على ثلاث نقاط في الاقل .

٣- يوجد في الاقل نقطة واحدة مثل $A$ ويوجد في الاقل خط واحد مثل $\ell$ بحيث ان $A \notin \ell$

٤- أي مستقيمين يشتركان في نقطة واحدة على الاقل.

## مبرهنـــة (3):

اذا وجدت بالضبط n من النقاط على مســتقيم لمســتوى اسقاطي منتهي فأن المستوى يحتوي بالضبط على $n^2 - n+1$ من النقاط .

## نتيجة مبرهنه (3) :

اذا كان في المستوى الاسقاطي مستقيم يحتوي بالضبط على n من النقاط فأن أي مستقيم اخر في نفس المستوي يحتوي بالضبط على n من النقاط ايضاً .

## ملاحظه:

١- تقدم (مبرهنه 3) قانون لحساب عدد نقاط المستوي الاسقاطي المنتهي $\pi$ وهو ان المستوى الاسقاطي المنتهي يحتوي بالضبط على $n^2 - n+1$ من النقاط . حيث n يمثل عدد نقاط المستقيم في المستوي الاسقاطي المنتهي .

٢- اما( نتيجه مبرهنه 3) تقدم قانون لحساب اي مستقيم في مستوي اسقاطي منتهي يحتوي n من النقاط فأن أي مستقيم اخر في نفس المستوي الاسقاطي يحتوي ايضا n من النقاط

## تمارين (١-١)

**س١**: أذا كان مستقيم في المستوى الاسقاطي المنتهي يحتوي على (4) نقاط فكم نقطة يحتوي هذا المستوى ؟

**الجواب :**

من مبرهنه ( 3 ) [**اذا وجدت بالضبط n من النقاط على مستقيم لمستوى اسقاطي منتهي فأن المستوى يحتوي بالضبط على $n^2 - n+1$ من النقاط**].

⇐ نستنتج من (مبرهنه ٣ ) انه يوجد $n^2 - n+1$ من النقاط في المستوي الاسقاطي

$$\Rightarrow n^2 - n+1=(4)^2 - 4+1=16 - 4+1=13$$

اذن المستوي الاسقاطي في هذا السؤال يحتوي على 13 نقطه .

**س٢**: اذا كان المستوى الاسقاطي المنتهي يحتوي على (7) نقاط فكم عدد النقاط على كل خط في هذا المستوى ؟

**الجواب :**

من مبرهنه(3) [ **اذا وجدت بالضبط n من النقاط على مستقيم لمستوى اسقاطي منتهي فأن المستوى يحتوي بالضبط على $n^2 - n+1$ من النقاط**].

⇐ نستنتج من (مبرهنه ٣ ) انه يوجد $n^2 - n+1$ من النقاط في المستوي الاسقاطي

$$\Rightarrow \quad n^2 - n+1= 7$$

$$\Rightarrow n^2 - n+1 -7=0$$

$$\Rightarrow n^2 - n - 6=0 \qquad \Rightarrow \quad (n-3).(n+2)=0$$

$$\Rightarrow \quad n-3=0 \quad \Rightarrow n=3 \qquad \text{or} \qquad (n+2)=0 \quad \Rightarrow n=-2$$

**س٣ :** اذا كان $\ell$ في المستوى الاسقاطي يحتوي على (6) نقاط فكم نقطة يحتوي المستقيم m الواقع في هذا المستوى .

**ألجواب:**

حسب نتيجه ٣ [اذا كان في المستوى الاسقاطي مستقيم يحتوي بالضبط على n من النقاط فأن أي مستقيم اخر يحتوي بالضبط على n من النقاط ]

⇐ نستنتج من نتيجة مبرهنه ٣ ان المستقيم m يحتوي ايضا على نفس عدد نقاط المستقيم $\ell$ وهي 6 نقاط .

