التحليل العددي

كلية التربية للعلوم الصرفة

قسم الرياضيات

جامعة الموصل

المرحلة الثالثة

الحلول العددية لمنظومة المعادلات الخطية

Numerical Solution for system linear equations

- ان كثير من المسائل في بعض الحالات العلمية وفي التحليل العددي يتطلب حلها معرفة ببعض طرق الحلول العددية لمنظومة المعادلات الخطية.
- يمكن كتابة المنظومة العامة المتكونة من n من المعادلات الخطية والتي تحتوي على n من المجاهيل ومن الدرجة الاولى بالشكل التالي:
- $$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$
- حلها ينقسم الى ثلاث حالات:

1. اذا كانت عدد المعادلات اقل من عدد المجاهيل, فان المنظومة لها حل ولكن ليس حلا وحيدا.
2. اذا كانت عدد المعادلات اكثر من عدد المجاهيل, فان المعادلات قد لايكون لها حل على الاطلاق.
3. اذا كانت عدد المعادلات متساوي عدد المجاهيل, فان المنظومة لها حل وحيد.

- ان الحلول العددية لهذا النظام يتكون من نمطين مختلفين:
- النمط الاول:- الطرق المباشرة Direct method
- النمط الثاني:- الطرق التكرارية Iterative method

- الطرق المباشرة Direct method

.1 طريقة كَاوس للحذف Gaussian Elimination method

- تعتبر من ابسط الطرق المباشرة لحل المنظومة المعادلات الخطية ويمكن توضيحها بما يلي:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
\cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

- يمكن كتابة المعادلات اعلاه بالشكل التالي

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
 & & . & \\
 & & . & \\
 & & . & \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m
\end{bmatrix}
$$

.1 نحول المصفوفة اعلاه الى مصفوفة مثلثية عليا وذلك باتباع ما يلي:

a) تصفير قيمة $a_{m1}, \dots a_{31}, a_{21}$ من المعادلات اي ما تحت القطر الرئيسي بشكل متتالي بالصيغة $m_1 = \frac{-a_{21}}{a_{11}}$ بضرب في الصف الاول وبجمع مع الصف الثاني وكذلك $m_2 = \frac{-a_{31}}{a_{11}}$ بضرب في الصف الاول وبجمع مع الصف الثالث وهكذا تصبح المصفوفة بالشكل التالي:

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
0 & \acute{a}_{22} & \dots & \acute{a}_{2n} \\
0 & \acute{a}_{32} & \dots & \acute{a}_{3n} \\
 & & . & \\
 & & . & \\
0 & \acute{a}_{m2} & \dots & \acute{a}_{mn}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
b_1 \\ \acute{b}_2 \\ \acute{b}_3 \\ . \\ . \\ \acute{b}_m
\end{bmatrix}
$$

a) تصفير قيمة $\acute{a}_{32}, \acute{a}_{42}, \dots \acute{a}_{m2}$ حيث نجد $\acute{m}_1 = \frac{-\acute{a}_{32}}{a_{22}}$ يضرب في السطر الثاني ويجمع مع السطر الثالث وايضا نجد $\acute{m}_2 = \frac{-\acute{a}_{42}}{a_{22}}$ ويضرب في السطر الثاني ويجمع مع السطر الرابع وهكذا حتى تصبح المصفوفة بالشكل التالي:

- $$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \acute{a}_{22} & \dots & \acute{a}_{2n} \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & \acute{a}_{mn} \end{bmatrix} \left| \begin{matrix} b_1 \\ \acute{b}_2 \\ \acute{b}_3 \\ \vdots \\ \acute{b}_m \end{matrix} \right]$$

1. نحل المنظومة المثلثية العليا الجديدة بطريقة التعويض التراجعي

- $x_n = \frac{\acute{b}_m}{\acute{a}_{mn}}$
- .
  .
  .
- $x_2 = \frac{1}{\acute{a}_{22}}(\acute{b}_2 - \acute{a}_{23}x_3 - \dots - \acute{a}_{2n}x_n)$
- $x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}\, x_2 - \dots - a_{1n}x_n)$

مثال:- باستخدام طريقة كاوس للحذف جد حل لمنظومة المعادلات

$$\begin{aligned} 3x_1 - \ x_2 + \ 2x_3 &= 12 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 11 \\ 2x_1 - \ 2x_2 - \ \ x_3 &= \ 2 \end{aligned}$$

