جامعة الموصل
كلية التربية للعلوم الصرفة
قسم الرياضيات

Foundations of Mathematics

اسس رياضيات

المرحلة الاولى

اعداد

م. رقية نافع بلو

م.م شيماء محمد يونس

المفاهيم الأساسية:

1- الزوج المرتب

ليكن كل من b, a عنصرا ، الزوج المرتب المتكون من a,b يرمز له ب (a,b) حيث ان a يسمى مسقط اول للزوج المرتب والعنصر b يسمى المسقط الثاني .

2- الضرب الديكارتي

ليكن كل من A, B مجموعتين فان حاصل الضرب الديكارتي للمجموعتين A,B هو عبارة عن مجموعة جميع الأزواج المرتبة (a, b) حيث ان A ∈ a و B ∈ b .

اي ان :

$$\boldsymbol{A \times B = \{(a, b) \, ; a \in A \wedge b \in B\}}$$

Remarks: ملاحظات

1- لتكن كل من a ,b , c, d عناصر فان:

$(a, b) \neq (c, d)$ in general بصورة عامة

$(a, b) = (c, d) \iff a = c \wedge b = d$

$(a, b) = (b, a) \iff a = b$

2-لتكن كل من A,B مجموعات فان:

بصورة عامة : $A \times B \neq B \times A$

3-اذا كانت المجموعة A تحتوي على عنصر ينتمي للمجموعة B فان :

$A \cap B \neq \emptyset$ واذا لم يكن ذلك فإن $A \cap B = \emptyset$.

اي ان $(A \times B) \cap (B \times A) = \emptyset \iff A \cap B = \emptyset$

$(A \times B) \cap (B \times A) \neq \emptyset \iff A \cap B \neq \emptyset$

Remarks: ملاحظات

4- اذا كانت المجموعة A تحتوي على n من العناصر والمجموعة B تحتوي على m من العناصر فان $A \times B$ يحتوي $(n.m)$ من العناصر.

5-اذا كانت المجموعة A مجموعة غير منتهية أو B مجموعة غير منتهية فان $A \times B$ مجموعة غير منتهية ايضا.

6-اذا كانت المجموعة A مجموعة خالية أو B مجموعة خالية فان $A \times B$ مجموعة خالية.

اي ان $A \times B = \emptyset$

مثال 1:لتكن $A = \{2,6\}$, $B = \{1,3,5\}$

جد كلا من $B \times A$, $A \times B$؟

الحل:

$$n(A) = 2$$

$$n(B) = 3$$

$$n(A \times B) = 2.3 = 6$$

$$A \times B = \{(2,1), (2,3), (2,5), (6,1), (6,3), (6,5)\}$$

$$B \times A = \{(1,2), (1,6), (3,2), (3,6), (5,2), (5,6)\}$$

$$A \times B \neq B \times A$$

مثال 2:

أ- اذا كانت $A = IR$ و $B = \emptyset$ $\Leftarrow$ $A \times B = \emptyset$

ب- اذا كانت $A = IR$ و $B = \{1\}$

$$A \times B = \{(0,1), (1,1), (2,1), (3,1), (4,1) \ldots \ldots\}$$

مبرهنة1: لتكن كل من A,B مجموعة فان $A \times B = B \times A$

اذا وفقط اذا كانت $A = B$.

البرهان: الاتجاه الاول نفرض ان

$$A \times B = B \times A$$

$$let\ a \in A \Longrightarrow \forall b \in B \Rightarrow (a,b) \in A \times B$$

$$\Rightarrow (a,b) \in B \times A \left[A \times B = B \times A \text{ معطى}\right]$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{a} \in B$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B} \quad \dots(\mathbf{1})$$

$$let\ b \in B \Longrightarrow \forall a \in A \Rightarrow (b,a) \in B \times A$$

$$\Rightarrow (b,a) \in A \times B \left[A \times B = B \times A \text{ معطى}\right]$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{b} \in A$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{A} \quad \dots(\mathbf{2})$$

من 1 و 2 نحصل على:

A=B

الاتجاه الثاني: نفرض ان *A=B* **البرهان : *H.W***

مبرهنة 2:لتكن كل من A,B,C,D مجموعة اثبت ان :

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

البرهان:

$let(x, y) \in A \times (B \cap C)$

$\Longrightarrow x \in A \wedge y \in (B \cap C)$

$\Rightarrow x \in A \wedge [y \in B \wedge \ y \in C]$

$\Longrightarrow \ [x \in A \wedge y \in B\ ] \wedge \ [x \in A \wedge \ y \in C]$