## المستوى التآلفي (Affine Plane)

يتكون المستوى التآلفي $\alpha$ من مجموعة من الكلمات اولية تقنية [تدعى نقاط ونرمز لها بالحروف الكبيرة ..A,B,C ومستقيمات ونرمز لها بحروف صغيره مثل m , $\ell$ .....]

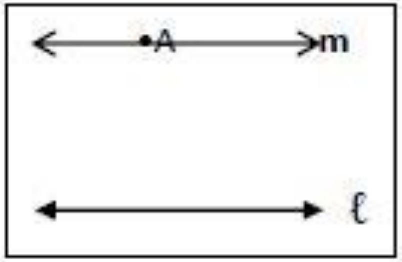
وتحقق نفس بديهيات المستوى الاسقاطي (1) و(2) و(3)

**امـــا البديهـية (4): فهي اذا كان $\ell$ مستقيما و A نقطة بحيث $A \notin \ell$ فانه يوجد مستقيم واحد فقط m يحتوي A بحيث ان $\ell \cap m = \emptyset$ .**

**تعريف :** ( توازي المستقيمين )

يقال لمستقيمين مختلفين انهما متوازيان اذا كان $\ell \cap m = \emptyset$

$\alpha$




◇من تعريف التوازي يمكن ان نعيد نص بديهية (4) بالشكل التالي :

**بديهيه (4): اذا كان $\ell$ مستقيما و $A$ نقطة بحيث ان $A \notin \ell$ فأنه يوجد مستقيم واحد فقط مثل $m$ يمر من $A$ ويوازي $\ell$.**

**من اعلاه نجد ان بديهيات المستوى التالفي هي :**

١- أي نقطتين مختلفتين في $\alpha$ يحتويهما مستقيم واحد فقط .

٢- كل مستقيم في $\alpha$ يحتوي على ثلاث نقاط في الاقل .

٣- يوجد في الاقل نقطة واحدة مثل $A$ ويوجد في الاقل خط واحد مثل $\ell$ بحيث ان $A \notin \ell$

٤- اذا كان $\ell$ مستقيما و $A$ نقطة بحيث ان $A \notin \ell$ فأنه يوجد مستقيم واحد فقط مثل $m$ يمر من $A$ ويوازي $\ell$.

**مبرهنة (4):** أي مستقيمين مختلفين في مستوى تآلفي يشتركان في نقطة واحدة على الأكثر .

**البــرهـان :-**

ليكن $\ell$ ، $m$ مستقيمين مختلفين في المستوي التآلفي $\alpha$ أي ان $\ell \neq m$

المطلوب اثباته ان المستقيمين $\ell$ ، $m$ يشتركان في نقطه واحده على الاكثر

لو فرضنا ان المستقيمان $\ell$ و $m$ يشتركان في نقطتين في الاقل ولتكن $Q,P$ .

البديهية (1) [أي نقطتين مختلفتين يحتويهما مستقيم واحد فقط ]

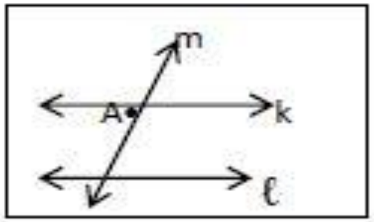
ينتج من هذا بأن $\ell = m$ وهذا تناقض ( لكون $\ell$ ، $m$ مستقيمين مختلفين)

∴ اي مستقيمين في مستوى تآلفي يشتركان في نقطة واحدة علــى الاكثــر

أي ان أي مستقيمين اما يكونا متوازيين او يتقاطعان في نقطة واحدة فقط.

