# الاحتمالية والاحصاء

# Probability and Statistics

**المرحلة الثالثة**

**قسم الرياضيات**

**كلية التربية للعلوم الصرفة**

**جامعة الموصل**

**ا.م.د. يونس حازم اسماعيل الطويل**

**م.م. زينب عبداللطيف رشيد**

# الإحصاء والاحتمالية

## طبيعة علم الإحصاء

يختص علم الاحصـاء بالطرق العملية لجمع وتنظيم البيانات وعرض وتحليل البيانات وكذلك الوصـول الى نتائج مقبولة وقرارات سليمة على ضوء هذا التحليل. يقسم علم الإحصاء بصورة عامة إلى قسمين رئيسيين:

1. **الإحصـاء الوصـفي:** يشـمل الطرق الإحصـائية المسـتعملة في وصـف مجموعة معينة من البيانات وتتضـمن هذه الطرق الإحصـائية أسـاليب جمع البيانات في صـورة قياسـات رقمية ثم تبويبها وتنظيمها وتلخيصـها وعرضها بشكل يسهل فهمها ثم حساب بعض المقاييس الإحصائية مثل المتوسطات، مقاييس التشتت...الخ.

2. **الإحصـاء ألاسـتنتاجي أو الاسـتدلالي:** ويشـمل الطرق التي تهدف إلى عمل اسـتنتاجات أو اسـتدلالات حول المصدر الذي جمعت منه البيانات.

**تعريف المتغير:** هو أي ظاهرة تظهر اختلافات بين مفرداتها ويرمز له بالحروف الكبيرة ($X,Y,Z,...$) والمفردة أو المشاهدة أو الملاحظة أو القيمة يرمز لها بـ $x_i, y_i, z_i...$ على الترتيب. حيث $x_i$ تمثل قيمة المفردة $i$ للظاهرة، $x_1$ تمثل القيمة الاولى، $x_2$ تمثل القيمة الثانية، ....، $x_n$ تمثل القيمة $n$.

تقسم المتغيرات إلى:

1. **متغيرات وصفية أو نوعية:** هي تلك الظواهر أو الصفات التي لا يمكن قياسها مباشرة بالأرقام العددية مثل صفة لون العيون (ازرق، اسود، بني) كذلك الحالة الاجتماعية (اعزب، متزوج)... الخ.

2. **متغيرات كمية:** هي تلك الظواهر أو الصــفات التي يمكن قياســها مباشــرة بالأرقام العددية مثل صــفة الطول، الوزن، العمر، كمية المحصول... الخ وتنقسم المتغيرات الكمية إلى قسمين:

أ. **متغيرات مستمرة(متصلة):** وهي المتغيرات التي يعبر عنها في فترة مثل $\mathbf{20 < x < 40}$.

ب.**متغيرات متقطعة(منفصــــلة):** وهي المتغيرات التي يعبر عنها بقيم متقطعة مثل عدد حوادث الســـيارات التي تحدث في شارع جامعة الموصل خلال السنة الدراسية أي $\mathbf{x = 1,2,...}$.

## المجتمع والعينة

**المجتمع:** هو عبارة عن جميع مفردات الظاهرة التي يمكن أن يأخذها المتغير مثلا في إجراء دراسة معينة على اوزان الطلبة في كلية ما، فان المجتمع هو اوزان جميع الطلبة في هذه الكلية. المجتمع إما أن يكون:

1- **مجتمع محدود:** أي يمكن حصـر جميع مفرداته كما هو الحال في أوزان طلبة جامعة الموصـل أو عدد عمال مصنع معين أو عدد التلاميذ في مدرسة معينة.

2- **مجتمع غير محدود:** هو المجتمع الذي من الصعب أو المستحيل حصر عدد مفرداته مثل حصر عدد السمك في نهر دجلة أو عدد الطيور من نوع معين في مدينة الموصل، وعدد البكتريا في حقل ما.

**العينة:** هي مجموعة جزئية من المجتمع وتشـــــمل المشــــاهدات التي اختيرت بطريقة ما من المجتمع وعادة يتم اختيار العينة بطريقة عشــوائية، والعشــوائية تعني أن جميع مفردات المجتمع لها نفس الفرصــــة في أن تقع في

العينة. إن دراسة المجتمع ككل قد يكون صعبا أو مستحيلا ويحتاج لوقت وجهد وتكاليف لذا استعيض عن دراسة المجتمع بدراسة العينة وصفاتها ومنها نستطيع أن نستنتج خواص المجتمع الأصلي الذي أخذت منه العينة.

**الرموز الإحصائية :** يستخدم $X,Y,Z,...$ للتعبير عن المتغير، وكل قيمة من المتغير $X$ يرمز لها بالرمز $x_i$ فمثلا إذا كان لدينا $n$ من المشاهدات حيث $n \geq 1$، فان المشاهدات تكون $x_1, x_2, ....., x_n$ . مثلا إذا كان $n=10$ فان المشاهدات هي $x_1, x_2, ....., x_{10}$ .

**بعض العمليات والقواعد المفيدة على المشاهدات**

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + ... + x_n, \qquad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \neq \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

إذا كان لدينا متغير آخر مثل $Y$ وله المشاهدات $y_1, y_2, ....., y_n$ فان:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = (x_1 + x_2 + ... + x_n)(y_1 + y_2 + ... + y_n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \neq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{y_i} = \frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + ... + \frac{x_n}{y_n}$$

$$1 - \sum_{i=1}^{n} c = nc, \qquad example: \sum_{i=1}^{10} c = 10c = c + c + c + c + c + c + c + c + c + c$$

$$2 - \sum_{i=1}^{n} c x_i = c \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$3 - \sum_{i=1}^{n} (x_i + c) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} c = \sum_{i=1}^{n} x_i + nc$$

$$4 - \sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

حيث $c$ عدد حقيقي ثابت.

# مقدمة في النظرية الاحتمالية

**الاحتمالية:** أو تسمى قوانين المصادفة وتعتبر من النظريات المهمة التي تختص بدراسة الحوادث والمتغيرات والظواهر التي تتميز بعدم التأكد من حدوثها.

**التجربة العشوائية:-**

هي التجربة التي لا يمكن التعرف على نتائجها إلى بعد تنفيذها، مثلا:

1. في تجربة رمي قطعة نقود منتظمة نلاحظ وجود نتيجتين ممكنتين فقط هما ظهور الصورة $H$ أو ظهور الكتابة $T$.
2. في تجربة رمي زهر النرد نلاحظ وجود ست نتائج ممكنة هي 1,2,3,4,5,6.
3. فحص فصيلة الدم لشخص ما تجربة عشوائية نتائجها احد الأصناف A , B , AB , O.
4. عمر جهاز الكتروني تجربة عشوائية لأننا لا نعلم بالضبط إلى أي وقت يستمر الجهاز بالعمل.

وسنرمز للتجربة العشوائية بالرمز $E$.

**فضاء العينة**

إن فضاء العينة المتعلق بالتجربة $E$ هو المجموعة الجامعة المؤلفة من جميع النتائج الممكنة للتجربة العشوائية $E$ ويرمز له بالرمز $S$.

**مثال(1):** فضاء العينة في تجربة رمي قطعة نقود منتظمة يتألف من العنصرين $H$(Heat) وكتابة(Tail) $T$ أي أن $S = \{H,T\}$ .

**مثال(2):** فضاء العينة في تجربة رمي زهرة نرد منتظمة هو $S = \{1,2,3,4,5,6\}$.

**مثال(3):** فضاء العينة في فحص فصيلة الدم لشخص ما هو $S = \{A , B , AB , O\}$.

**مثال(4):** فضاء العينة في عمر جهاز الكتروني هو $S = \{t, t \geq 0\}$ حيث $t$ تمثل عمر الجهاز الالكتروني (مثلا بالسنة).

**ملاحظة:** إذا كانت $S_1, S_2, ......., S_r$ تمثل فضاءات عينة متعلقة بالتجارب العشوائية $E_1, E_2, ......., E_r$ فان فضاء العينة الناجم عن ضم التجارب $E_1, E_2, ......., E_r$ معا هو $S = S_1 \times S_2 \times ....... \times S_r$ .

وإذا كان عدد العناصر في $S_i$ هو $k_i$ حيث $(i = 1,2,\ldots,r)$ فان عدد العناصر في $S$ هو $n = k_1 \times k_2 \times ..... \times k_r$ .

**مثال:-** في تجربة رمي قطعة نقود وزهرة نرد معا اوجد فضاء العينة لهذه التجربة.

الحل/ في حالة رمي قطعة النقود $S_1 = \{H,T\} \quad , \quad k_1 = 2$

في حالة رمي زهر النرد $S_1 = \{1,2,3,4,5,6\} \quad , \quad k_1 = 6$

$\therefore$ $S$ تحتوي على $2 \times 6 = 12$ حالة ممكنة لفضاء العينة الناجم من ضم هذه التجربتين.

$$S = S_1 \times S_2 = \{H,T\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$S = \begin{Bmatrix} (H,1),(H,2),(H,3),(H,4),(H,5),(H,6) \\ ,(T,1),(T,2),(T,3),(T,4),(T,5),(T,6) \end{Bmatrix}$$

**الحادثة Event:** هي أي مجموعة جزئية في فضاء العينة $S$.

**مثال:–** في تجربة رمي حجر النرد سيكون فضاء العينة (فضاء الاحتمال) $S=\{1,2,3,4,5,6\}$. مثلا إذا كان $A$ يمثل حادثة وقوع عدد فردي فان $A=\{1,3,5\}$.

**مثال:–** في تجربة رمي قطعة نقود وزهرة نرد مرة واحدة، ظهور الصورة مع عدد يقبل القسمة على 3 هو حادثة معرفة في $S$ حيث أن:

فضاء العينة (فضاء الاحتمال)
$$S=\begin{Bmatrix}(H,1),(H,2),(H,3),(H,4),(H,5),(H,6)\\ ,(T,1),(T,2),(T,3),(T,4),(T,5),(T,6)\end{Bmatrix}$$

حادثة ظهور الصورة مع عدد يقبل القسمة على 3 $A=\{H,3\},\{H,6\}$

**مثال:–** في تجربة رمي زهرتي نرد. افرض أن $x$ يمثل عدد النقاط الظاهرة على وجه الزهر الأول و $y$ يمثل عدد النقاط الظاهرة على وجه الزهر الثاني. المطلوب: 1. اوجد فضاء الاحتمال. 2. جد المجموعة الجزئية $B$ التي تمثل حادثة جزئية في $S$ حيث $B=\{(x,y),6\le x+y\le 9\}$ 3. جد المجموعة الجزئية للحادثة $C=\{(x,y),x+y\ge 7\}$. 4. جد $\boldsymbol{B\cap C}$.

الحل/1. فضاء الاحتمال $S$ يحتوي على $6\times 6=36$ حالة.

$$S=\begin{Bmatrix}(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\end{Bmatrix}$$

2. توجد (20) حالة ممكنة للحادثة $B=\{(x,y),6\le x+y\le 9\}$ وهي

$$B=\begin{Bmatrix}(1,5),(5,1),(1,6),(6,1),(2,4),(4,2),(2,5)(5,2),(2,6),(6,2),\\ (3,3),(3,4),(4,3),(3,5),(5,3),(3,6),(6,3),(4,4),(4,5),(5,4)\end{Bmatrix}$$

3. توجد (21) حالة ممكنة للحادثة $C=\{(x,y),x+y\ge 7\}$ وهي

$$C=\begin{Bmatrix}(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(2,6),(6,2),(3,4),(4,3),(3,5),(5,3),(3,6),(6,3),\\ (4,4),(4,5),(5,4),(4,6),(6,4),(5,5),(5,6),(6,5),(6,6)\end{Bmatrix}$$

4. $\boldsymbol{B\cap C=\{(x,y),7\le x+y\le 9\}}$

$$\boldsymbol{B\cap C=\{(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(2,6),(6,2),(3,4),(4,3),(3,5),(5,3),(3,6),(6,3),(4,4),(4,5),(5,4)\}}$$

**ملاحظات:**

1. يسمى الحدث الذي يحتوي عنصر واحد $\{a\}$ بالحدث الأولي.
2. تعتبر المجموعة الفارغة $\phi=\{\ \}$ حدث مستحيل (حدث غير ممكن).
3. يعتبر فضاء العينة $S$ حدث مؤكد لأنه يحتوي على جميع الحالات الممكنة.