$\Longrightarrow \ (x, y) \in [(A \times B) \cap (A \times C)]$

$\Rightarrow A \times (B \cap C) \subseteq (A \times B) \cap (A \times C) \quad \ldots(1)$

Now , let$(z, w) \in [(A \times B) \cap (A \times C)]$

$\Longrightarrow \ (z, w) \in (A \times B) \wedge (z, w) \in (A \times C)$

$$\Longrightarrow \ [z \in A \wedge w \in B\ ] \wedge \ [z \in A \wedge \ w \in C]$$

$$\Longrightarrow \ z \in A \wedge [w \in B \wedge \ w \in C]$$

$$\Longrightarrow \ (z, w) \in A \times (B \cap C)$$

$$\Rightarrow [(A \times B) \cap (A \times C)] \subseteq \ [A \times (B \cap C)] \quad \ldots(\mathbf{2})$$

من 1 و 2 نحصل على:

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

اسس رياضيات

FOUNDATIONS OF MATHEMATICS

تعريف العلاقة الثنائية:

لتكن كل من A,B مجموعة ولتكن الضرب حاصل على مفتوحة جملة $\boldsymbol{P}(x, y)$ الديكارتي $(A \times B)$ فان الثلاثي (A, P, B) يسمى علاقة ثنائية من *A* الى *B* وان مجموعة الصدق $\boldsymbol{P}(x, y)$ يسمى بيان العلاقة ويرمز لها ب *G*.

$$G = \{(x, y) \in A \times B: \ \boldsymbol{P}(x, y) \text{صادقة}\}$$

نلاحظ ان بيان العلاقة *G* هو مجموعة جزئية من $A \times B$

تعريف1:

لتكن كل من A,B مجموعة فان اي مجموعة جزئية من $A \times B$ تسمى علاقة فاذا كانت R علاقة من A الى B فان R تكون جزئية $A \times B$.

اي ان $\boldsymbol{R} \subseteq A \times B$

تعريف2:

اذا كانت A=B مجموعتان متساويتان فان R تسمى علاقة على A عندئذ R تكون جزئية من $A \times A$.

ملاحظة : بما ان العلاقات هي مجموعات فان ما يصح على المجموعات يصح على العلاقات مثل اتحاد علاقتين ،تقاطع علاقتين ، الفرق بين علاقتين .

اي ان :

اذ اكانت R,M علاقتين من A الى B فان:

$$(R \cup M) = \{(x, y): (x, y) \in R \vee (x, y) \in M\}$$
$$(R \cap M) = \{(x, y): (x, y) \in R \wedge (x, y) \in M\}$$
$$(R - M) = \{(x, y): (x, y) \in R \vee (x, y) \notin M\}$$

مثال 1: لتكن $A = \{1,2,3\}$

$$R_1 = \{(x,y) \in A \times A: x \leq y\}$$
$$R_2 = \{(x,y) \in A \times A: x > y\}$$
$$R_3 = \{(x,y) \in A \times A: x = y\}$$

جد كلا من R_1, R_2, R_3

الحل:

$$A \times A = \left\{\begin{matrix}(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2), \\ (2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\end{matrix}\right\}$$

$$R_1 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\}$$

$$R_2 = \{(2,1),(3,1),(3,2)\}$$

$$R_3 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$$

مثال 2: لتكن $A = \{0,1,2\}$ ، $B = \{3,4,5\}$

$R = \{(x,y) \in A \times B : x + y = 5\}$

$M = \{(x,y) \in A \times B : x^2 + y = 4\}$

جد كلا من $(R - M)$, $(R \cap M)$, $(R \cup M)$

الحل:

$$A \times B = \left\{ \begin{matrix} (0,3),(0,4),(0,5),(1,3),(1,4), \\ (1,5),(2,3),(2,4),(2,5) \end{matrix} \right\}$$

$$R = \{(0,5),(1,4),(2,3)\}$$

$$M = \{(0,4),(1,3)\}$$

$$(R \cup M) = \{(0,5),(1,4),(2,3),(0,4),(1,3)\}$$

$$(R \cap M) = \emptyset$$

$$(R - M) = \{(0,5),(1,4),(2,3)\}$$

تعريف العلاقة الذاتية:

لتكن A مجموعة ما تسمى المجموعة التي عناصرها جميع الازواج المرتبة (x, y) في $A \times A$ بحيث ان $x = y$ بعلاقة ذاتية على A ويرمز لها بالرمز I_A

$$I_A = \{(x, y) \in A \times A \ : x = y\}$$

مثال ١ :لتكن $A = \{a, b, c\}$ جد العلاقة الذاتية على A ؟

$$I_A = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$$

مثال ٢ :لتكن

$$M = \{(x, y) \in Z \times Z \ : x^2 = y^2\}$$

$$I_M = \{\dots (-2, -2), (-1, -1), (0,0), (1,1), (2,2), (-1,1) \dots\}$$

تعريف عكس العلاقة (معكوس العلاقة):

لتكن R علاقة من المجموعة A الى المجموعة B تسمى العلاقة من المجموعة B الى المجموعة B والتي عناصرها هي جميع الازواج المرتبة بعكس العلاقة (y, x) حيث ان $(x, y) \in R$ ويرمز لها ب $\boldsymbol{R^{-1}}$

اي ان

$$\boldsymbol{R^{-1}} = \{(y, x) \ : (x, y) \in R\}$$

مثال ٢ :لتكن $\boldsymbol{A} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}\}$ ، $\boldsymbol{B} = \{\mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}\}$

$$\boldsymbol{R} = \{(x, y) \in \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}: \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \mathbf{5}\}$$

$$\boldsymbol{M} = \left\{(x, y) \in \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}: \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{y} = \mathbf{4}\right\}$$

جد كلا من $\boldsymbol{R^{-1}}$, $\boldsymbol{M^{-1}}$

الحل:

$$A \times B = \left\{ \begin{matrix} (0,3), (0,4), (0,5), (1,3), (1,4), \\ (1,5), (2,3), (2,4), (2,5) \end{matrix} \right\}$$

$$R = \{(0,5), (1,4), (2,3)\}$$

$$R^{-1} = \{(5,0), (4,1), (3,2)\}$$

$$M = \{(0,4), (1,3)\}$$

$$M^{-1} = \{(4,0), (3,1)\}$$

مبرهنة 3: لتكن R علاقة من المجموعة A فان $\left(R^{-1}\right)^{-1} = R$

البرهان:

$Let\ (x, y) \in \left(R^{-1}\right)^{-1}$

$\Rightarrow (y, x) \in R^{-1}$

$\Rightarrow (x, y) \in R$

$\Rightarrow \left(R^{-1}\right)^{-1} \subseteq R \qquad \ldots (1)$

$Now,\ let \quad (x, y) \in R$

$\Rightarrow (y, x) \in R^{-1}$

$\Rightarrow (x, y) \in \left(R^{-1}\right)^{-1}$

$\Rightarrow R \subseteq \left(R^{-1}\right)^{-1} \qquad \ldots (2)$

من 1 و 2 نحصل على:

$\left(R^{-1}\right)^{-1} = R$

اسس رياضيات

FOUNDATIONS OF MATHEMATICS

المنطلق والمدى للعلاقة :

لتكن R علاقة من المجموعة Aالى B

١- تسمى العناصر الاولى من الزوج المرتب في Rمنطلق العلاقة Rويرمز لها

بالرمز $[dom(R)]$.

اي ان :

$$dom(R) = \{x : \exists y \in B\, ; (x, y) \in R\}$$

٢- تسمى العناصر الثانية من الزوج المرتب في ويرمز لها R مدى العلاقة R

بالرمز $[ran(R)]$.

اي ان :

$$ran(R) = \{y : \exists x \in A\, ; (x, y) \in R\}$$

واضح من التعريف : $dom(R) \subseteq A$ و $ran(R) \subseteq B$

مثال1 : لتكن

$A = \{1,2,3\}$
$B = \{a, b\}$
$R = \{(1, a), (1, b), (3, b)\}$

جد كلا من $dom(R)$ و $ran(R)$

الحل :

$dom(R) = \{1,3\}$

$ran(R) = \{a, b\}$

مثال 2: لتكن $A = \{1,3,5\}$ ولتكن والمعرفة A علاقة على المجموعة R

بالصيغة $R = \{(x, y) \in A \times A \,;\, x < y\}$

جد كلا من $dom(R)$ و $ran(R)$

الحل :

$$A \times A = \{(1,1), (1,3), (1,5), (3,1), (3,3), (3,5), (5,1), (5,3), (5,5)\}$$