**مبـرهنـــة (5) :** في المستوى التآلفي اذا قطع مستقيم احد مستقيمين متوازيين فأنه يجب ان يقطع الاخر .

**البـــرهــان :-**




ليكن $\ell$ ، $k$ مستقيمين متوازيين في المستوى التآلفي $\alpha$

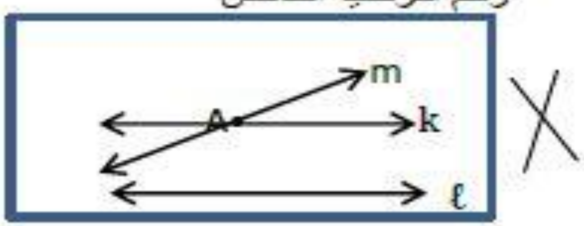
وان $m$ مستقيم اخر يقطع $k$ في نقطة مثل $A$ .

يجب ان نبرهن ان المستقيم $m$ يقطع $\ell$

لوفرضنا ان المستقيم $m$ يوازي $\ell$ فأنه من $A$ سيكون هنالك المستقيمان $m, k$

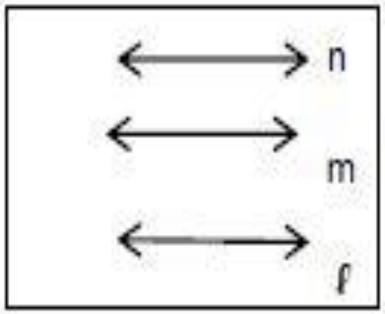
يوازيان $\ell$ وهذا يخالف البديهية (4) [ **اذا كان $\ell$ مستقيما و $A$ نقطة بحيث ان $A \notin \ell$ فأنه يوجد مستقيم واحد فقط مثل $m$ يمر من $A$ ويوازي $\ell$ بحيث ان $\ell \cap m = \emptyset$** ] لذلك المستقيم $m$ لا يمكن ان يوازي $\ell$ وبهذا يكون $m$ يقطع $\ell$

رسم الفرضيه التناقض



**مبـــرهــنة (6) :** في المستوى التآلفي المستقيمان الموازيان للمستقيم نفسه متوازيان .

**البـــرهــان :-**

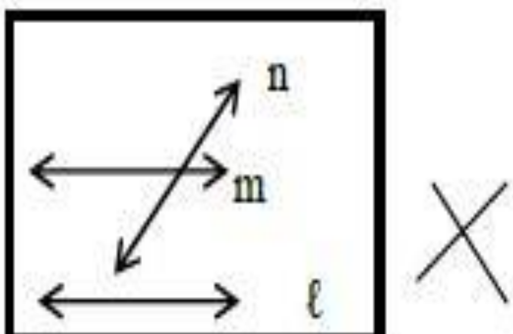



ليكن $\ell // n$ ، $\ell // m$

**يجب ان نبرهن بأن** $m // n$

سنفرض ان $n$ لا يوازي $m$ أذن $n$ يقطع $m$

رسم الفرضيه




**من المبرهنة (5)** نستنتج ان $n$ قطع $\ell$ (وهذا يتناقض مع المعطى كون $\ell // n$)

أذن يجب ان يكون $m // n$

## المستوي التآلفي المنتهي:

هو نفسه المستوي التالفي ولكن يحتوي على مجموعة منتهية (من النقاط والمستقيمات) تحقق نفس بديهيات المستوي التالفي من (1) – (4) .

## مبـــرهـــنة (7):

في المستوي التالفي اذا وجد مستقيم يحتوي بالضبط على n من النقاط فأن أي مستقيم يوازي ℓ يحتوي بالضبط على n من النقاط أيضاً .

س1/ اذا كان ℓ و m مستقيمان متوازيان في المستوى التآلفي المنتهي وكان المستقيم ℓ يحتوي بالضبط (10) نقاط فكم نقطة يحتوي المستقيم m.

**الجواب:**

من (مبرهنه 7) [ في المستوي التالفي اذا وجد مستقيم مثل ℓ يحتوي بالضبط على n من النقاط فأن أي مستقيم يوازي ℓ يحتوي بالضبط على n من النقاط ايضاً ].وبما ان المستقيم m يوازي المستقيم ℓ نستنتج من (مبرهنه 7) أن المستقيم m يحتوي بالضبط على 10 نقاط أيضاً

س2/ اذا كان k مستقيم في المستوى التآلفي المنتهي يحتوي بالضبط على (14) نقطة فكم نقطه يحتويها أي مستقيم يوازي k.