4. فضاء العينة قد يكون محدود (منتهي) مثل رمي ثلاث قطع نقود

$$S=\{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

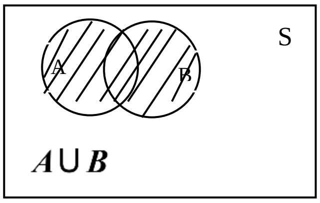
او قد يكون فضاء العينة غير محدود (غير منتهي) مثل رمي قطعة نقود حتى الحصول على الصورة.

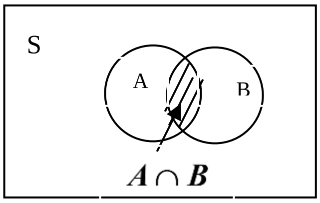
5. يمكننا ربط الأحداث لكي نحصل على إحداث جديدة باستعمال عمليات المجموعة المختلفة وكما يلي:

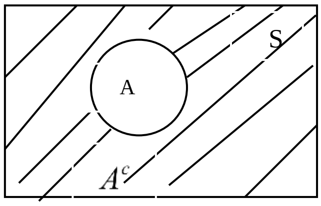
أ. $\boldsymbol{A \cup B}$ هو الحدث الذي يقع بوقوع $A$ أو $B$ أو كلاهما.

ب. $\boldsymbol{A \cap B}$ هو الحدث الذي يقع بوقوع $A$ و $B$ معا (أي وقوع كل من $A$ و $B$ مشتركا).

ج. $A^c$ (متمم $A$) هو الحدث الذي يقع إذا لم يقع $A$.




**مثال:–** عند رمي حجر نرد عبر عن الأحداث التالية:

1. الحصول على عدد زوجي.
2. الحصول على عدد فردي.
3. الحصول على عدد أولي.
4. الحصول على عدد فردي أو أولي.
5. الحصول على عدد فردي أو زوجي.
6. الحصول على عدد ليس فردي.
7. الحصول على عدد يقبل القسمة على 2.
8. الحصول على عدد اكبر من 6.

الحل/ فضاء العينة هو $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

**(1)** $\boldsymbol{A=\{2,4,6\}}$ **(2)** $\boldsymbol{B=\{1,3,5\}}$ **(3)** $\boldsymbol{C=\{2,3,5\}}$

**(4)** $\boldsymbol{B \cup C=\{1,2,3,5\}}$ **(5)** $\boldsymbol{B \cup A = S=\{1,2,3,4,5,6\}}$ **(6)** $\boldsymbol{B^c=\{2,4,6\}}$

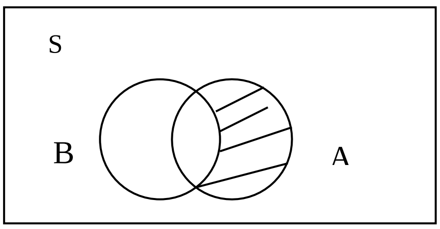
**(7)** $\boldsymbol{\{2,4,6\}}$ **(8)** $\boldsymbol{\phi}$

**ملاحظة:** يمكن التعبير عن الأحداث باستخدام شكل فن.

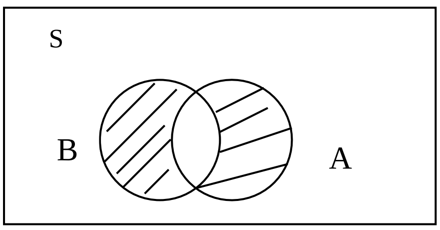
**مثال:–** افرض أن $B,A$ حدثان، عبر عن الحدث ثم كون شكل فن لما يأتي.

1. أن يقع $A$ ولا يقع $B$.
2. وقوع $A$ أو $B$ وليس كلاهما. 3. عدم وقوع A وعدم وقوع B (واجب) $(A \cup B)^c$

الحل/ 1. $\boldsymbol{A \cap B^c}$



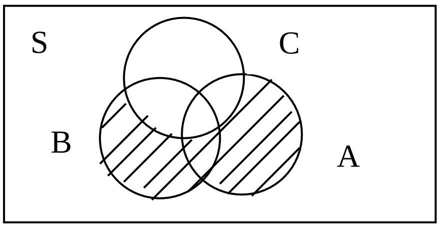

2. $\boldsymbol{(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)}$



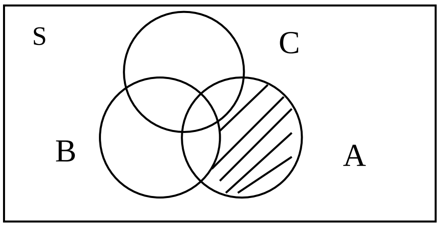
**مثال:–** افرض أن $A,B,C$ أحداث. عبر عن ثم كون شكل فن للأحداث:

1. وقوع $A$ أو $B$ وعدم وقوع $C$. 2. وقوع $A$ فقط.

الحل/ 1. $A \cup B \cap C^c$

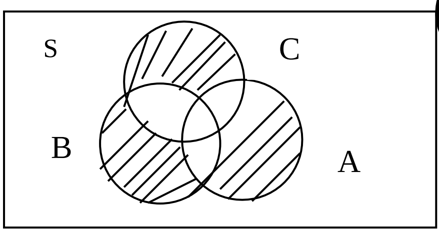



2. $A \cap B^c \cap C^c$

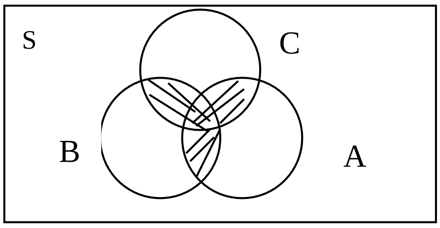



**مثال:–** افرض أن $A,B,C$ أحداث. عبر عن ثم كون شكل فن للأحداث: 1. وقوع حدث واحد بالضبط . 2. وقوع حدثين على الأقل منهما. 3. عدم وقوع أي حدث منهم. 4. وقوع $A$ و$B$ وعدم وقوع $C$. 5. وقوع $A$ و $B$ و$C$.

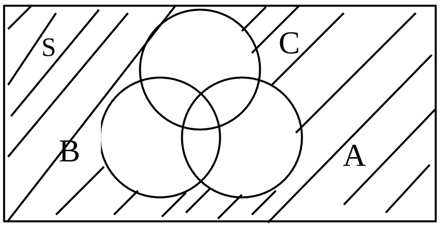
الحل/ 1. $\left(A \cap B^c \cap C^c\right) \cup \left(B \cap A^c \cap C^c\right) \cup \left(C \cap A^c \cap B^c\right)$



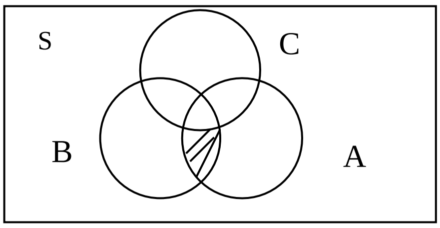

2. $\left(A \cap B\right) \cup \left(A \cap C\right) \cup \left(C \cap B\right)$



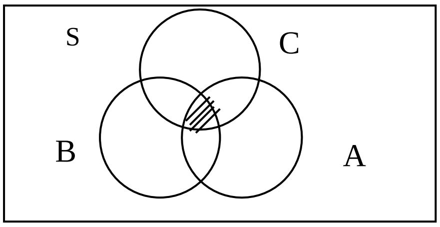

3. $\left(A^c \cap B^c \cap C^c\right) = \left(B \cup A \cup C\right)^c$




4. $\left(A \cap B \cap C^c\right)$




5. $\left(A \cap B \cap C\right)$



**الأحداث المتنافية:-** إذا كان $A,B$ حدثين معرفين على $S$ عندئذ يقال أن هذين الحدثين متنافيين إذا كان وقوع احدهما يمنع وقوع الأخر وهذا يعني $\boldsymbol{A \cap B = \phi}$ . مثلا حادثة ظهور عدد زوجي في تجربة رمي حجر نرد يمنع حادثة ظهور عدد فردي. ايضا حادثة ظهور الصورة عند رمي قطعة نقود منتظمة يمنع ظهور حادثة الكتابة. وبصورة عامة لو كانت الأحداث $A_1, A_2, ....., A_r$ متنافية، فان $\boldsymbol{A_1 \cap A_2 \cap ..... \cap A_r = \phi}$ .

**الأحداث الشــاملة:-** يقال للحدثين $A,B$ شــاملين إذا كان $\boldsymbol{A \cup B = S}$ . لا يشــترط في الأحداث المتنافية أن تكون شاملة.

**مثال:-** القي حجر نرد مرة واحدة. اذا كان $A$ ظهور عدد زوجي، $B$ ظهور عدد فردي، $C$ ظهور عدد أولي. اوجد $\boldsymbol{A \cap C}$، $\boldsymbol{B \cap C}$، $\boldsymbol{A \cup B}$، $\boldsymbol{A \cap B}$، $C^c$، $B^c$، $A^c$ ثم عين الأحداث المتنافية والأحداث الشـاملة والأحداث غير المتنافية.

الحل/ فضاء الاحتمال هو $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ .

$A = \{2,4,6\}$ $\qquad B = \{1,3,5\}$ $\qquad C = \{2,3,5\}$

$A \cap C = \{2\}$ ليست متنافية

$B \cap C = \{3,5\}$ ليست متنافية

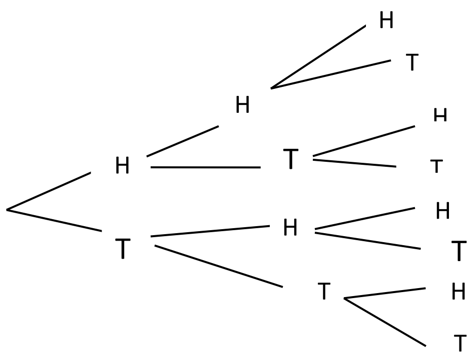
$\boldsymbol{A \cap B = \phi}$ متنافية

$A \bigcup B = \{1,2,3,4,5,6\}$ شاملة

$A^c = \{1,3,5\},$ $\qquad B^c = \{2,4,6\},$ $\qquad C^c = \{1,4,6\}$

**مثال:-** ألقيت قطعة نقود ثلاث مرات. عين الأحداث التالية: 1.ظهور صــورتين أو أكثر. 2. ظهور صــورتين على الأكثر. 3. ظهور كتابة واحدة على الأقل. 4.اوجد اتحاد وتقاطع الأحداث (1) و(2) و(3).

الحل/ لتكن $S_1 = \{H,T\}$ قطعة النقود الاولى، $S_2 = \{H,T\}$ قطعة النقود الثانية و $S_3 = \{H,T\}$ قطعة النقود الثالثة.




$$\therefore S = S_1 \times S_2 \times S_3 = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$$

1. نفرض الحدث $A$ يمثل ظهور صورتين أو أكثر. اذن $A = \{HHH, HHT, HTH, THH\}$

2. نفرض الحدث $B$ يمثل ظهور صورتين على الأكثر. اذن $B = \{HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$

3. نفرض $C$ تمثل ظهور كتابة واحدة على الأقل. اذن $C = \{HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$

4. $C,B,A$ أحداث شاملة $\qquad A \cup B \cup C = S$

$C,B,A$ أحداث ليست متنافية $\qquad A \cap B \cap C = \{HHT, HTH, THH\}$

**طرق العد:**

1. **قاعدة الجمع:** إذا كان هناك عمليتان متنافيتان $B, A$ (حدوث احدهما ينفي حدوث الأخرى). العملية الأولى $A$ يمكن انجازها بـ $n_1$ طريقة و العملية الثانية B يمكن انجازها بـ $n_2$ طريقة مختلفة فان عدد الطرق المختلفة التي يمكن انجاز احدها (الأولى أو الثانية) هو

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

حيث $n(A)$ عدد الطرق المختلفة لإنجاز العملية $A$ و $n(B)$ عدد الطرق المختلفة لإنجاز العملية $B$.