- **الحل:-**

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & 11 \\ 2 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

- بضرب $m_1 = \frac{-1}{3}$ في الصف الاول ويجمع مع الصف الثاني و بضرب $m_2 = \frac{-2}{3}$ في الصف الاول ويجمع مع الصف الثالث ينتج

- $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 12 \\ 0 & 7/3 & 7/3 & 7 \\ 0 & -4/3 & -7/3 & -6 \end{array}\right]$

- بضرب $m_1 = \frac{4}{7}$ في الصف الثاني ويجمع مع الصف الثالث ينتج

- $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 12 \\ 0 & 7/3 & 7/3 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right]$

- $\Rightarrow -x_3 = -2 \Rightarrow x_3 = 2$

- $\frac{7}{3}x_2 + \frac{7}{3}x_3 = 7 \Rightarrow x_2 + 2 = 3 \Rightarrow x_2 = 1$

- $3x_x - 1 + 4 \Rightarrow x_x = 3$

- $(x_1, x_2, x_3) = (3,1,2)$

1. طريقة كاوس جوردن Gauss- Jordan method

- تعد هذه الطريقة من الطرق المباشرة وهي مشابه الى حد كبير لطريقة كاوس للحذف لحل منظومة من المعادلات $Ax = b$ والاختلاف بينهما هو ان الحل في طريقة كاوس جوردن يتم تحويل المصفوفة الى مصفوفة قطرية ولهذا نحصل مباشرة على الحل النهائي لمجموعة المعادلات ولاتحتاج لتطبيق التعويض التراجعي.
- **مثال:-** باستخدام طريقة كاوس جوردن جد حل لمنظومة المعادلات

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 12 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 11 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$$

- **الحل:-**

$$\left[\begin{matrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 12 \\ 11 \\ 2 \end{matrix}\right] \begin{matrix} -3r_2 + r_1 \to r_2 \\ -2r_1 + 3r_3 \to r_3 \end{matrix}$$

$$\left[\begin{matrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & -7 \\ 0 & -4 & -7 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 12 \\ -21 \\ -18 \end{matrix}\right] -\frac{1}{7}r_2 \to r_2$$

$$\left[\begin{matrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -7 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 12 \\ 3 \\ -18 \end{matrix}\right] \begin{matrix} r_2 + r_1 \to r_1 \\ 4r_2 + r_3 \to r_3 \end{matrix}$$

$$\left[\begin{matrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 15 \\ 3 \\ -6 \end{matrix}\right] \begin{matrix} \frac{1}{3}r_1 \to r_1 \\ -\frac{1}{3}r_3 \to r_3 \end{matrix}$$

$$\left[\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{matrix}\right] \begin{matrix} -r_3 + r_1 \to r_1 \\ -r_3 + r_2 \to r_2 \end{matrix}$$

$$\left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}\right]$$

$(x_1, x_2, x_3) = (3,1,2)$

- **واجب:-** باستخدام طريقة كَاوس للحذف / كَاوس جوردن جد حل لمنظومة المعادلات

$$2x-6y-z=-12$$
$$5x-y+2z=29$$
$$-3x-4y+z=5$$

1. طريقة التحليل المثلثي:-

- تعد طريقة التحليل المثلثي من الطرق الجيدة لحل منظومة المعادلات الخطية وذلك من خلال تحويل مصفوفة معاملات المعادلات الى حاصل ضرب مصفوفة مثلثية عليا U ذات قطر رئيسي واحدات ومصفوفة مثلثية سفلى L بحيث ان $LU = A$. اذا كان لدينا مصفوفة $A_{3\times3}$ فان

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- من خلال ضرب الصفوف من المصفوفة L بالعمود الاول من المصفوفة U نحصل على $l_{11}=a_{11}, l_{21}=a_{21}, l_{31}=a_{31}$ اي بمعنى ان عناصر العمود الاول من المصفوغة L تساوي عناصر العمود الاول من المصفوفة A.