**الجواب:**

من (مبرهنه 7) [ في المستوي التالفي اذا وجد مستقيم مثل ℓ يحتوي بالضبط على n من النقاط فأن أي مستقيم يوازي ℓ يحتوي بالضبط على n من النقاط ايضاً ].

⇐ أذن نستنتج من (مبرهنه 7) أن أي مستقيم يوازي k يحتوي ايضاً على 14 نقطه بالضبط

**مبرهنه8:**

أذا كان ℓ مستقيماً في مستوي التآلفي المنتهي يحتوي بالضبط على **n** من النقاط فانه توجد بالضبط **n-1** من المستقيمات الموازيه للمستقيم ℓ .

**س/** اذا كان ℓ مستقيم في المستوى التآلفي المنتهي يحتوي بالضبط على (14) نقطة فكم مستقيم يوازي ℓ .

**ألجواب:**

من مبرهنه8 [ أذا كان ℓ مستقيماً في مستوي التآلفي المنتهي يحتوي بالضبط على **n** من النقاط فانه توجد بالضبط **n-1** من المستقيمات الموازيه للمستقيم ℓ ].

أذن نستنتج من مبرهنه 8 ان عدد المستقيمات الموازيه للمستقيم ℓ هو $n-1=14-1=13$

**مبــرهـنـة (9):**

في المستوي التالفي اذا وجد مستقيم يحتوي بالضبط على **n** من النقاط فأن أي مستقيم أخر في نفس المستوي يحتوي بالضبط على **n** من النقاط أيضاً.

**س1/** اذا كان ℓ مستقيم في المستوى التآلفي المنتهي يحتوي بالضبط على (7) نقطة فكم نقطه يحتويها أي مستقيم أخر في نفس المستوي.

**ألجواب:**

من مبرهنه 9 [ في المستوي التالفي اذا وجد مستقيم يحتوي بالضبط على **n** من النقاط فأن أي مستقيم أخر في نفس المستوي يحتوي بالضبط على **n** من النقاط أيضاً] أذن نستنتج من (مبرهنه 9) أن أي مستقيم أخر مع المستقيم ℓ يحتوي بالضبط على 7 نقاط أيضاً .

## The Systems of Young and Fano : نظاما يونك و فانو

**نظام يــونك :** هو نظام بديهي يشمل على نفس بديهيات المستوى التآلفي ويشمل بالاضافة الى ذلك البديهية التالية :

بديهية (5) ( اذا كان ℓ مستقيما في نظام يونك فأنه توجد على الاكثر ثلاث نقاط تقع على ℓ).

**اذن نستنتج من اعلاه ان بديهيات نظام يونك هي :**

١- أي نقطتين مختلفتين يحتويهما مستقيم واحد فقط .
٢- كل مستقيم يحتوي على ثلاث نقاط في الاقل .
٣- يوجد في الاقل نقطة واحدة مثلA ويوجد في الاقل خط واحد مثل ℓ بحيث ان $A \notin \ell$
٤- اذا كان ℓ مستقيما و A نقطة بحيث ان $A \notin \ell$ فأنه يوجد مستقيم واحد فقط مثل m يمر من A ويوازي ℓ
٥- كل مستقيم في نظام يونك يحتوي على ثلاث نقاط على الاكثر .