**مثال:–** كم عدد يقبل القسمة على 3 او 5 موجود في الأعداد $1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10$

**الحل/**

$A = \{3, 6, 9\} \quad , \quad n_1 = 3$

$B = \{5,10\} \quad , \quad n_2 = 2$

$\therefore$ عدد الأعداد التي تقبل القسمة على 3 او5 هو $n_1 + n_2 = 3 + 2 = 5$

أما إذا لم تكن العمليتان متنافيتان فعندئذ يجب طرح الطرق التي تكون فيها العمليتين مشتركتين أي

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

**ملاحظة:** يمكن تعميم هذه القاعدة لتشمل أكثر من عمليتين.

**مثال:–** في حجر النرد ما هو عدد طرق الحصول على عدد زوجي أو أولي.

$A = \{2,4,6\} \quad , \quad n(A) = 3$ عدد زوجي

$B = \{2,3,5\} \quad , \quad n(B) = 3$ عدد اولي

$A \cap B = \{2\} \quad , \quad n(A \cap B) = 1$

$\therefore \; n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 3 + 3 - 1 = 5$

**2. قاعدة الضرب:** إذا كان لدينا عملية يمكن انجازها في $n_1$ طريقة مختلفة وإذا تلت هذه العملية عملية ثانية يمكن انجازها في $n_2$ طريقة مختلفة وهكذا إلى العملية $k$ التي يمكن انجازها في $n_k$ طريقة مختلفة فان عدد الطرق المختلفة التي يمكن انجاز جميع هذه العمليات معا هو $n_1 \times n_2 \times n_3 \times ....... \times n_k$.

**مثال:–** إذا كانت اللوحة المعدنية لرقم السـيارة تحتوي على حرفين مختلفين من اللغة الانكليزية يتبعها ثلاثة أرقام بحيث لا يكون الرقم الأول صفر فما هو عدد اللوحات المعدنية التي يمكن طبعها للوحات السيارات.

**الحل/** يمكن كتابة الحرف الأول بعدد 26 طريقة مختلفة والحرف الثاني بعدد 25 طريقة مختلفة ويختار الرقم الأول بتسع طرق مختلفة وكل من الرقمين الآخرين بعشرة طرق. فيكون عدد اللوحات المختلفة التي يمكن طبعها هو

$$26 \cdot 25 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 = 585000$$

## التباديل Permutation

هو عدد طرق الاختيار المرتب التي يمكن تكوينها من عدة أشـياء بأخذها كلها أو بعضـها ويرمز لها بالرمز $p(n,r)$ أو npr أي تباديل r عنصر من n من العناصر. ويحسب من القانون $p(n,r) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

حيث ان $n! = n(n-1)(n-2)....\,2 \times 1$

**مثال:–** ما هو عدد الكلمات المختلفة الممكن تكوينها من كلمة (ربح).

الحل/ $p(3,3)=\frac{3\,!}{(3-3)\,!}=\frac{3\,!}{0\,!}=\frac{3\,!}{1}=3!=3\times2\times1=6$

**مثال:–** ما هو عدد الكلمات المختلفة المكونة من ثلاثة أحرف والتي يمكن اختيارها من كلمة (mosul).

الحل/ لدينا $r=3$ , $n=5$ اذن عدد الكلمات المختلفة هو $\boldsymbol{p(5,3)=\frac{5\,!}{(5-3)\,!}=\frac{5\times4\times3\times2!}{2!}=60}$

**التباديل مع التكرار:** عدد تباديل $n$ عنصــر والتي يكون فيها $n_1$ عنصــرا متماثلا و $n_2$ عنصــرا متماثلا وهكذا ... إلى $n_r$ عنصرا متماثلا هو $\frac{n\,!}{n_1\,!\,n_2\,!\,.......\,n_r\,!}$

**مثال:–** ما هو عدد الكلمات المختلفة الممكن تشكيلها من كلمة (**Too**).

**الحل/** نلاحظ أن عدد الحروف $n=3$ الحرف o مكرر مرتين $n_1=2$ والحرف T يوجد مرة واحدة $n_2=1$

اذن عدد الكلمات المختلفة هو $\frac{n\,!}{n_1\,!\,n_2\,!}=\frac{3\,!}{2!\,1!}=\frac{3\times2\,!}{2!}=3$

**مثال:–** لديك الكلمة ELEVEN. المطلوب (1) اوجد عدد التباديل المختلفة التي يمكن تكوينها من جميع حروف الكلمة ELEVEN. (2) كم كلمة منها تبدأ وتنتهي بالحرف E. (3) كم كلمة منها تكون الثلاثة حروف E فيها متجاورة. (4) كم كلمة منها تبدأ بالحرف E وتنتهي بالحرف N.

1. لدينا $n=6$ و $n_1=3$ والحرف E متكرر 3 مرات $\therefore$ عدد الكلمات المختلفة هو $\frac{n!}{n_1\,!}=\frac{6!}{3!}=120$
2. اذا ثبتنا الحرف E في بداية وفي نهاية الكلمة، يبقى لدينا 4 احرف مختلفة. اذن عدد الكلمات هو $4!=24$ .
3. توجد 4 طرق لكتابة الثلاث حروف EEE متجاورة هي EEEVLN , VEEELN , VLEEEN , VLNEEE وتوجد $3!$ طريقة لتبديل الحروف VLN. لذا يكون عدد الكلمات هو $24=3!\,.\,4\,\therefore$

**طريقة اخرى:** بما ان EEE متجاورة اذن يمكن ان نعتبرها حرفا واحدا. لذا يكون عدد الكلمات هو $4!=24$

4. اذا ثبتنا الحرف E في بداية الكلمة والحرف N في نهاية الكلمة ســـوف يبقى لدينا 4 احرف واثنان منها مكررة. اذن يكون لدينا تباديل مع تكرار والناتج هو $\frac{4!}{2!}=12$ .

**مثال:–** بكم طريقة يمكن لمجموعة من سبعة أشخاص في حفل أن يرتبوا أنفسهم بحيث يجلسون:

1. في صف فيه 7 مقاعد 2. حول مائدة مستديرة.

الحل/ 1. توجد 7 طرق لجلوس الأشخاص $7!=5040$

2. يمكن لشــخص واحد أن يجلس في أي مكان من المائدة المســتديرة ويمكن للأشــخاص الســتة الآخرين أن يرتبوا أنفسهم حول المائدة بطرق عددها $6!=720$

وبصورة عامة يمكن ترتيب $n$ شيء حول دائرة بطرق عددها $(n-1)!$ .

**العينات المرتبة:**

كثيرا ما نختار في علم الاحتمالات كرة من وعاء فيه $n$ من الكرات أو اختيار شخص من مجموعة أشخاص أو اختيار رقم من مجموعة أرقام تسمى هذه العملية باختيار عدد $r$ من المرات بعينة مرتبة حجمها $n$ وهناك حالتين:

**1. المعاينة مع الإحلال:** في هذه الحالة يعاد كل عنصر قبل اختيار العنصر الثاني وحيث انه يوجد دائما $n$ طريقة مختلفة لاختيار كل عنصر وبتطبيق القاعدة الأساسية للعد يكون عدد العينات المرتبة والمختلفة وذات الحجم $r$ مع الإحلال هو $n \times n \times n \times ...... \times n = n^r$

**2. المعاينة بدون إحلال:** في هذه الحالة لا يعاد العنصر إلى الوعاء قبل اختيار العنصر الثاني وبذلك لا توجد تكرارات في العينة المرتبة أو بعبارة أخرى فان العينة المرتبة ذات الحجم $r$ بدون إحلال هي تبديل من الأشياء الموجودة في الوعاء المأخوذة منه وبذلك يوجد $n \times (n-1)(n-2)......(n-r+1) = p(n,r) = \dfrac{n\,!}{(n-r)!}$ عينة مرتبة مختلفة حجمها $r$ بدون إحلال من مجتمع به $n$ من الأشياء أو العناصر.

**مثال:-** وعاء فيه ثمان كرات، اوجد عدد العينات المرتبة ذات الحجم 3 (1) مع الاحلال (2) بدون احلال.

الحل/(1) كل كرة يمكن اختيارها. اذن يوجد $\mathbf{8.8.8 = 512}$

(2) لدينا تباديل حيث $n = 8, r = 3$. اذن عدد العينات المرتبة $p(8,3) = \dfrac{8\,!}{(8-3)!} = \dfrac{8\,!}{5!} = 8.7.6 = 336$

**مثال:-** 1. بكم طريقة مختلفة يمكن لمجموعة مكونة من 3 أولاد وبنتان أن يجلسوا في صف 2. بكم طريقة يمكن أن يجلسوا في صف إذا جلس الأولاد معا والبنات معا. 3. بكم طريقة يمكن أن يجلسوا في صف إذا جلست البنتان فقط معا

**1)** $\mathbf{5\,! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120}$

**2)** $\mathbf{2 \times 2\,! \times 3\,! = 24}$

**3)** $\mathbf{4 \times 3\,! \times 2\,! = 48}$

## التوافيق Combination

إذا كان لدينا $n$ من العناصر، نعرف توافيق $r$ عنصر من $n$ عنصر هو عدد المجاميع الجزئية التي تحتوي على $r$ عنصر دون اعتبار لطريقة الترتيب ويرمز للتوافيق بالرمز $C_n^r$ أو $\binom{n}{r}$ ويعرف بالقانون $\binom{n}{r} = \dfrac{n\,!}{r\,!\,(n-r)\,!}$

**مثال:-** كم لجنة ثلاثية يمكن تكوينها من 8 أشخاص؟

$$\binom{8}{3} = \frac{8\,!}{3!\,(8-3)\,!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5\,!}{3 \times 2 \times 5\,!} = 56$$

**مثال:-** بكم طريقة مختلفة يمكن لطالب الإجابة على 4 من 6 أسئلة على أن يكون السؤال الأول والثاني ضمن الأربعة؟

يوجد سؤالين اجباريين، اذن يبقى اختيار 2 من 4 اسئلة. اذن عدد الطرق هو $6 = \dfrac{4 \times 3 \times 2\,!}{2 \times 2} = \dfrac{4\,!}{2!\,2!} = \binom{4}{2}$

**مثال:–** سيدة لها (11) صديقة. بكم طريقة يمكن أن تدعوا (1) 5 أصدقاء إلى العشاء. (2) 5 أصدقاء إلى العشاء 2 منهم متزوجان ويجب حضورهما معا. (3) 5 أصدقاء إلى العشاء إذا كان 2 منهم متخاصمين ولا يمكنهما الحضور معا.

$$(1)\qquad \binom{11}{5}=\frac{11!}{5!\,6!}=462$$

(2) افرض أن $A$ و $B$ متزوجان. إذا حضر $A$ و $B$ نوجد $\binom{2}{2}\binom{9}{3}$ و إذا لم يحضر $A$ و $B$ نوجد $\binom{2}{0}\binom{9}{5}$

$$\therefore \binom{2}{2}\binom{9}{3}+\binom{9}{5}=84+126=210$$

(3) افرض أن $B,A$ الشخصان المتخاصمان. إذا حضر احدهما $\binom{2}{1}\binom{9}{4}$ وإذا لم يحضر كلاهما توجد $\binom{2}{0}\binom{9}{5}$

$$\therefore \binom{2}{1}\binom{9}{4}+\binom{2}{0}\binom{9}{5}=252+126=378$$

**مثال:–** عدد الحروف الهجائية في اللغة الانكليزية 26 حرف من بينها 5 حروف متحركة، اذا اردنا تكوين كلمة من 5 حروف بحيث تحتوي على ثلاثة حروف مختلفة غير متحركة وعلى حرفين مختلفين متحركين. المطلوب:

(1) كم عدد الكلمات المكونة. (2) كم كلمة منها تحتوي على الحرف B. (3) كم كلمة منها لا تحتوي على الحرفين B وC. (4) كم كلمة منها تبدأ بالحرف B وتحتوي على الحرف C. (5) كم كلمة منها تحتوي على الحرفين A و B. (6) كم كلمة منها تبدأ بالحرف A وتحتوي على الحرف B.