$R = \{(1,3), (1,5), (3,5)\}$
$dom(R) = \{1,3\}$ $\qquad ran(R) = \{3,5\}$

مبرهنة : لتكن R علاقة من المجموعة A الى المجموعة B فان

١- $dom(R) = ran\left(R^{-1}\right)$

البرهان :

$Let\ x \in dom(R)$
$\Rightarrow \exists\ y \in B\ ; (x, y) \in R$
$\Rightarrow \exists\ y \in B\ ; (y, x) \in R^{-1}$
$\Rightarrow x \in ran\left(R^{-1}\right)$

$\boldsymbol{dom(R) \subseteq ran\left(R^{-1}\right)} \quad \dots \dots (\mathbf{1})$

$Now\ , let\ x \in ran(R^{-1})$
$\Rightarrow \exists\ y \in B\ ; (y, x) \in R^{-1}$
$\Rightarrow \exists\ y \in B\ ; (x, y) \in R$
$\Rightarrow x \in dom(R)$

$\boldsymbol{ran\left(R^{-1}\right) \subseteq dom(R)} \quad \dots \dots (\mathbf{2})$

من (1) و(2) نحصل على:

$$dom(R) = ran(R^{-1})$$

٢- $ran(R) = dom(R^{-1})$

البرهان : H.W

قصر العلاقات :

لتكن R علاقة من المجموعة A الى المجموعة Bو $C \subseteq A$ و $D \subseteq B$ فان قصر العلاقة R من C الى D يعرف بالشكل التالي :

$$R/(C * D) = R \cap (C * D)$$

مثال1: لتكن $A = \{1,3,6,8,12\}$

$B = \{2,4,6,10,11\}$

$R = \{(1,4), (3,6), (1,10), (8,11), (6,2), (12,4)\}$

علاقة من المجموعة A الى المجموعة B

$\mathrm{D} = \{4,6\} \quad , \quad C = \{1,3,8\}$

جد قصر العلاقة R من C الى D ؟

الحل :

$$C \times D = \{(1,4), (1,6), (3,4), (3,6), (8,4), (8,6)\}$$

$$R/(C \times D) = R \cap (C \times D)$$

$$= \{(1,4), (3,6)\}$$

مثال2: لتكن $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1,2,3\}$

$R = \{(a, 1), (b, 3)\}$

علاقة من المجموعة A الى المجموعة B وكانت $C = \{a, b\}$, $D = \{1,2\}$

جد قصر العلاقة R من C الى D .

الحل :

$$C \times D = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}$$

$$R/(C \times D) = R \cap (C \times D)$$

$$= \{(a, 1)\}$$

ملاحظة : اذا كانت $A = B$, $C = D$ فان قصر العلاقة R على C يكون

$$\boldsymbol{R/C = R_C = R \cap (C \times C)}$$

مثال3: لتكن $A = \{2,4,8,16,32\}$

$$R = \{(x, y) \in A \times A \,;\, y = 2x\}$$

ولتكن $C = \{2,4,8\}$

جد قصر العلاقة R على C .

الحل : **H .W**

اسس رياضيات

FOUNDATIONS OF MATHEMATICS

تركيب العلاقات :

ليكن كلا من A, B, C مجموعة غير خالية وكانت R علاقة من A الى B و S علاقة

من B الى Sو R ناتجة من تركيب العلاقتين C ويرمز لها $(S \circ R)$

. $(S \circ R): A \rightarrow C$

تعريف : ليكن كلا من A, B, C مجموعة غير خالية وكانت R علاقة من A الى B و

S علاقة من B الى C فان $(S \circ R)$ علاقة $A \times C$معرف بالصيغة :

$$(S \circ R) = \{(x, z) \in A \times C : \exists y \in B; (x, y) \in R \land (y, z) \in S\}$$

مثال 1: لتكن R و S علاقة على المجموعة A

$A = \{a, b, c\}$

$R = \{(a, b), (a, c), (b, c)\} \quad , S = \{(b, a), (a, c), (c, b), (b, b)\}$

جد $(S \circ R)$ ؟

الحل :

$$(S \circ R) = \{(a, a), (a, b), (b, b)\}$$

مثال2: لتكن $A = \{-1,3,7\}$, $B = \{1,5,6\}$

$R = \{(x,y) \in A \times A\, ; x \leq y\}$

$T = \{(x,y) \in A \times B\, ; x \leq y\}$

جد $(T \circ R), (R \circ T)$؟

الحل :