**بديهيه (5)+ البديهية (2) نحصل على [ كل مستقيم في نظام يونك يحتوي بالضبط على ثلاث نقاط ].**

**ملاحظة :-** هذه البديهية بديهيه (5)مع البديهية (2) تجعل هذا النظام هندسة منتهية .

**مبرهنة (10):** يحتوي النظام على تسع نقاط فقط .

**البرهان :**

**المطلوب اثباته** : ان نظام يونك يحتوي بالضبط على ٩ نقاط

من البديهيه (3) في نظام يونك[ **يوجد في الاقل نقطه مثل $A_1$ و مستقيم واحد في الاقل مثل ℓ**

**بحيث ان $A_1 \not\ni \ell$** ]

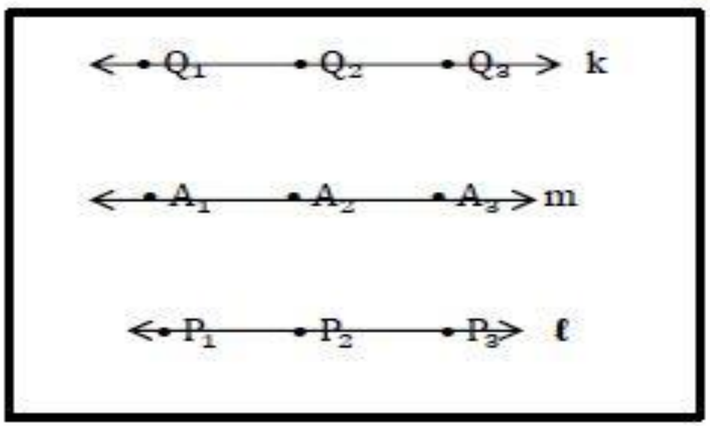
ومن البديهيه بديهيه (5)+ البديهية (2) نحصل على [ **كل مستقيم في نظام يونك يحتوي بالضبط على ثلاث نقاط** ]⇐ نستنتج ان المستقيم ℓ يحتوي بالضبط على ثلاث نقاط ولتكن

من مبرهنه (8) [ **أذا كان ℓ مستقيماً في مستوي التآلفي المنتهي يحتوي بالضبط على n من النقاط فانه توجد بالضبط n-1 من المستقيمات الموازيه للمستقيم ℓ** ]

اذن نستنتج من مبرهنه (8) انه يوجد $n-1=3-1=2$ من المستقيمات الموازيه ℓ ولتكن m , k

ومن مبرهنه (6)[ **في المستوى التآلفي المستقيمان الموازيان للمستقيم نفسه متوازيان** ]

⇐اذن نستنتج من مبرهنه (6) ان هذه المستقيمات متوازيه فيما بينها




ومن البديهيه بديهيه (5)+ البديهية (2) نحصل على

[ **كل مستقيم في نظام يونك يحتوي بالضبط على ثلاث نقاط**]

⇐ نستنتج ان المستقيمان m ,k يحتوي بالضبط على ثلاث نقاط

ولتكن $A_1$ ، $A_2$ ، $A_3$ على المستقيم m

و $Q_1$ ، $Q_2$ ، $Q_3$ على المستقيم k

⇐ اذن توجد في الاقل تسع نقاط في نظام يونك .

**الان سنبرهن بانه توجد على الاكثر تسع نقاط في نظام يونك ؟**

لو فرضنا وجود نقطه اخرى ولتكن P لا تقع على اي خط من تلك الخطوط

اذن حسب بديهيه (4) نستنتج يوجد مستقيم اخر مثل n يمر من P

⇐ اذن اصبح هنالك ثلاث مستقيمات توازي l وهذا يناقض مبرهنه (8)

⇐ اذن يوجد بالضبط تسع نقاط فقط في نظام يونك

**وهو المطلوب .**

**مبرهنة (11):** يحتوي النظام على اثنى عشر مستقيم فقط .

**البرهان :** من البديهيه (3) في نظام يونك[ **يوجد في الاقل نقطه مثل $A_1$ و مستقيم واحد في الاقل مثل $\ell$**

**بحيث ان $\ell \not\ni A_1$ ]**

ومن البديهيه بديهيه (5)+ البديهية (2) نحصل على [ **كل مستقيم في نظام يونك يحتوي بالضبط على ثلاث نقاط** ]⇐ نستنتج ان المستقيم $\ell$ يحتوي بالضبط على ثلاث نقاط ولتكن