الحل/ يوجد 5 حروف متحركة a,e,i,o,u ويوجد 26−5=21 غير متحركة $n_1=5$

$$(1)n_1=\binom{21}{3},n_2=\binom{5}{2},n_3=5!$$

$$\binom{21}{3}\binom{5}{2}5!=1596000 \qquad (2)\binom{1}{1}\binom{20}{2}\binom{5}{2}5!=228000$$

$$(3)\binom{19}{3}\binom{5}{2}5!=1162800 \qquad (4)\binom{2}{2}\binom{19}{1}\binom{5}{2}4!=4560$$

$$(5)\binom{1}{1}\binom{20}{2}\binom{1}{1}\binom{4}{1}5!=91200 \qquad (6)\binom{1}{1}\binom{20}{2}\binom{1}{1}\binom{4}{1}4!=18240$$

**مثال:–** بكم طريقة يمكن اختيار لجنة تتكون من ثلاثة رجال وسيدتين من بين سبعة رجال وخمسة سيدات.

الحل/ توجد $\binom{7}{3}$ طريقة مختلفة لاختيار 3 من 7 رجال و توجد $\binom{5}{2}$ طريقة مختلفة لاختيار سيدتين من 5 سيدات.

$\therefore$ عدد اللجان المختلفة $\displaystyle \binom{7}{3}\binom{5}{2}=\frac{\mathbf{7.6.5.4!}}{\mathbf{3!4!}}\times\frac{\mathbf{5.4.3!}}{\mathbf{2!3!}}=\mathbf{35\times10=350}$

**مثال:–** فصل دراسي به تسعة طلبة وثلاث طالبات 1. كم عدد الطرق المختلفة التي يمكن أن يختار بها المدرس لجنة مكونة من أربعة. 2. بكم طريقة منها توجد في اللجنة طالبة واحدة على الأقل. 3. بكم طريقة منها توجد في اللجنة طالبة واحدة فقط.

$$(1)\quad \binom{12}{4}=\frac{12!}{4!8!}=495 \qquad (2)\quad \binom{3}{1}\binom{9}{3}+\binom{3}{2}\binom{9}{2}+\binom{3}{3}\binom{9}{1}=369 \qquad (3)\quad \binom{3}{1}\binom{9}{3}=252$$

## التجزيئات المرتبة

عملية حساب عدد التجزيئات المرتبة لعناصر مجموعة $A$ إلى تجزيئات مرتبة مثلا $A_1, A_2, ....., A_n$ .

**مبرهنة:–** افرض أن مجموعة تحتوي على $n$ عنصر وان $n_1+n_2+.....+n_r=n$ ( $n_i$ أعداد صحيحة)

إذن عدد التجزيئات المرتبة لعناصر المجموعة هو $\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,.....\,n_r!}$

**ملاحظة:–** المجموعة $A_1$ تحتوي على $n_1$ عنصر والمجموعة الثانية $A_2$ تحتوي على $n_2$ عنصر .... والمجموعة $A_r$ تحتوي على $n_r$ عنصر.

**مثال:–** بكم طريقة يمكن توزيع (9) العاب على أربعة أطفال بحيث يتلقى الطفل الأصـــغر ثلاثة لعب وكل طفل أخر لعبتين ؟

الحل/ طريقة أولى:– عدد الطرق المختلفة(عدد التجزيئات المرتبة) هو

$$\frac{9!}{3!\,2!\,2!\,2!}=\frac{9\times8\times7\times6\times5\times4\times3!}{3!\,2\times2\times2}=7560$$

طريقة ثانية:– توجد $\binom{9}{3}=n_1$ لاختيار الطفل الأصـــغر. توجد $\binom{6}{2}=n_2$ لاختيار الطفل الثاني.

توجد $\binom{4}{2}=n_3$ لاختيار الطفل الثالث. توجد $\binom{2}{2}=n_1$ لاختيار الطفل الرابع.

$$\binom{9}{3}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}=\frac{9!}{3!\,6!}\times\frac{6!}{2!\,4!}\times\frac{4!}{2!\,2!}\times\frac{2!}{2!}=\frac{9\times8\times7\times6!}{3\times2\times6!}\times\frac{6\times5\times4!}{2\times4!}\times\frac{4\times3\times2}{2\times2}$$
$$=9\times8\times7\times3\times5=7560$$

**العلاقة بين التوافيق والتباديل:**

$$p(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}\Rightarrow\binom{n}{r}=\frac{1}{r!}p(n,r)$$

$$p(n,r)=r!\binom{n}{r}$$

**معاملات ذات الحدين – نظرية ذات الحدين:–**

$$(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}b^r a^{n-r}=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+......+b^n$$

**مبرهنة:–** اثبت أن $\binom{n+1}{r}=\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r}$

**البرهان:** الطرف الأيمن $\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r}$

$$=\frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}+\frac{n!}{r!(n-r)!}=\frac{rn!}{r!(n-r+1)!}+\frac{n!(n-r+1)}{r!(n-r+1)!}$$

$$=\frac{rn!+nn!-rn!+n!}{r!\,(n-r+1)!}=\frac{(n+1)n!}{r!\,(n-r+1)!}=\frac{(n+1)!}{r!\,(n+1-r)!}=\binom{n+1}{r}$$

**نتيجة:** $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$

الطرف الأيمن: $\binom{n}{n-r}=\frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!}=\frac{n!}{(n-r)!\,r!}=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$

**مثال:–**

$$\binom{6}{2}=\frac{6\,!}{2\,!\,4\,!}=\frac{6\times5\times4\,!}{4\,!}=15$$

$$\binom{6}{4}=\frac{6\,!}{4\,!\,2\,!}=15$$

ممكن تعميم نظرية ذي الحدين المتعدد حدود.

$$(a_1+a_2+.....+a_r)^n=\sum\binom{n}{n_1 . n_2 ..... n_r}a_1^{n_1}\,a_2^{n_2}\,....a_r^{n_r}$$

حيث أن $n_1+n_2+.....+n_r=n$

$$\binom{n}{n_1 . n_2 ..... n_r}=\frac{n\,!}{n_1\,!\,n_2\,!\,....n_r\,!}\ ,\ 0\le n_i\le n\ ,\ \forall\, i=1,2,...,r$$

**مثال:–** بسط المقدار $(x_1+x_2+x_3)^2$.

$$(x_1+x_2+x_3)^2=\binom{2}{200}x_1^2\ x_2^0\ x_3^0+\binom{2}{020}x_1^0\ x_2^2\ x_3^0+\binom{2}{200}x_1^2\ x_2^0\ x_3^0$$

$$+\binom{2}{110}x_1\ x_2\ x_3^0+\binom{2}{101}x_1\ x_2^0\ x_3+\binom{2}{011}x_1^0\ x_2\ x_3$$

$$(x_1+x_2+x_3)^2=\frac{2\,!}{2\,!\,0\,!\,0\,!}=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$$

**مثال:–** احسب كلا من معاملات متعدد(كثير) الحدود التالية:

$i)\quad \binom{6}{3\quad 2\quad 1}\qquad\qquad ii)\quad \binom{10}{5\ 3\ 2\ 2}$

$$i)\quad \binom{6}{3\quad 2\quad 1}=\frac{6\,!}{3\,!\,2\,!\,1\,!}=\frac{6\times5\times4\times3\,!}{3\,!\,2\times1}=60$$

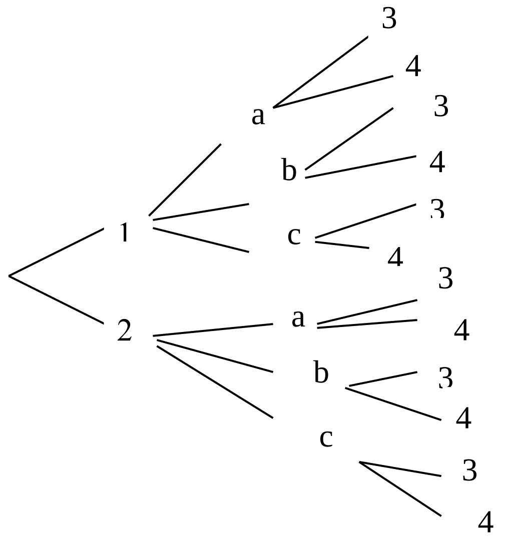
$(ii$ ليس له معنى لان $n_1+n_2+n_3+n_4=5+3+2+2\ne10$ وان

$n_i=12\ ,\ n=10\ ,\ n_i\ge n$ ، لذلك ليس له معنى.

**الأشجار البيانية**

هي طريقة تستعمل لحصر كل النواتج الممكنة لمتتابعة من التجارب إذا كان من الممكن أن تقع كل تجربة بعدد منته من الطرق.

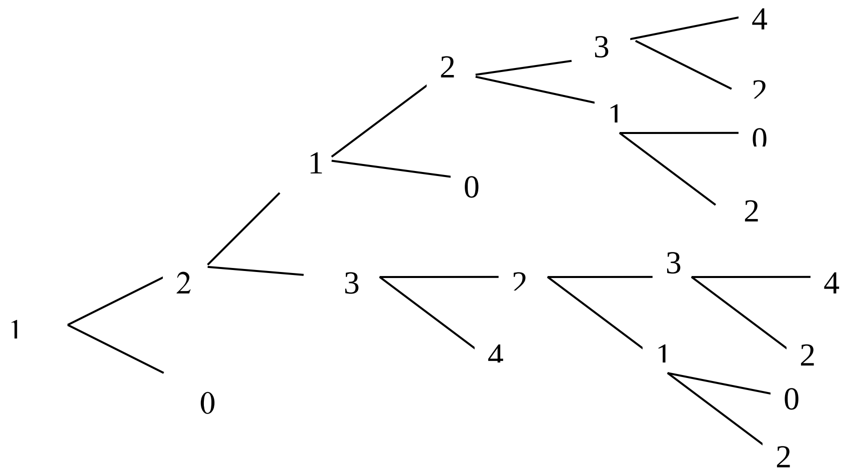
**مثال:–** اوجد مجموعة حاصل الضرب $A\times B\times C$ إذا كان $A=\{1,2\}, B=\{a,b,c\}, C=\{3,4\}$ .




$(1,a,3),(1,a,4),(1,b,3),(1,b,4),(1,c,3),(1,c,4),(2,a,3),(2,a,4),(2,b,3),(2,b,4),(2,c,3),(2,c,4)$

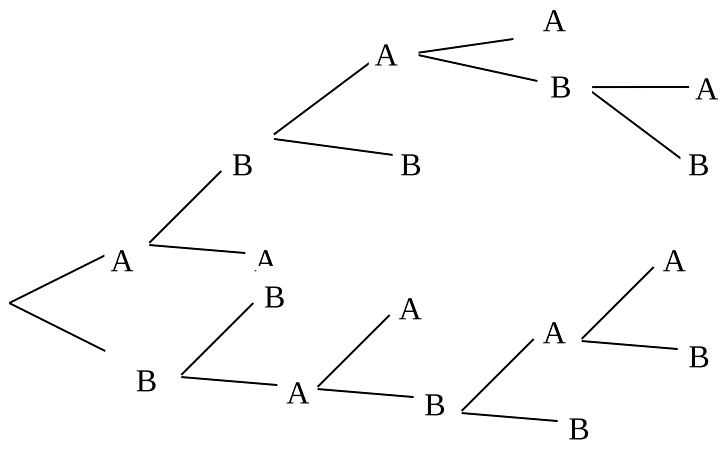
لاحظ الشجرة مركبة من اليسار إلى اليمين وان عدد الأفرع في كل نقطة يكافئ عدد النواتج الممكنة للتجربة التالية.

**مثال:–** يعتزم رجل أن يلعب روليت على الأكثر خمس مرات(في كل مرة يكسب أو يخسر جنيه واحدا) فإذا كان معه جنيه واحد واعتزم التوقف عن اللعب قبل نهاية المرات الخمس إذا خسر كل ما معه أو كسب ثلاث جنيهات.فاوجد عدد الطرق التي يمكن أن تجري بها المراهنة.




$(1,0),(1,2,1,0),(1,2,1,2,1,2),(1,2,1,2,1,0),(1,2,1,2,3,2),(1,2,1,2,3,4),(1,2,3,4),$
$(1,2,3,2,1,2),(1,2,3,2,1,0),(1,2,3,2,3,4),(1,2,3,2,3,2)$

**مثال:–** يلعب احمد وجاسم مباراة في التنس ويفوز بالمباراة اللاعب الذي يفوز بشوطين متتاليين أو ثلاثة أشواط على طول المباراة اوجد عدد النتائج الممكنة لهذه اللعبة.