$R = \{(-1,-1),(-1,3),(-1,7),(3,3),(3,7),(7,7)\}$

$T = \{(-1,1),(-1,5),(-1,6),(3,5),(3,6)\}$

$(T \circ R) = \{(x,z) \in A \times B \colon \exists y \in A; (x,y) \in R \wedge (y,z) \in T\}$

$= \{(-1,1),(-1,5),(-1,6),(3,5),(3,6)\}$

$(R \circ T) = \emptyset$

ملاحظة : بصورة عامة $(T \circ R) \neq (R \circ T)$

مبرهنة 1: لتكن A مجموعة غير خالية و I_A علاقة ذاتية على A و R علاقة على A فان $(R \circ I_A) = (I_A \circ R) = R$

البرهان :

$let\ (x,z) \in (R \circ I_A)$
$\Rightarrow \exists y \in A\ ; (x,y) \in I_A \wedge (y,z) \in R$

بما ان $(x,y) \in I_A \Rightarrow x = y$

$\Rightarrow (x,z) \in R$
$\Rightarrow R \circ I_A \subseteq R \quad \ldots\ldots (1)$
$Now\ , let\ (x,y) \in R$
$\Rightarrow (x,x) \in I_A \wedge (x,y) \in R$

حسب تعريف تركيب العلاقات $\Rightarrow (x,y) \in (R \circ I_A)$

$\Rightarrow R \subseteq R \circ I_A \quad \ldots\ldots (2)$

من 1 و 2 نحصل على:

$R \circ I_A = R$

مبرهنة 2: لتكن R و S و T علاقات على المجموعة A فان

1-$(\boldsymbol{T} \circ \boldsymbol{S}) \circ \boldsymbol{R} = \boldsymbol{T} \circ (\boldsymbol{S} \circ \boldsymbol{R})$

البرهان:

$let\ (x, z) \in [(T \circ S) \circ R]$

$\Rightarrow \exists y \in A\ ; (x, y) \in R \land\ (y, z) \in (T \circ S)$

$\Rightarrow \exists y \in A\ ; (x, y) \in R \land [\exists w \in A; (y, w) \in S \land\ (w, z) \in T]$

$\Rightarrow [\exists y \in A\ ; (x, y) \in R \land (y, w) \in S\ ] \land\ (w, z) \in T]$

$\Rightarrow (x, w) \in (S \circ R) \land (w, z) \in T$

$\Rightarrow (x, w) \in [T \circ (S \circ R)]$

$\Rightarrow (T \circ S) \circ R \subseteq T \circ (S \circ R) \ldots \ldots (1)$

$Now, let\ (x, z) \in [T \circ (S \circ R)]$

$\Rightarrow \exists y \in A; (x, y) \in (S \circ R) \land (y, z) \in T$

$$\Rightarrow [\exists w \in A\,; (x,w) \in R \wedge (w,y) \in S\,] \wedge\ (y,z) \in T$$

$$\Rightarrow \exists w \in A\,; (x,w) \in R \wedge\ [(w,y) \in S\ \wedge\ (y,z) \in T]$$

$$\Rightarrow \exists w \in A\,; (x,w) \in R \wedge\ (w,z) \in (T \circ S)$$

$$\Rightarrow (x,z) \in [(T \circ S) \circ R]$$

$$\Rightarrow T \circ (S \circ R) \subseteq (T \circ S) \circ R \ldots \ldots (2)$$

من 1 و 2 نحصل على:

$$(\boldsymbol{T} \circ \boldsymbol{S}) \circ \boldsymbol{R} = \boldsymbol{T} \circ (\boldsymbol{S} \circ \boldsymbol{R})$$

اسس رياضيات

FOUNDATIONS OF MATHEMATICS

2-$(\boldsymbol{S} \cup \boldsymbol{T}) \circ \boldsymbol{R} = (\boldsymbol{S} \circ \boldsymbol{R}) \cup (\boldsymbol{T} \circ \boldsymbol{R})$

البرهان :

$let\ (x, z) \in [(T \cup S) \circ R]$

$\Rightarrow \exists y \in A\ ; (x, y) \in R \wedge\ (y, z) \in (T \cup S)$

$\Rightarrow \exists y \in A\ ; (x, y) \in R \wedge [(y, z) \in S\ \vee\ \ (y, z) \in T]$

$\Rightarrow (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\ ]\ \vee [(x, y) \in R \wedge (y, z) \in T\ ]$