من مبرهنه (8) [ **أذا كان $\ell$ مستقيماً في مستوي التآلفي المنتهي يحتوي بالضبط على n من النقاط فانه توجد بالضبط n-1 من المستقيمات الموازيه للمستقيم $\ell$** ]

اذن نستنتج من مبرهنه (8) انه يوجد $n-1=3-1=2$ من المستقيمات الموازيه $\ell$ ولتكن $m$ , $k$

ومن مبرهنه (6)[ **في المستوى التآلفي المستقيمان الموازيان للمستقيم نفسه متوازيان** ]

⇐اذن نستنتج من مبرهنه (6) ان هذه المستقيمات متوازيه فيما بينها

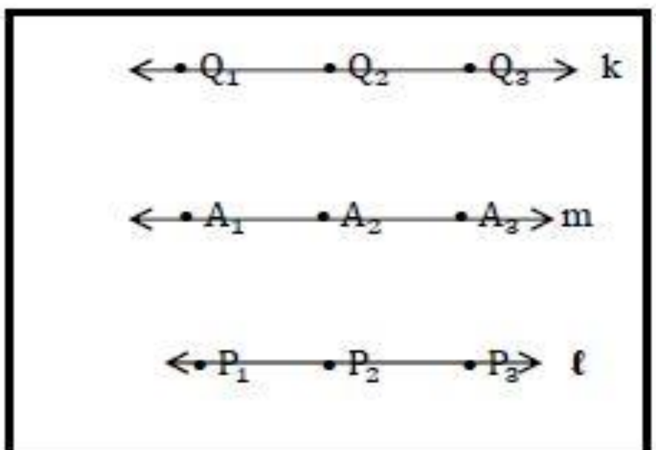
ومن البديهيه بديهيه (5)+ البديهية (2) نحصل على

**[ كل مستقيم في نظام يونك يحتوي بالضبط على ثلاث نقاط]**

⇐ نستنتج ان المستقيمان $k$, $m$ يحتوي بالضبط على ثلاث نقاط

ولتكن $A_1$ ، $A_2$ ، $A_3$ على المستقيم $m$

و $Q_1$ ، $Q_2$ ، $Q_3$ على المستقيم $k$




**ومن بديهيه(1 )[ اي نقطتين مختلفتين يحتويهما مستقيم واحد فقط ]**

⇐ وبما ان $P_1$ و $Q_1$ نقطتين مختلفتين اذن حسب بديهيه (١) يحتويهما مستقيم واحد فقط

⇐ وبما ان $P_1$ و $Q_2$ نقطتين مختلفتين اذن حسب بديهيه (١) يحتويهما مستقيم واحد فقط

⇐ وبما ان $P_1$ و $Q_3$ نقطتين مختلفتين اذن حسب بديهيه (١) يحتويهما مستقيم واحد فقط

⇐ وبما ان $P_2$ و $Q_1$ نقطتين مختلفتين اذن حسب بديهيه (١) يحتويهما مستقيم واحد فقط

⇐ وبما ان $P_2$ و $Q_2$ نقطتين مختلفتين اذن حسب بديهيه (١) يحتويهما مستقيم واحد فقط

⇐ وبما ان $P_2$ و $Q_3$ نقطتين مختلفتين اذن حسب بديهيه (١) يحتويهما مستقيم واحد فقط

⇐ وبما ان $P_3$ و $Q_1$ نقطتين مختلفتين اذن حسب بديهيه (١) يحتويهما مستقيم واحد فقط

⇐ وبما ان $P_3$ و $Q_2$ نقطتين مختلفتين اذن حسب بديهيه (١) يحتويهما مستقيم واحد فقط