$(A,A),(A,B,B),(A,B,A,A),(A,B,A,B,B),(A,B,A,B,A),$
$(B,B),(B,A,A),(B,A,B,B),(B,A,B,A,A),(B,A,B,A,B)$

## تعريف الاحتمال Definition of Probability

افرض أن عدد النتائج الممكنة في تجربة عشـوائية هو $(n)$ نمن النتائج المتنافية وذات نفس الفرصـة في الوقوع وان $m$ حيث $(m \le n)$ من هذه النتائج ممكنة الوقوع في حادثة معينة مثل $A$ معرفة على $S$ فان احتمال حدوث $A$ يرمز له بالرمز $p(A)$ أو $p_r(A)$ يعرف كالأتي:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{عدد الحالات التي يمكن أن يقع بها } A}{\text{عدد الحالات الكلية الممكنة في فضاء العينة } S}$$

وغالبا ما يشار إلى $p$ على انه احتمال نجاح وقوع الحادثة $A$ في حين أن فشل وقوع $A$ هو $q = 1 - p$

$$q = 1 - \frac{m}{n} = \frac{n-m}{n} \qquad , \qquad 0 \le p \le 1$$

**مثال:**– القي حجر نرد اوجد (1) احتمال الحصول على عدد زوجي (2) احتمال الحصول على عدد فردي (3) احتمال الحصول على عدد أولي (4) احتمال الحصول على عدد أولي وزوجي.

$S = \{1,2,3,4,5,6\}$

$A$ = {الحصول على عدد زوجي} =$\{2,4,6\}$

$B$ = {الحصول على عدد فردي} =$\{1,3,5\}$

$C$ = {الحصول على عدد أولي} =$\{2,3,5\}$

$D$ = {الحصول على عدد اولي وزوجي} =$\{2\}$

$$p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad , p(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad p(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad p(D) = \frac{1}{6}$$

حقل سكما $\boldsymbol{\sigma}$ **– field** : ليكن S مجموعة غير جزئية. يعرف حقل سكما F على S بانه مجموعة المجاميع الجزئية من S التي لها الخواص التالية:

**1.** المجموعة الخالية $\boldsymbol{\phi \in S}$

**2.** اذا كانت $\boldsymbol{A \in S}$ **فان** $\boldsymbol{A^c \in S}$

**3.** إذا كانت $A_1 , A_2 , A_3 ,........$ متتابعة من المجاميع في S فان اتحادهم $\bigcup_{i=1}^{n} \boldsymbol{A_i}$ **يكون ايضا في S .**

**مقياس الاحتمال (بديهيات الاحتمال)**

ليكن F حقل سكما معرف على فضاء الاحتمال S. فان مقياس الاحتمال p هو دالة $\boldsymbol{p}: \boldsymbol{F} \to [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}]$ ويسمى العدد $P(A)$ احتمال الحدث $A$ إذا حققت الشروط الآتية:

1. لكل حدث $A$ فان $0 \le p(A) \le 1$.
2. $p(S) = 1$ (حدث مؤكد).
3. إذا كان $A$ , $B$ حدثين متنافيين أي $(A \cap B = \phi)$ فان :

$$(A \text{ or } B) = p(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

يمكن تعميم هذه البديهية كما يلي:

إذا كانت الأحداث $A_1 , A_2 , A_3 ,........$ متنافية مثنى مثنى $(A_i \cap A_j = \phi \quad \forall i \ne j)$ فان

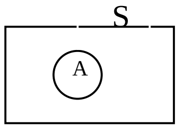
$$p(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup .......) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + .......$$

وهذا يعني ان مقياس الاحتمال(الاحتمال) p هو دالة مجالها هو حقل سكما F ومجالها المقابل هوقيمة بين 0 و1.

**فضاء الاحتمال:** هو فضاء يتكون من $(\mathbf{S}, \mathbf{F}, \mathbf{p})$ حيث ان S فضاء العينة وF هو حقل سكما و p الاحتمال. المجاميع الجزئية ضمن F تسمى احداث.

**مبرهنة (1):** إذا كانت $\phi$ المجموعة الخالية فان $p(\phi)=0$ .

**البرهان:** نفرض أن $A$ أي حدث في فضاء العينة $S$.




$\therefore\ A\cup\phi=A$

$P(A\cup\phi)=P(A)$

$\because\ \phi, A$ حدثان متنافيان

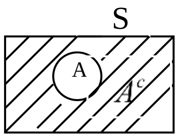
$\therefore\ p(A\cup\phi)=p(A)+p(\phi)$

$\Rightarrow p(A)+p(\phi)=p(A)$

$\Rightarrow P(\phi)=0$

**مبرهنة (2):** إذا كانت $A^c$ هو الحدث المكمل للحدث $A$ فان $p(A^c)=1-p(A)$

**البرهان:** من الممكن تجزئة فضاء العينة $S$ إلى حدثين متنافيين هما $A^c, A$ أي أن:




$S=A\cup A^c$

$p(S)=P(A\cup A^c)=P(A)+P(A^c)$

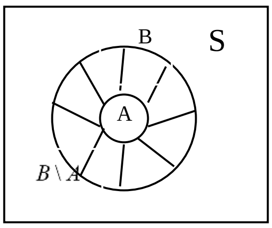
$\because p(S)=1$ حسب بديهية (2)

$\Rightarrow p(A)+p(A^c)=1$

$\therefore\ p(A^c)=1-p(A)$

**مبرهنة (3):** إذا كان $A\subset B$ فان $p(A)\le p(B)$ .

**البرهان:** من الممكن تجزئة الحدث $B$ إلى حدثين متنافيين هما $B\setminus A\ ,\ A$




$\therefore\ B=A\cup B\setminus A\Rightarrow P(B)=P(A\cup B\setminus A)$

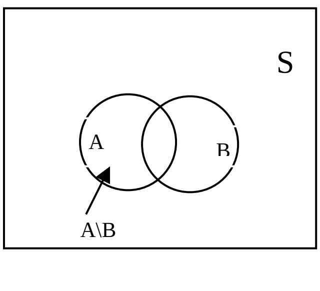
$\therefore P(B)=P(A)+P(B\setminus A)$

$\because 0\le P(B\setminus A)\le 1$

$\Rightarrow P(A)\le P(B)$

**مبرهنة (4):** إذا كان $A,B$ حدثين فان $p(A\setminus B)=p(A)-P(A\cap B)$

**البرهان:** من الممكن تجزئة الحدث $A$ إلى حدثين متنافيين هما $A\setminus B\ ,\ A\cap B$




$\therefore\ A=(A\setminus B)\cup(A\cap B)$

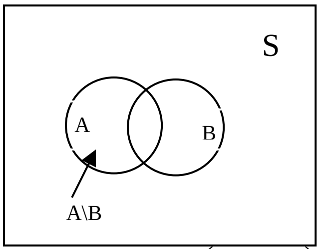
$P(A)=P(A\setminus B)\cup P(A\cap B)$

$P(A)=P(A\setminus B)+P(A\cap B)$

$\therefore P(A\setminus B)=P(A)-P(A\cap B)$

**مبرهنة (5):** إذا كان $A, B$ حدثين فان $p(A\cup B)=p(A)+P(B)-P(A\cap B)$

**البرهان:** من الممكن تجزئة الحدث $A\cup B$ إلى حدثين متنافيين هما $A\setminus B\ ,\ B$




$$\therefore\ A\cup B=(A\setminus B)\cup B$$

$$P(A\cup B)=P(A\setminus B)+P(B)$$

$$P(A\setminus B)=P(A)-P(A\cap B)$$

$$\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

**نتيجة:** إذا كان $A, B, C$ أية أحداث فان

$$.\ p(A\cup B\cup C)=p(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

**البرهان:** نفرض أن $D=B\cup C$

$$\Rightarrow A\cup D=A\cup(B\cup C)$$

$$\therefore P(A\cup(B\cup C))=P(A\cup D)$$

$$=P(A)+P(D)-P(A\cap D) \qquad (1)$$

$$P(D)=P(B\cup C)$$

$$P(D)=P(B)+P(C)-P(B\cap C) \qquad (2)$$

$$A\cap D=A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

$$\therefore P(A\cap D)=P(A\cap B)+P(A\cap C)-P(A\cap B\cap C)\ldots\ldots\ldots(3)$$

الآن نعوض(2) و (3) في(1):

$$\therefore P(A\cup(B\cup C))=P(A)+P(D)-P(A\cap D)$$

$$=P(A)+(P(B)+P(C)-P(B\cap C))-(P(A\cap B)+P(A\cap C)-P(A\cap B\cap C))$$

$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(B\cap C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

من الممكن تعميم المبرهنة(5) إلى $r$ من الأحداث: افرض أن $A_1, A_2, \ldots.., A_r$ أحداثا فان

$$P(A_1\cup A_2\cup\ldots..\cup A_r)=\sum_{i=1}^{r}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_i\cap A_j)+\sum_{i<j<k}P(A_i\cap A_j\cap A_k)+\ldots\ldots+(-1)^{r-1}P(A_1\cap A_2\cap\ldots..\cap A_r)$$

ممكن برهنة هذه النظرية بطريقة الاستنتاج الرياضي.

**مثال:**– افرض أن فضـــاء العينة $S$ مكون من 4 عناصـــر $S=\{a_1 , a_2 , a_3 , a_4\}$ أي من الدوال الآتية تعرف فضـــاء احتمال على $S$.

$$(1)\quad P(a_1)=\frac{1}{2}\ ,\ P(a_2)=\frac{1}{2}\ ,\ P(a_3)=\frac{1}{3}\ ,\ P(a_4)=\frac{1}{5}$$

$$(2)\quad P(a_1)=\frac{1}{2}\ ,\ P(a_2)=\frac{1}{2}\ ,\ P(a_3)=\frac{-1}{3}\ ,\ P(a_4)=\frac{1}{2}$$

$$(3)\quad P(a_1)=\frac{1}{2}\ ,\ P(a_2)=\frac{1}{4}\ ,\ P(a_3)=\frac{1}{8}\ ,\ P(a_4)=\frac{1}{8}$$

(1) ليس فضاء احتمال وذلك لعدم تحقق الشرط الثاني.

(2) ليس فضاء احتمال وذلك لعدم تحقق الشرط الأول.

(3) فضاء احتمال لأنه يحقق الشرط الأول والثاني.

**مثال:**– افرض أن $A , B$ حدثان بحيث أن $P(B^c)=\frac{5}{8}\ ,\ P(A\cup B)=\frac{3}{4}\ ,\ P(A)=\frac{1}{2}$ اوجد احتمال:

$P(A\cap B)$ ،$P(A^c\cap B^c)$ ،$P(A^c\cup B^c)$ ،$P(A\cup B^c)$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{3}{8}-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{8}$$

$$P(A^c\cap B^c)=P(A\cup B)^c=1-P(A\cup B)=1-\frac{3}{8}=\frac{1}{4}$$

$$P(A^c\cup B^c)=P(A\cap B)^c=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

$$P(A\cap B^c)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

**الفضـــاء ذو الاحتمالات الغير المتســـاوية (الفضـــاء غير المنتظم):** يســمى فضـــاء العينة المنتهي $S$ بالفضـــاء ذو الاحتمالات الغير المتســاوية إذا كانت احتمالات نقاط المعاينة غير متســاوية. اي ان احتمالات العناصــر في فضـــاء العينة (فضاء الاحتمال) غير متساوية جميعها.

**مثال:**– يتســابق ثلاث طلبة $A , B , C$ في الســباحة، إذا كان احتمال فوز $A$ يســاوي احتمال فوز $B$ واحتمال فوز $A$ ضعف احتمال فوز $C$ اوجد: (1) احتمال فوز كل منهم (2) احتمال فوز $A$ أو $B$ (3) احتمال فوز $B$ أو $C$.