$\Rightarrow (x, z) \in (S \circ R)\ \vee\ \ (x, z) \in (T \circ R)$

$\Rightarrow (x, z) \in (S \circ R) \cup (T \circ R)$

$\Rightarrow (S \cup T) \circ R \subseteq (S \circ R) \cup (T \circ R) \dots \dots (1)$

$Now, let\ (x, z) \in [(S \circ R) \cup (T \circ R)]$

$\Rightarrow (x, z) \in (S \circ R)\ \vee\ \ (x, z) \in (T \circ R)$

$$\Rightarrow [\exists y \in A\,;(x,y) \in R \ \wedge \ (y,z) \in S\,] \ \vee \ [\exists y \in A\,;(x,y) \in R \wedge \ (y,z) \in T$$

$$\Rightarrow \exists y \in A\,;(x,y) \in R \wedge \ [(y,z) \in S \ \vee \ (y,z) \in T]$$

$$\Rightarrow \exists y \in A\,;(x,y) \in R \wedge \ (y,z) \in (S \cup T)$$

$$\Rightarrow (x,z) \in [(S \cup T) \circ R]$$

$$\Rightarrow (S \circ R) \cup (T \circ R) \subseteq (S \cup T) \circ R \ldots\ldots (2)$$

من 1 و 2 نحصل على:

$$(S \cup T) \circ R = (S \circ R) \cup (T \circ R)$$

$3 - (\boldsymbol{S} \cap \boldsymbol{T}) \circ \boldsymbol{R} = (\boldsymbol{S} \circ \boldsymbol{R}) \cap (\boldsymbol{T} \circ \boldsymbol{R})$

البرهان : **H.W**

4- اذا كانت $\boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{R}$ فان

$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{T} \subseteq \boldsymbol{S} \circ \boldsymbol{T}$

البرهان:

$Let\ (x, z) \in (\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{T})$

$\Longrightarrow \exists y \in A\, ; (x, y) \in T \wedge (y, z) \in R$

$\Longrightarrow \exists y \in A\, ; (x, y) \in T \wedge (y, z) \in S$ [$R \subseteq S$ معطى]

$\Longrightarrow (x, z) \in (S \circ T)$

$\Longrightarrow \boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{T} \subseteq \boldsymbol{S} \circ \boldsymbol{T}$

$B - \boldsymbol{T \circ R \subseteq T \circ S}$

البرهان:

$Let\ (x, z) \in (\boldsymbol{T \circ R})$

$\Longrightarrow \exists y \in A\, ; (x, y) \in R \wedge (y, z) \in T$

$\Longrightarrow \exists y \in A\, ; (x, y) \in S \wedge (y, z) \in T \quad [R \subseteq S \text{ معطى}]$

$\Longrightarrow (x, z) \in (\boldsymbol{T \circ S})$

$\Longrightarrow \boldsymbol{T \circ R \subseteq T \circ S}$

5- $(\boldsymbol{S} \circ \boldsymbol{R})^{-1} = \boldsymbol{R}^{-1} \circ \boldsymbol{S}^{-1}$

البرهان:

$Let\ (x, z) \in (\boldsymbol{S} \circ \boldsymbol{R})^{-1}$

$\Longrightarrow (z, x) \in (\boldsymbol{S} \circ \boldsymbol{R})$

$\Longrightarrow \exists y \in A\,; (z, y) \in R \wedge (y, x) \in S$

$\Longrightarrow \exists y \in A\,; (y, z) \in R^{-1} \wedge (x, y) \in S^{-1}$

$\Longrightarrow (x, z) \in R^{-1} \circ S^{-1}$

$\Longrightarrow (S \circ R)^{-1} \subseteq R^{-1} \circ S^{-1} \quad \ldots (\mathbf{1})$

Now, Let $(x, z) \in R^{-1} \circ S^{-1}$

$\Longrightarrow \exists y \in A\,; (x, y) \in S^{-1} \wedge (y, z) \in R^{-1}$

$\Longrightarrow \exists y \in A\,; (y, x) \in S \wedge (z, y) \in R$

$\Longrightarrow \exists y \in A\,; (z, y) \in R \wedge (y, x) \in S$

$\Longrightarrow (z, x) \in (S \circ R)$

$\Longrightarrow (x, z) \in (S \circ R)^{-1}$

$\Longrightarrow R^{-1} \circ S^{-1} \subseteq (S \circ R)^{-1} \quad \ldots (2)$

من 1 و 2 نحصل على:

$\boldsymbol{(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}}$