- ومن خلال ضرب الصف الاول من L باعمدة U نحصل

- $l_{11}u_{12}=a_{12}, l_{11}u_{13}=a_{13}$

- اي ان

- $u_{12}=\frac{a_{12}}{l_{11}}, u_{13}=\frac{a_{13}}{l_{11}}$

- وبنفس الطريقة في التناوب في ايجاد كلا من L و U نجد باقي العناصر حيث
- $l_{21}u_{12} + l_{22} = a_{22}$
  $l_{31}u_{12} + l_{32} = a_{32}$
- اي ان
- $l_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12}$
  $l_{32} = a_{32} - l_{31}u_{12}$
- وبنفس الطريقة نجد
- $u_{23} = \frac{a_{23} - l_{21}u_{13}}{l_{22}}$
- $l_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23}$
- وبصورة عامة فان ايجاد عناصر مصفوفة L و U تكون كالتالي
- $l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj}, j \leq i, i = 1,2,\dots,n$
- $u_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}}{l_{ii}}, i \leq j, j = 2,3,\dots,n$

- For $j = 1$, the rule for l reduces to $l_{i1} = a_{1i}$, and for $i = 1$, the rule for u reduces to $u_{ij} = \frac{a_{ij}}{l_{11}} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}$.

- **مثال:-** اذا كان لدينا $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ وان $b = \begin{bmatrix} 12 \\ 11 \\ 2 \end{bmatrix}$ جد قيم كلا من $l,u.$

- **الحل:-**

- $l_{11} = 3, l_{21} = 1, l_{31} = 2$

- $u_{12} = -\frac{1}{3}, u_{13} = \frac{2}{3}$

- $l_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12}$
  $= 2 - (1)\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{3}$

- $u_{23} = \frac{a_{23} - l_{21}u_{13}}{l_{22}} = \frac{3-(1)(\frac{2}{3})}{\frac{7}{3}} = 1$

- $l_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23}$
  $= -1 - (2)\left(\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{-4}{3}\right)(1) = -1$

- $\therefore L = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{7}{3} & 0 \\ 2 & -\frac{4}{3} & -1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- ومن اجل ايجاد قيم $b_i', i = 1,2,\dots,n$ نلجا للصيغة التالية
- $b_1' = \frac{b_1}{l_{11}}$
- $b_i' = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} b_k'}{l_{ii}}, i = 2,3,\dots,n$
- في المثال السابق فان قيم b_i' تحسب كالتالي:-
- $b_1' = \frac{b_1}{l_{11}} = \frac{12}{3} = 4$
-
- $b_2' = \frac{b_2 - l_{21} b_1'}{l_{22}} = \frac{11-(1)(4)}{\frac{7}{3}} = 3$
- $b_3' = \frac{b_3 - l_{31} b_1' - l_{32} b_2'}{l_{33}} = \frac{2-(2)(4)-(\frac{-4}{3})(3)}{-1} = 2$
- $\therefore \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & | & 4 \\ 0 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix}$
- $$x_3 = 2$$ $$x_2 = 3 - 1(2) = 1$$ $$x_1 = 4 + (\frac{1}{3})(1) - \frac{2}{3}(2) = 3$$

الطرق التكرارية Iterative method

- تمتاز هذه الطرق ببساطتها وسهولة برمجتها حيث ان الخطا يكون صغيرا جدا. وان من اهم الطرق التكرارية التي سوف نتطرق اليها هي :-

1. طريقة جاكوبي Jacobi method

- تعد من اول الطرق التكرارية التي استخدمت لايجاد الحل العددي وهي طريقة سهلة الاستخدام ولكنها بطيئة في الوصول الى الحل الصحيح. لتكن لدينا منظومة المعادلات التالية

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\dots \quad \dots \quad \dots \\
\dots \quad \dots \quad \dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

- بحيث ان $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{mn} \neq 0$ يمكن اعادة صياغة المعادلات الخطية اعلاه بالشكل الذي يسمح لنا ايجاد قيمة x_1 من المعادلة الاولى وقيمة x_2 من المعادلة الثانية وهكذا الى قيمة x_n من المعادلة (n) وكالاتي:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n) \\
x_2 &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n) \\
\dots \quad \dots \quad \dots \\
\dots \quad \dots \quad \dots \\
x_n &= \frac{1}{a_{mn}}(b_m - a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 - \cdots - a_{mn-1}x_{n-1})
\end{aligned}
$$