الحل/ نفرض احتمال فوز C هو $p(C)=p$ . اذن $p(A)=p(B)=2p(C)=2p$ . حسب البديهية 2 يكون:

$$(1)\quad P(A)+P(B)+P(C)=1$$

$$\Rightarrow 2P(C)+2P(C)+P(C)=1\Rightarrow 5P(C)=1\quad\Rightarrow\quad P(C)=\frac{1}{5}$$

$$\therefore P(A)=\frac{2}{5}\qquad ,\qquad P(B)=\frac{2}{5}\qquad ,\qquad P(C)=\frac{1}{5}$$

$$(2)\quad P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{2}{5}+\frac{2}{5}=\frac{4}{5}$$

$$(3)\quad P(B)+P(C)=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$$

**مثال:–** في إحدى بطولات الشـطرنج تقدم رجلان $M_1, M_2$ وثلاث سـيدات $W_1, W_2, W_3$ وكان احتمال فوز الرجال متســاوي واحتمال فوز الســيدات متســاوي أيضــا ولكن احتمال فوز الرجل ضــعف احتمال فوز الســيدة في المباراة. المطلوب: $(1)$ اوجد احتمال فوز إحدى الســـيدات بالبطولة. $(2)$ إذا كان $W_1, M_1$ متزوجين فما هو احتمال أن يفوز احدهما بالبطولة؟

الحل/ فضــاء العينة هو $S=\{M_1, M_2, W_1, W_2, W_3\}$. بما ان احتمال فوز الرجال متســاوي، اذن $p(M_1)=P(M_2)$. بما ان احتمال فوز السيدات متساوي، اذن $p(W_1)=P(W_2)=P(W_3)$.

افرض أن احتمال فوز السيدة $= p \Leftarrow$ احتمال فوز الرجل $= 2p$ ، حسب البديهية 2 من بديهيات الاحتمال يكون:

$$p(M_1)+p(M_2)+p(W_1)+p(W_2)+p(W_3)=1$$

$$2p+2p+p+p+p=1 \quad \Rightarrow \quad 7p=1 \quad \Rightarrow \quad p=\frac{1}{7}$$

$\therefore$ احتمال فوز السيدة $p=\frac{1}{7} \Leftarrow$ احتمال فوز الرجل $2p=\frac{2}{7}$.

1. $$p(W_1 \cup W_2 \cup W_3)=p(W_1)+p(W_2)+p(W_3)=\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}=\frac{3}{7}$$

2. $$p(W_1 \cup M_1)=p(W_1)+p(M_1)=\frac{1}{7}+\frac{2}{7}=\frac{3}{7}$$

**مثال:–** تتسابق ثلاث جياد $A, B, C$ معا فإذا كان احتمال فوز $A$ هو ضعف احتمال فوز $B$ واحتمال فوز $B$ ضعف احتمال فوز $C$ فما هو احتمال فوز كل منهم.

الحل/ نفرض احتمال فوز C هو $p(C)=p$ . اذن $p(B)=2p(C)=2p$ و $p(A)=2p(B)=4p$ . حسب البديهية 2:

$$p+2p+4p=1 \quad \Rightarrow 7p=1 \quad \Rightarrow \quad p=\frac{1}{7}$$

$$\therefore p(C)=\frac{1}{7} \qquad , \qquad p(B)=\frac{2}{7} \qquad , \qquad p(A)=\frac{4}{7}$$

**مثال:–** صنعت قطعة نقود بحيث يكون احتمال ظهور الصورة ضعف احتمال ظهور الكتابة في الرمية الواحدة. اوجد $P(T)$ و $P(H)$.

الحل/ افرض أن احتمال ظهور الكتابة $P(T)=p \Leftarrow$ احتمال ظهور الصــورة $P(H)=2p$ ، حســب البديهية 2 من بديهيات الاحتمال يكون:

$$p(T)+p(H)=1$$

$$p+2p+=1 \quad \Rightarrow 3p=1 \Rightarrow \quad p=\frac{1}{3}$$

$\therefore$ احتمال ظهور الكتابة $P(T)=p=\frac{1}{3} \Leftarrow$ احتمال ظهور الصورة $P(H)=2p=\frac{2}{3}$

**مثال:-** صنع حجر نرد بحيث يكون احتمال ظهور الاعداد الزوجية متساوي واحتمال ظهور الاعداد الفردية متساوي واحتمال ظهور اي عدد زوجي ضـــعف احتمال ظهور اي عدد فردي. اوجد احتمال (1) ظهور عدد زوجي. (2) ظهور عدد اولي (3) ظهور عدد فردي. (4) ظهور عدد فردي اولي.

الحل/ فضاء العينة هو $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ . بما ان احتمال ظهور الاعداد الزوجية متساوي، اذن $p(2)=P(4)=p(6)$ . بما ان احتمال ظهور الاعداد الفردية متساوي، اذن $p(1)=P(3)=P(5)$ .

افرض أن احتمال ظهور اي عدد فردي = $p$ ⟸ احتمال ظهور اي عدد زوجي = $2p$ ، حسب البديهية 2 يكون:

$$p(1)+p(2)+p(3)+p(4)+p(5)+p(6)=1$$

$$p+2p+p+2p+p+2p=1 \Rightarrow 9p=1 \Rightarrow p=\frac{1}{9}$$

∴ احتمال ظهور الاعداد الفردية $p(1)=P(3)=P(5)=\frac{1}{9}$ ⟸ احتمال ظهور الاعداد الزوجية $p(2)=P(4)=P(6)=\frac{2}{9}$

$$A=\{2,4,6\} \quad , \quad B=\{2,3,5\} \quad , \quad C=\{1,3,5\}$$

1) $P(A)=P(2)+P(4)+P(6)=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$

2) $P(B)=P(2)+P(3)+P(5)=\frac{2}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{4}{9}$

3) $P(C)=P(1)+P(3)+P(5)=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

4) $B\cap C=\{3,5\} \Rightarrow P(B\cap C)=P(3)+P(5)=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2}{9}$

**مثال:-** صنع حجر نرد بحيث يكون احتمال ظهور العدد متناسبا مع العدد نفسه (مثلا احتمال ظهور 6 هو ضعف احتمال ظهور 3) افرض أن $A$ تمثل ظهور عدد زوجي، $B$ عدد أولي، $C$ عدد فردي. المطلوب (1) صف فضاء الاحتمال(اوجد احتمال كل نقطة). (2) اوجد $P(A),P(B),P(C)$. (3) اوجد احتمال كل من: أ. أن يظهر عدد أولي أو عدد زوجي. ب. أن يظهر عدد أولي و فردي. ج. أن يقع $A$ ولا يقع $B$.

الحل/ فضاء العينة هو $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

(1) $P(1)=P \quad , \quad P(2)=2P \quad , \quad P(3)=3P \quad , \quad P(4)=4P \quad , \quad P(5)=5P \quad , \quad P(6)=6P$

$$\therefore P+2P+3P+4P+5P+6P=1 \Rightarrow \therefore 21P=1 \Rightarrow P=\frac{1}{21}$$

$$\therefore P(1)=P=\frac{1}{21} \ , \ P(2)=2P=\frac{2}{21} \ , \ P(3)=3P=\frac{3}{21} \ ,$$

$$P(4)=4P=\frac{4}{21} \ , \ P(5)=5P=\frac{5}{21} \ , \ P(6)=6P=\frac{6}{21}$$

(2) $A=\{2,4,6\}$ , $B=\{2,3,5\}$ , $C=\{1,3,5\}$

$$P(A)=P(2)+P(4)+P(6)=\frac{2}{21}+\frac{4}{21}+\frac{6}{21}=\frac{12}{21}$$

$$P(B)=P(2)+P(3)+P(5)=\frac{2}{21}+\frac{3}{21}+\frac{5}{21}=\frac{10}{21}$$

$$P(C)=P(1)+P(3)+P(5)=\frac{1}{21}+\frac{3}{21}+\frac{5}{21}=\frac{9}{21}$$

(3) ( أ ) $A\cup B=\{2,3,4,5,6\}$

$$P(A\cup B)=P(2)+P(3)+P(4)+P(5)+P(6)=\frac{2}{21}+\frac{3}{21}+\frac{4}{21}+\frac{5}{21}+\frac{6}{21}=\frac{20}{21}$$

$$or\quad P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap C)=\frac{12}{21}+\frac{10}{21}-\frac{2}{21}=\frac{20}{21}$$

$$or\quad P(A\cup B)=1-(A\cup B)^c=1-P(1)=1-\frac{1}{21}=\frac{20}{21}$$

( ب ) $B\cap C=\{3,5\}\Rightarrow P(B\cap C)=P(3)+P(5)=\frac{3}{21}+\frac{5}{21}=\frac{8}{21}$

( ج ) $B^c=\{1,4,6\}$ , $A\cap B^c=\{4,6\}$

$$P(A\cap B^c)=P(4)+P(6)=\frac{4}{21}+\frac{6}{21}=\frac{10}{21}$$

**الفضـــاء ذو الاحتمالات المتســاوية (الفضـــاء المنتظم):** يســمى فضـــاء العينة المنتهي $S$ بالفضـــاء ذو الاحتمالات المتساوية إذا كان لكل نقطة معاينة نفس الاحتمال مثلا إذا احتوى $S$ على $n$ من النقاط فان احتمال كل نقطة هو $\frac{1}{n}$ وإذا احتوى الحدث $A$ على $r$ من النقاط فان احتمال $A$ هو $P(A)=\frac{r}{n}$ .

**مثال:**– صـــندوق يحتوي على (8) كرات، ثلاثة بيضــاء والأخرى حمراء ســحبت كرتان بصـــورة عشــوائية اوجد الاحتمال (1) أن تكون الكرتان من نفس اللون (2) واحدة حمراء والأخرى بيضاء (3) كلاهما حمراء.

الحل/ تكون الكرتـان من نفس اللون اذا كـانت الكرتـان حمراء $R_1\cap R_2$ او الكرتـان بيضـــــاء $W_1\cap W_2$. اذن يكون لـــديـــنـــا:

(1) $p($الكرتان من نفس اللون$)$ $=P(R_1\cap R_2)\cup P(W_1\cap W_2)=P(R_1\cap R_2)+P(W_1\cap W_2)=\frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}}+\frac{\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}}=\frac{10}{28}+\frac{3}{28}=\frac{13}{28}$

احتمال ان تكون واحدة حمراء والأخرى بيضاء هو

(2) $p(R\cap W)=\frac{\binom{5}{1}\binom{3}{1}}{\binom{8}{2}}=\frac{15}{28}$

احتمال ان تكون الكرتان حمراء هو

(3) $p(R_1\cap R_2)=\frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}}=\frac{10}{28}$

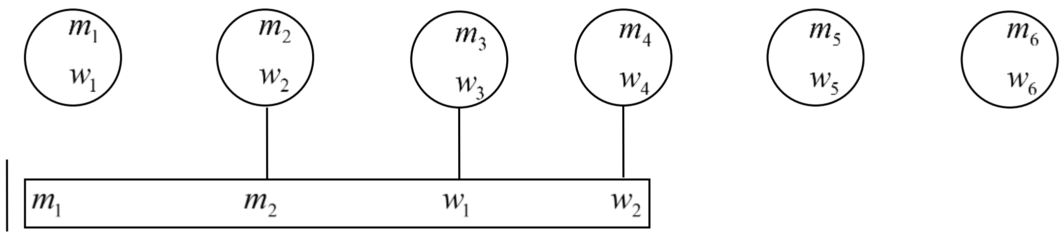
**مثال:–** يقف في إحدى الحجرات ستة رجال مع زوجاتهم:ا. إذا اختير اثنان منهم بطريقة عشوائية اوجد الاحتمال $P$ أن يكون:(1) متزوجين (2) احدهما رجل والأخر سيدة. ب. وإذا اختير اربعة منهم بطريقة عشـوائية اوجد احتمال: (1) أن يختار رجلان وزوجاتهم (2) أن لا يوجد بينهم أي اثنين متزوجين (3) أن يوجد بينهم اثنين متزوجين فقط.

الحل/ أ. (1) فضاء العينة $\binom{12}{2} = 66$ ، عدد طرق حدوث الحدث $\binom{6}{1} = 6$ ، $P = \frac{6}{66} = \frac{1}{11}$

(2) $\binom{6}{1}\binom{6}{1}$طريقة لاختيار رجل وسيدة $\Leftarrow P = \frac{\binom{6}{1}\binom{6}{1}}{\binom{12}{2}} = \frac{6\times 6}{66} = \frac{6}{11}$

أ. (1) يوجد $\binom{12}{4}$ طريقة لاختيار 4 من 12. يوجد $\binom{6}{2}$ طريقة لاختيار رجلان وزوجاتهما.

$$P = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{12}{4}} = \frac{15}{495} = \frac{1}{33}$$




2) يجب أن نختار 4 أفراد من بين 4 ثنائيات مختلفة أي انه يوجد توافيق $15 = \binom{6}{4}$ طريقة لاختيار 4 ثنائيات من بين 6 ثنائيات مختلفة ، كذاك هناك طريقتان لاختيار فرد من كل ثنائي أي أن عدد الطرق الكلية التي يتم بها اختيار 4 أشخاص لا يوجد بينهم أي اثنين متزوجين هو $\binom{6}{4}\times 2\times 2\times 2\times 2$

إذن الاحتمال هو $P = \frac{\binom{6}{4}\times 2\times 2\times 2\times 2}{\binom{12}{4}} = \frac{120}{495} = \frac{16}{33}$

(3) $P = \frac{\binom{6}{1}\binom{5}{2}\times 2\times 2}{\binom{12}{4}} = \frac{16}{33}$

**مثال:**- ســـحبت ورقة بطريقة عشـــوائية من بين 50 ورقة مرقمة بالأرقام 1 إلى 50 اوجد احتمال أن يكون العدد المسحوب: (1) يقبل القسمة على 5 (2) أولي (3) ينتهي بالرقم 2.