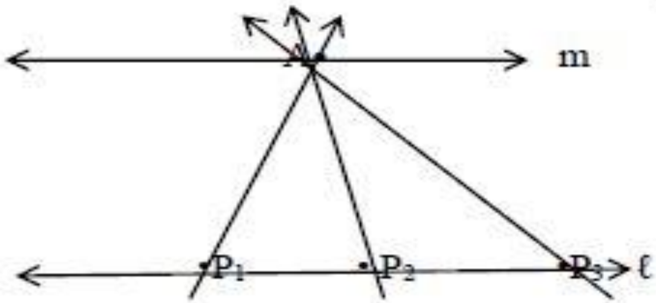
⇐ وبما ان $P_3$ و $Q_3$ نقطتين مختلفتين اذن حسب بديهيه (١) يحتويهما مستقيم واحد فقط

اذن نستنتج من اعلاه يوجد بالضبط اثنى عشر مستقيم فقط في نظام يونك .

**وهو المطلوب**

**مبرهنة (12):** اي نقطة يمر بها اربعة مستقيمات فقط

**البرهان :**




من بديهيه(3) **[توجد نقطه في الاقل مثل A ويوجد مستقيم في الاقل مثل ℓ**

**بحيث** ان $A \notin ℓ$ ]

ومن بديهيه (٢+٥)[ **كل مستقيم يحتوي بالضبط ثلاث نقاط** ]

⇐ نستنتج ان المستقيم ℓ يحتوي على ثلاث نقاط بالضبط ولتكن

$P_1, P_2, P_3$

ومن بديهيه (1)[ **اي نقطتين مختلفتين يحتويهما مستقيم واحد فقط** ]

$P_1$ و A نقطتين مختلفتين اذن يحتويهما مستقيم واحد فقط

**و** $P_2$ و A نقطتين مختلفتين اذن يحتويهما مستقيم واحد فقط

**و** $P_3$ و A نقطتين مختلفتين اذن يحتويهما مستقيم واحد فقط

⇐ نستنتج توجد ثلاث مستقيمات تمر من النقطه A وهي $P_1A, P_2A, P_3A$

ومن( بديهيه ٤)نستنتج انه يوجد مستقيم واحد فقط مثل m يمر من A ويوازي ℓ

اذن نستنتج انه توجد اربعة مستقيمات فقط تمر من النقطه A.

**وهو المطلوب**

## نظام فـــانـــو :

هو نظام بديهي يشمل جميع بديهيات المستوي الاسقاطي بالاضافه الى البديهية (5) التي تم ذكرها في نظام يونك

**اذن نستنتج ان بديهيات نظام فانو هي :**

١- أي نقطتين مختلفتين في فانو نظامحتويهما مستقيم واحد فقط .
٢- كل مستقيم يحتوي على ثلاث نقاط في الاقل .
٣- يوجد في الاقل نقطة واحدة مثل A ويوجد في الاقل خط واحد مثل $\ell$ بحيث ان $A \notin \ell$
٤- أي مستقيمين يشتركان في نقطة واحدة على الاقل
٥- كل مستقيم في نظام فانو يحتوي على ثلاث نقاط على الاكثر

**من البديهيه (5)+ البديهية (2) نحصل على [ كل مستقيم في نظام فانو يحتوي بالضبط على ثلاث نقاط ].**

## ملاحظه :

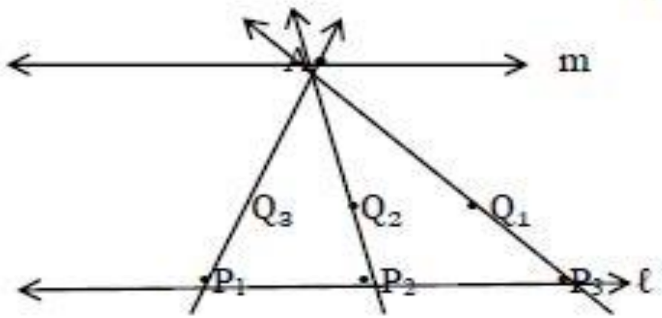
ان نظام فانو منتهي ايضا حيث ان المستقيم فيه يحتوي على ثلاثة نقاط فقط وعدد النقاط والخطوط فيه منتهي.