- نفرض ان الحل الابتدائي هو $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ عندئذن نحصل على اول تقريب جديد للقيم $(x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)$ من خلال تعويضها بمنظومة المعادلات اعلاه وحسب ما يلي

$$x_1^1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^0 - a_{13}x_3^0 - \cdots - a_{1n}x_n^0)$$
$$x_2^1 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^0 - a_{23}x_3^0 - \cdots - a_{2n}x_n^0)$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$x_n^1 = \frac{1}{a_{mn}}(b_m - a_{m1}x_1^0 - a_{m2}x_2^0 - \cdots - a_{mn-1}x_{n-1}^0)$$

- نستخدم القيم جديد من التكرار الاول $(x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)$ لايجاد قيم التكرار الثاني و هكذا.
- الصيغة العامة لطريقة جاكوبي التكرارية هي
- $x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} a_{ij}x_j^k)/a_{ii},\ n = 1,2, \dots$
- نتوقف عندما $|x_i^{k+1} - x_i^k| \leq \epsilon$ وان شرط التقارب للوصول الى الحل الصحيح هو $max \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1$

1. طريقة گاوس - سيدل Gauss-Seidel method

- تعتبر طريقة گاوس-سيدل تحسين لطريقة جاكوبي, حيث تستخدم التقريبات الجديدة المحسوبة x_i^{k+1} بمجرد حسابها دون الانتظارالى دورة ثانية.

- نفترض ان النظام الخطي المراد حله هو:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

- فان قيم $x_1, x_2, \ldots, x_n$ من المعادلات اعلاه تستخرج من خلال الصيغة التالية

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}) \\
x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}) \\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
x_n^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{mn}}(b_m - a_{m1}x_1^{(k+1)} - a_{m2}x_2^{(k+1)} - \cdots - a_{mn-1}x_{n-1}^{(k+1)})
\end{aligned}$$

- الصيغة العامة لطريقة گاوس - سيدل التكرارية هي
- $x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{N} a_{ij} x_j^{k})/a_{ii},\ n = 1,2, \ldots$
- نتوقف عندما $\left|x_i^{k+1} - x_i^{k}\right| \leq \epsilon$ وان شرط التقارب للوصول الى الحل الصحيح هو $\max \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1$
- **<u>مثال:</u>-** باستخدام طريقة جاكوبي / گاوس - سيدل جد حل لمنظومة المعادلات
- $$\begin{aligned} 10x_1 + \ x_2 + x_3 &= 12 \\ x_1 \ + 10x_2 + x_3 &= 12 \\ x_1 + \ x_2 + \ 10x_3 &= \ 12 \end{aligned}$$
- حيث ان $x_1^0 = x_2^0 = \ x_3^0 = 0$ ولثلاث تكرارات.
- <u>الحل:-</u>

- $\left|\frac{a_{12}}{a_{11}}\right| + \left|\frac{a_{13}}{a_{11}}\right| = \left|\frac{1}{10}\right| + \left|\frac{1}{10}\right| = 0.2$
- $\left|\frac{a_{21}}{a_{22}}\right| + \left|\frac{a_{23}}{a_{22}}\right| = \left|\frac{1}{10}\right| + \left|\frac{1}{10}\right| = 0.2$
- $\left|\frac{a_{31}}{a_{33}}\right| + \left|\frac{a_{32}}{a_{33}}\right| = \left|\frac{1}{10}\right| + \left|\frac{1}{10}\right| = 0.2$

- $max\{0.2, 0.2, 0.2\} = 0.2 < 1 \Rightarrow convergence$

- $x_1^{(k+1)} = \frac{1}{10}(12 - x_2^k - x_3^k)$
- $x_2^{(k+1)} = \frac{1}{10}(12 - x_1^k - x_3^k)$
- $x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10}(12 - x_1^k - x_2^k)$

- $k = 0$

- $x_1^{(1)} = \frac{1}{10}(12 - x_2^0 - x_3^0) = \frac{1}{10}(12 - 0 - 0) = 1.2$
- $x_2^{(1)} = \frac{1}{10}(12 - x_1^0 - x_3^0) = \frac{1}{10}(12 - 0 - 0) = 1.2$
- $x_3^{(1)} = \frac{1}{10}(12 - x_1^0 - x_2^0) = \frac{1}{10}(12 - 0 - 0) = 1.2$