الحل/ (1) يوجد 10 ارقام تقبل القسمة على 5 من بين الارقام 1 إلى 50. اذن $p($ العدد يقبل القسمة $5) = \dfrac{\binom{10}{1}}{\binom{50}{1}} = \dfrac{1}{5}$

(2) يوجد 15 رقم اولي بين الارقام 1 إلى 50. اذن $p($العدد اولي$) = \dfrac{\binom{15}{1}}{\binom{50}{1}} = \dfrac{3}{10}$

(3) يوجد 5 ارقام تنتهي بالرقم 2 بين الارقام 1 إلى 50. اذن $p($ العدد ينتهي بالرقم $2) = \dfrac{\binom{5}{1}}{\binom{50}{1}} = \dfrac{1}{10}$

**مثال:**- ســـحبت ورقتان بطريقة عشـــوائية من بين 10 أعداد مرقمة من 1 إلى 10 ما هو احتمال أن يكون مجموعهما فرديا اذا: 1. تم سحب الورقتين معا 2. تم سحب الورقتين ورقة بعد الأخرى بدون إحلال. 3. تم سحب الورقتين ورقة بعد الأخرى مع الإحلال.

الحل/(1) يوجد $\binom{10}{2} = 45$ طريقة مختلفة لسحب ورقتين من 10.

يكون المجموع فرديا إذا كانت إحدى الورقتين عدد زوجي والأخرى عدد فردي.

يوجد $\binom{5}{1} = 5$ طريقة لســـحب عدد زوجي. ويوجد $\binom{5}{1} = 5$ طريقة لســـحب عدد فردي. اذن يوجد $5 \times 5 = 25$ طريقة لسحب ورقتين مجموعهما فردي. اذن احتمال أن يكون مجموعهما فرديا تم سحب الورقتين معا هو $p = \dfrac{25}{45} = \dfrac{5}{9}$

2. يوجد $9 \times 10 = 90$ طريقة لسحب ورقتين بدون إحلال.

يوجد $5 \times 5 = 25$ طريقة لسحب ورقتين مجموعهما فردي الأولى زوجي والثانية فردي.

يوجد $5 \times 5 = 25$ طريقة لسحب ورقتين مجموعهما فردي الأولى فردي والثانية زوجي.

اذن عدد الطرق الكلية لحدوث الحدث $25 + 25 = 50$ . اذن احتمال أن يكون مجموعهما فرديا اذا تم ســـحب الورقتين ورقة بعد الأخرى بدون إحلال هو $p = \dfrac{50}{90} = \dfrac{5}{9}$

3. يوجد $10 \times 10 = 100$ طريقة لســـحب ورقتين من 10 أوراق واحدة بعد الأخرى مع الإحلال. عدد الطرق الكلية لحدوث الحدث هو $25 + 25 = 50$ . اذن احتمال أن يكون مجموعهما فرديا اذا تم سحب الورقتين ورقة بعد الأخرى مع الإحلال هو $P = \dfrac{50}{100} = \dfrac{1}{2}$

**مثال:ــ** فصل دراسي فيه 10 طلاب أسمائهم على $A, B, C, ....$ إذا اختيرت بطريقة عشوائية لجنة مكونة من ثلاثة طلبة من هذا الفصل فأوجد احتمال ان يكون : (1) $A$ في اللجنة (2) $A$ و$B$ في اللجنة (3) $A$ أو$B$ في اللجنة.

(1) $$P(A)=\frac{\binom{1}{1}\binom{9}{2}}{\binom{10}{3}}=\frac{3}{10} \qquad P(B)=\frac{\binom{1}{1}\binom{9}{2}}{\binom{10}{3}}=\frac{3}{10}$$

(2) $$P(A\cap B)=\frac{\binom{2}{2}\binom{8}{1}}{\binom{10}{3}}=\frac{8}{120}=\frac{1}{15}$$

(3) $$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{3}{10}+\frac{3}{10}-\frac{1}{15}=\frac{8}{15}$$

**مثال:ــ** فصل دراسي فيه عشرة رجال وعشرين سيدة بحيث كانت أعين نصف الرجال ونصف السيدات بنية اللون. اختير احد أعضاء الفصل بطريقة عشوائية ما هو احتمال: (1) أن يكون الشخص المختار رجل (2) أن يكون الشخص المختار رجل أو له عينان بنيتان.

الحل/ افرض أن $A$ تمثل الرجال و$B$ تمثل السيدات و$C$ تمثل العيون البنية

$$(1)p(A)=\frac{10}{30},p(B)=\frac{20}{30},p(C)=\frac{15}{30}$$

$$(2)p(A\cup C)=p(A)+p(C)-p(A\cap C)=\frac{10}{30}+\frac{15}{30}-\frac{5}{30}=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$$

**مثال:ــ** اختيرت ثلاث مصابيح كهربائية بطريقة عشوائية من بين 15 مصباح خمسة منها معيبة. اوجد احتمال أن يكون: (1) جميعها سليمة (2) واحد فقط معيب (3) واحد على الأقل معيب (4) اثنان على الأكثر سليمة.

الحل/

$$(1)\ p(\text{الثلاث وحدات سليمة})=\frac{\binom{10}{3}}{\binom{15}{3}}=\frac{120}{455}=\frac{24}{91}$$

$$(2)\ (\text{واحد فقط معيب})=\frac{\binom{5}{1}\binom{10}{2}}{\binom{15}{3}}=\frac{225}{455}=\frac{45}{91}$$

(3) افرض أن $x$ متغير يمثل عدد المصابيح المعيبة في العينة المسحوبة

$$p(\text{واحد على الأقل معيب})=p(x\geq 1)=p(x=1 \quad or \quad x=2 \quad or \quad x=3)$$

$$=p(x=1)+p(x=2)+p(x=3)$$

$$=\frac{\binom{5}{1}\binom{10}{2}}{\binom{15}{3}}+\frac{\binom{5}{2}\binom{10}{1}}{\binom{15}{3}}+\frac{\binom{5}{3}}{\binom{15}{3}}=\frac{67}{91}$$

افرض أن $y$ متغير يمثل عدد المصابيح السليمة في العينة المسحوبة (4)

$$p(\text{اثنان على الأكثر سليمة}) = p(y \le 2) = p(y = 2 \quad or \quad y = 1 \quad or \quad y = 0)$$

$$= p(y=2) + p(y=1) + p(y=0)$$

$$= \frac{\binom{10}{2}\binom{5}{1}}{\binom{15}{3}} + \frac{\binom{10}{1}\binom{5}{2}}{\binom{15}{3}} + \frac{\binom{5}{3}}{\binom{15}{3}} = \frac{67}{91}$$

**مثال:–** في فصل دراسي عشرة طالبات ثلاث منهن عيونهن زرقاء اختيرت طالبتان بصورة عشوائية اوجد احتمال أن يكون: (1)عيون الطالبتين زرقاء (2) عيون الطالبتين ليســـت زرقاء (3) على الأقل طالبة واحدة عينها زرقاء.

الحل/

$$(1)\ p(\text{عيون الطالبتين زرقاء}) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{15}$$

$$(2)\ p(\text{عيون الطالبتين ليست زرقاء}) = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{7}{15}$$

$$(3)\quad p(\text{على الأقل واحدة}) = p(\text{طالبة}) + p(\text{طالبتين}) = \frac{\binom{3}{1}\binom{7}{1}}{\binom{10}{2}} + \frac{\binom{3}{2}\binom{7}{0}}{\binom{10}{2}} = \frac{7}{15} + \frac{1}{15} = \frac{8}{15}$$

**طريقة اخرى:** $p(\text{على الأقل واحدة}) = p(\text{طالبة}) + p(\text{طالبتين})$

حسب البديهية الثانية من بديهيات الاحتمال يكون لدينا:

$$p(\text{صفر طالبة}) + p(\text{طالبة واحدة}) + p(\text{طالبتين}) = 1$$

$$p(\text{صفر طالبة}) + p(\text{على الأقل طالبة واحدة}) = 1$$

$$p(\text{على الأقل واحدة}) = 1 - p(\text{صفر طالبة}) = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$$

**مثال:–** من بين 120 طالب، يدرس الفرنسية 60 طالب والاسبانية 50 طالب ويدرس الاسبانية والفرنسية معا 20. إذا اختير طالب بطريقة عشوائية اوجد احتمال (1) أن يكون هذا الطالب من دارســي اللغة الفرنسـية أو اللغة الاسـبانية. (2) أن لا يكون من دارسي اللغة الفرنسية أو اللغة الاسبانية.

الحل/ يدرس الفرنسية (F) 60 طالب ويدرس الاسبانية (S) 50 طالب ويدرس الاسبانية والفرنسية معا $\boldsymbol{F \cap S = 20}$

$$\textbf{(1)}\ \boldsymbol{P(F \cup S) = P(F) + P(S) - P(F \cap S) = \frac{60}{120} + \frac{50}{120} - \frac{20}{120} = \frac{3}{4}}$$

$$\textbf{(2)}\ \boldsymbol{P\left((F \cup S)^c\right) = 1 - P(F \cup S) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}}$$

**الاستقلال**

**الأحداث المستقلة:** يقال أن الحدث $B$ مستقل عن الحدث $A$ إذا كان حدوث $B$ لا يتأثر بحدوث أو عدم حدوث $A$ لذا فان $P(A|B)$ و $P(A)$ لهما نفس المعنى. اي انه إذا كان $B$ , $A$ حادثتين مستقلتين فان:

$$P(A|B)=P(A) \quad , \quad P(B|A)=P(B)$$

$$P(A\cap B)=P(A).P(B|A)=P(A).P(B)=P(B).P(A)$$

وبصورة عامة $A$ و $B$ مستقلان اذا وفقط اذا احتمال حدوثهما معا يساوي حاصل ضربهما

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)$$

وإذا لم يتحقق هذا الشرط يقال أن الحدثين $A$ و $B$ غير مستقلين.

**تعريف:** يقال أن الأحداث $A,B,C$ مستقلة معا إذا تحقق الشرطين التاليين:

$$(1)\ P(A\cap B)=P(A).P(B)\ ,P(A\cap C)=P(A).P(C),P(B\cap C)=P(B).P(C)$$

أي أن الأحداث مستقلة مثنى مثنى.

$$(2)\ P(A\cap B\cap C)=P(A).P(B).P(C)$$

وإذا لم يتحقق هذين الشرطين تكون الأحداث $A,B,C$ ليست مستقلة.