مبرهنة (13): يحتوي نظام فانو على سبعة نقاط فقط

البرهان:

من بديهيه(3) [توجد نقطه في الاقل مثل A ويوجد مستقيم في الاقل مثل ℓ

بحيث ان $A \notin \ell$ ]




ومن بديهيه (٢+٥)[ كل مستقيم يحتوي بالضبط ثلاث نقاط ]

⇐ نستنتج ان المستقيم ℓ يحتوي على ثلاث نقاط بالضبط ولتكن

$P_1, P_2, P_3$

ومن بديهيه (1)[ اي نقطتين مختلفتين يحتويهما مستقيم واحد فقط ]

$P_1$ و $A$ نقطتين مختلفتين اذن يحتويهما مستقيم واحد فقط

و $P_2$ و $A$ نقطتين مختلفتين اذن يحتويهما مستقيم واحد فقط

و $P_3$ و $A$ نقطتين مختلفتين اذن يحتويهما مستقيم واحد فقط

ومن بديهيه (٢+٥)[ كل مستقيم يحتوي بالضبط ثلاث نقاط ]

⇐ كل مستقيم من هذه المستقيمات تحوي نقطه ثالثه ولتكن $Q_1$ ، $Q_2$ ، $Q_3$

⇐ نظام فانو يحتوي سبع نقاط فقط .

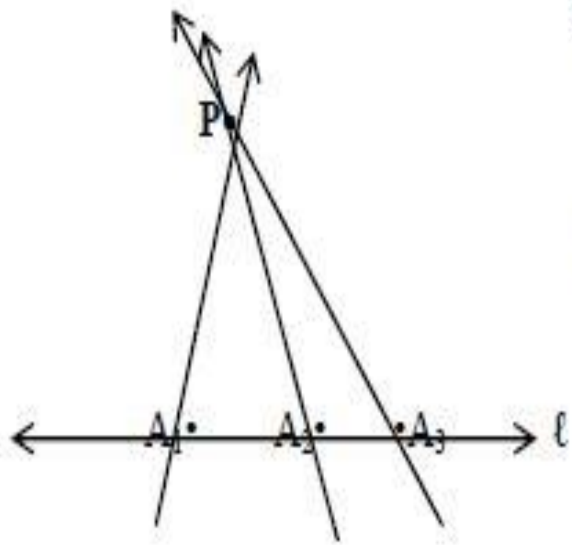
وهو المطلوب

**مبرهنة (14):** يحتوي نظام فانو على سبعة مستقيمات فقط .

**مبرهنة (15):** أي نقطة في نظام فانو يمر بها بالضبط ثلاث مستقيمات .

**البرهـان :** ليكن P نقطه في نظام فانو

**المطلوب اثباته:-** يوجد في ثلاث مستقيمات فقط يمرون في النقطه P




من البديهية ( 3 ) **[توجد في الاقل نقطة واحدة**

**ويوجد في الاقل خط واحد بحيث ان النقطه لا تنتمي الى المستقيم ]**

⇐ يوجد مستقيم مثل ℓ ونقطه مثل Pبحيث ان $P \notin \ell$

كذلك من البديهية ( 2 +5 )

⇐ توجد ثلاثة نقاط بالضبط على المستقيم ℓ ولتكن $A_1, A_2, A_3$

من البديهية ( 1 )[ **أي نقطتين مختلفتين يحتويهما مستقيم واحد فقط ]**

⇐ توجد ثلاث مستقيمات فقط وهي $PA_1, PA_2, PA_3$ التي تمر من P وتكون مختلفة

اذن النقطه P يمر بها ثلاث مستقيمات فقط .