- $k = 1$

- $x_1^{(2)} = \frac{1}{10}(12 - x_2^1 - x_3^1) = \frac{1}{10}(12 - 1.2 - 1.2) = 0.96$
- $x_2^{(2)} = \frac{1}{10}(12 - x_1^1 - x_3^1) = \frac{1}{10}(12 - 1.2 - 1.2) = 0.96$
- $x_3^{(2)} = \frac{1}{10}(12 - x_1^1 - x_2^1) = \frac{1}{10}(12 - 1.2 - 1.2) = 0.96$

- $k = 2$

- $x_1^{(3)} = \frac{1}{10}(12 - x_2^2 - x_3^2) = \frac{1}{10}(12 - 0.96 - 0.96) = 1.008$
- $x_2^{(3)} = \frac{1}{10}(12 - x_1^2 - x_3^2) = \frac{1}{10}(12 - 0.96 - 0.96) = 1.008$
- $x_3^{(3)} = \frac{1}{10}(12 - x_1^2 - x_2^2) = \frac{1}{10}(12 - 0.96 - 0.96) = 1.008$

- By Gauss-Seidel

- $x_1^{(k+1)} = \frac{1}{10}\left(12 - x_2^k - x_3^k\right)$
- $x_2^{(k+1)} = \frac{1}{10}\left(12 - x_1^{(k+1)} - x_3^k\right)$
- $x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10}\left(12 - x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)}\right)$

- $k = 0$

- $x_1^{(1)} = \frac{1}{10}(12 - x_2^0 - x_3^0) = \frac{1}{10}(12 - 0 - 0) = 1.2$
- $x_2^{(1)} = \frac{1}{10}(12 - x_1^1 - x_3^0) = \frac{1}{10}(12 - 1.2 - 0) = 1.08$
- $x_3^{(1)} = \frac{1}{10}(12 - x_1^1 - x_2^1) = \frac{1}{10}(12 - 1.2 - 1.08) = 0.972$

- $k = 1$

- $x_1^{(2)} = \frac{1}{10}(12 - x_2^0 - x_3^0) = \frac{1}{10}(12 - 1.08 - 0.972) = 0.9948$
- $x_2^{(2)} = \frac{1}{10}(12 - x_1^2 - x_3^0) = \frac{1}{10}(12 - 0.9948 - 0.972) = 1.00332$
- $x_3^{(2)} = \frac{1}{10}(12 - x_1^2 - x_2^2) = \frac{1}{10}(12 - 0.9948 - 1.00332) = 1.000188$
- **مثال:-** باستخدام طريقة جاكوبي / گاوس - سيدل جد حل لمنظومة المعادلات
- $$\begin{aligned} 4x_1 + \ x_2 - 2x_3 &= 1 \\ x_1 \ - 7x_2 + 10x_3 &= 2 \\ x_1 + \ 3x_2 - \ x_3 &= \ 8 \end{aligned}$$
- حيث ان $x_1^0 = 1, x_2^0 = 3, x_3^0 = 2$ ولثلاث تكرارات.

- $k=2$

- $x_1^{(3)}=\frac{1}{10}(12-x_2^2-x_3^2)=\frac{1}{10}(12-0.96-0.96)=1.008$
- $x_2^{(3)}=\frac{1}{10}(12-x_1^2-x_3^2)=\frac{1}{10}(12-0.96-0.96)=1.008$
- $x_3^{(3)}=\frac{1}{10}(12-x_1^2-x_2^2)=\frac{1}{10}(12-0.96-0.96)=1.008$

- By Gauss-Seidel

- $x_1^{(k+1)}=\frac{1}{10}\left(12-x_2^k-x_3^k\right)$
- $x_2^{(k+1)}=\frac{1}{10}\left(12-x_1^{(k+1)}-x_3^k\right)$
- $x_3^{(k+1)}=\frac{1}{10}\left(12-x_1^{(k+1)}-x_2^{(k+1)}\right)$

- $k=0$

- $x_1^{(1)}=\frac{1}{10}(12-x_2^0-x_3^0)=\frac{1}{10}(12-0-0)=1.2$
- $x_2^{(1)}=\frac{1}{10}(12-x_1^1-x_3^0)=\frac{1}{10}(12-1.2-0)=1.08$
- $x_3^{(1)}=\frac{1}{10}(12-x_1^1-x_2^1)=\frac{1}{10}(12-1.2-1.08)=0.972$

Thank you for attention