**مثال:–** ألقيت قطعة نقود ثلاث مرات اعتبر الأحداث التالية: {الرمية الأولى صورة }= $A$ ،{الرمية الثانية صورة}=$B$ ، {وقوع الصورة بالضبط مرتان متتاليتان }=$C$. هل أن الأحداث الثلاثة $A$ , $B$ , $C$ مستقلة؟

الحل/ فضاء العينة هو $S=\{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$

$$A=\{HHH, HHT, HTH, HTT\},\quad B=\{HHH, HHT, THT, THH\},\quad C=\{HHT, THH\}$$

$$P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{1}{2}, P(C)=\frac{1}{4}$$

$$A\cap B=\{HHH, HHT\},\quad A\cap C=\{HHT\},\quad B\cap C=\{THH, HHT\},\quad A\cap B\cap C=\{HHT\}$$

$$P(A\cap B)=\frac{1}{4}\ ,$$

$$P(A).P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$\therefore P(A\cap B)=P(A).P(B) \Rightarrow \therefore A, B$ مستقلان

$$P(A\cap C)=\frac{1}{8}$$

$$P(A).P(C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$$

$P(A\cap C)=P(A).P(C) \Rightarrow \therefore A, C$ مستقلان

$$P(B\cap C)=\frac{1}{4} \quad , \quad P(B).P(C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$$

$P(B\cap C)\neq P(B).P(C) \Rightarrow \therefore B, C$ غير مستقلان

$$P(A\cap B\cap C)=\frac{1}{8}$$

$$P(A).P(B).P(C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$$

$\therefore$ الأحداث $A$ , $B$ , $C$ غير مستقلة $P(A\cap B\cap C)\neq P(A).P(B).P(C) \Rightarrow$

**مبرهنة:** إذا كان $A$ , $B$ مستقلين فان $A$ , $B^c$ مستقلين و $A^c$ , $B^c$ مستقلين.

$$P(A\cap B^c)=P(A).P(B^c)\ ?$$
$$P(A\cap B^c)=P(A\setminus B)=P(A)-P(A\cap B)$$
$$=P(A)-P(A).P(B)$$
$$=P(A)(1-P(B))$$
$$=P(A)P(B^c)$$
$$P(A^c\cap B^c)=P(A^c\setminus B)=P(A^c)-P(A^c\cap B)$$
$$=P(A^c)-P(A^c).P(B)$$
$$=P(A^c).(1-P(B))$$
$$=P(A^c).P(B^c)$$

**مبرهنة:** إذا كان $A$ , $B$ , $C$ أحداثا مستقلة اثبت أن كل من التوافيق

$A^cBC\,,AB^cC,.........,A^cB^cC,......,A^cB^cC^c$ أحداثا مستقلة.

سوف نبرهن ان $A^c\cap B^c\cap C$ أحداثا مستقلة

$$P(A^c\cap B^c\cap C)=P((A\cup B)^c\cap C)=P\big(C\setminus(A\cup B)\big)$$
$$=P(C)-P\big(C\cap(A\cup B)\big)$$
$$=P(C)-P[(C\cap A)\cup(C\cap B)]$$
$$=P(C)-[P(C\cap A)+P(C\cap B)-P(C\cap A\cap C\cap B)]$$
$$=P(C)-P(C).P(A)-P(C).P(B)+P(A).P(B).P(C)$$
$$=P(C)\big(1-P(A)\big)-P(C).P(B)\big(1-P(A)\big)$$
$$=P(C)\big(1-P(A)\big)\big(1-P(B)\big)$$
$$=P(A^c)P(B^c)P(C)$$

باقي الاحداث يمكن برهنتها بنفس الاسلوب.

**مثال:–** احتمال أن يصيب $A$ الهدف $\frac{1}{4}$ واحتمال أن يصيب $B$ الهدف $\frac{2}{5}$. إذا صوب كل من $A$ , $B$ نحو الهدف مرة واحدة، فما هو احتمال (1) إصابة الهدف (2) أن يصيب $A$ فقط الهدف.

الحل /

(1) $P$ (إصابة الهدف مرة واحدة على الأقل) $=P(A\cup B)$

$$=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=P(A)+P(B)-P(A).P(B)$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{2}{5}-\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{11}{20}$$

(2) $A\cap B^c$ أن يصيب $A$ فقط الهدف

$$P(A\cap B^c)=P(A\setminus B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{1}{4}-\frac{2}{20}=\frac{3}{20}$$

*or* $$P(A\cap B^c)=P(A).P(B^c)=\frac{1}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{20}$$

**مثال:–** إذا كان احتمال أن يعيش رجل 10 سنوات أخرى هو $\frac{1}{4}$ واحتمال أن تعيش زوجته 10 سنوات أخرى هو $\frac{1}{3}$ اوجد احتمال: (1) أن يعيش الاثنان 10 سنوات أخرى. (2) أن يعيش احدهما على الأقل 10 سنوات أخرى. (3) أن يموت الاثنان خلال السنوات العشر. (4) أن تعيش الزوجة فقط 10 سنوات .

الحل/ افرض $A \equiv$ [الرجل يعيش10 سنوات أخرى]، افرض $B \equiv$ [المرأة تعيش10سنوات أخرى]

$$(1)P(A\cap B)=P(A).P(B)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$$

$$(2)P(AorB)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$$

$$(3)P(B)=\frac{1}{3}\Rightarrow P(B^c)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3},P(A)=\frac{1}{4}\Rightarrow P(A^c)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

$$P(A^c\cap B^c)=P(A^c).P(B^c)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$$

$$(4)P(B\backslash A)=P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$

$$orP(B\cap A^c)=P(B).P(A^c)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

**مثال:–** صندوق $A$ فيه 5 كرات حمراء و3 بيضاء وصندوق $B$ فيه 2 كرتان حمراء و6 بيضاء:

1. إذا سحبت كرة بصورة عشوائية من كل صندوق فما هو احتمال أن تكون من نفس اللون.
2. إذا سحبت كرتان من كل صندوق فما هو احتمال أن تكون الكرات الأربع من نفس اللون.

الحل/ لتكن $A$ تمثل الكرتان من نفس اللون و $B$ الكرات الأربع من نفس اللون

$$(1)A=R_A\cap R_B orW_A\cap W_B$$
$$P(A)=P(R_A\cap R_B)+P(W_A\cap W_B)$$
$$=P(R_A).P(R_B)+P(W_A).P(W_B)=\frac{5}{8}\times\frac{2}{8}+\frac{3}{8}\times\frac{6}{8}=\frac{10+18}{64}=\frac{28}{64}=\frac{7}{16}$$
$$(2)B=2R_A\cap 2R_B or2W_A\cap 2W_B$$
$$P(B)=P(2R_A\cap 2R_B)+P(2W_A\cap 2W_B)$$
$$=P(R_A).P(R_B)+P(W_A).P(W_B)=\frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}}\times\frac{\binom{2}{2}}{\binom{8}{2}}+\frac{\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}}\times\frac{\binom{6}{2}}{\binom{8}{2}}=\frac{10}{28}\times\frac{1}{28}+\frac{3}{28}\times\frac{15}{28}$$
$$=\frac{55}{784}$$

**المحاولات المستقلة أو المتكررة:**

افرض أن $S$ فضاء احتمال منتهي. ونقصد بعدد $n$ من التجارب المستقلة أو المتكررة فضاء الاحتمال $T$ المكون من عناصر $S$ المرتبة والتي على الصورة $(S_1,S_2,.....,S_n)$ ويكون احتمال أي عنصر بالتعريف هو حاصل ضرب احتمالات مكونات هذا العنصر أي أن :

$$P[(S_1,S_2,.....,S_n)]=P(S_1).P(S_2)........P(S_n)$$

**مثال:-** ألقيت قطعة نقود ثلاث مرات .اوجد الاحتمالات التالية:

(1) الحصول على ثلاث صور(2) الحصول على صورتين فقط (3)الحصول على صفر صورة

الحل/ $P(T)=\frac{1}{2}\ ,\ P(H)=\frac{1}{2}\ ,\ S=\{T,H\}$

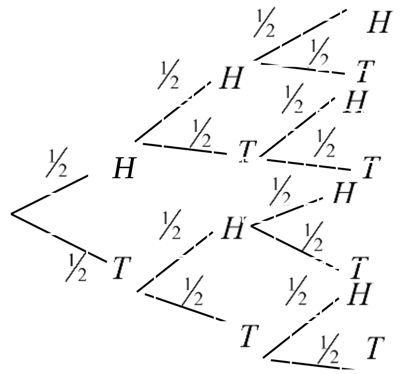
(1) $P(HHH)=P(H_1\cap H_2\cap H_3)=P(H_1).P(H_2).P(H_3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

(2) $P(\text{صورتين فقط})=P(HHT\ or\ HTH\ or\ THH)$

$$=P(HHT)+P(HTH)+P(THH)$$
$$=P(H_1)+P(H_2)+P(T_3)+P(H_1)+P(T_2)+P(H_3)+P(T_1)+P(H_2)+P(H_3)$$
$$=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

(3) $P(TTT)=P(T_1).P(T_2).P(T_3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

ويمكن تمثيل التجارب المتكررة أو المستقلة بشجرة بيانية وكل مسار يؤدي إلى نفس النتيجة له نفس الاحتمال.




**مثال:-** يصيب احد أنواع الصواريخ الهدف باحتمال 0.3. ما هو عدد الصواريخ اللازم إطلاقها لكي يكون احتمال إصابة الهدف على الأقل 80% .

الحل/ احتمال عدم إصابة الهدف = 1 – 0.3= 0.7

احتمال أن يخطئ $n$ صاروخ الهدف $\underbrace{0.7\times0.7\times0.7\times......\times0.7}_{n}=(0.7)^n$

$P(\text{عدم إصابة الهدف})=(0.7)^n$

$1-(0.7)^n\geq 0.8$

$(0.7)^n\leq 0.2$

عندما $n=1\Rightarrow 0.7\leq 0.2$ ليس صحيح

عندما $n=2\Rightarrow 0.49\leq 0.2$ ليس صحيح

عندما $n=3\Rightarrow 0.343\leq 0.2$ ليس صحيح

عندما $n=4\Rightarrow 0.2401\leq 0.2$ ليس صحيح

عندما $n=5\Rightarrow (0.7)^5=0.16807\leq 0.2$ صحيح

إذن عدد الصواريخ الواجب إطلاقها هو 5.

إذن يجب أن يطلق $B$ 5 مرات.

**مثال:–** يفوز فريق كرة قدم ($W$) باحتمال 0.6 ويهزم ($L$) باحتمال 0.3 ويتعادل ($T$) باحتمال 0.1 . إذا لعب الفريق ثلاث مباريات:

(1) حدد عناصر الحدث $A$ وهو فوز الفريق مرتين على الأقل وعدم هزيمته واوجد $P(A)$.

(2) حدد عناصر الحدث $B$ وهو فوز الفريق وهزيمته وتعادله واوجد $P(B)$.

الحل/ $P(WWW)=P(W).P(W).P(W)$

$(1)A=\{WWT,WTW,TWW,WWW\}$
$P(A)=P(WWT)+P(WTW)+P(TWW)+P(WWW)$
$P(A)=P(W)P(W)P(T)+P(W)P(T)P(W)+P(T)P(W)P(W)+P(W)P(W)P(W)$
$P(A)=(0.6)(0.6)(0.1)+(0.6)(0.1)(0.6)+(0.1)(0.6)(0.6)+(0.6)(0.6)(0.6)=0.324$
$(2)B=\{WLT,WTL,LWT,LTW,TWL,TLW\}$
$P(B)=P(WLT)+P(WTL)+P(LWT)+P(LTW)+P(TWL)+P(TLW)$
$P(B)=P(W)P(L)P(T)+P(W)P(T)P(L)+P(L)P(W)P(T)+P(L)P(T)P(W)$
$+P(T)P(W)P(L)+P(T)P(L)P(W)$
$P(B)=(0.6)(0.3)(0.1)+(0.6)(0.1)(0.3)+(0.3)(0.6)(0.1)+(0.3)(0.1)(0.6)$
$+(0.1)(0.6)(0.3)+(0.1)(0.3)(0.6)=0.108$

**مثال:–** تتسابق ثلاث جياد $C$ , $B$ , $A$ بحيث أن احتمال فوز كل منهم على التوالي هو $\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{2}$ إذا تسابقت هذه الجياد مرتين فما هو احتمال: (1) فوز $A$ مرتين (2) فوز $B$ في المرة الأولى و $C$ في المرة الثانية (3) فشل $C$ في المرتين.

الحل/ $P(A)=\frac{1}{2}\ ,\ P(B)=\frac{1}{3}P(C)=\frac{1}{6}$

$(1)P(AA)=P(A).P(A)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$
$(2)P(BC)=P(B).P(C)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{18}$
$(3)P(AAorBBorABorBA)=P(AA)+P(BB)+P(AB)+P(BA)$
$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{9+4+6+6}{36}=\frac{25}{36}$
or $P(C^cC^c)=\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{25}{36}$

## الاحتمال المشروط

**تعريف:** إذا كانتا $A$ , $B$ حادثتين معرفتين من فضاء العينة $S$ فان احتمال حدوث $A$ بشرط لن الحادثة $B$ قد حدثت فعلا يسمى بالاحتمال المشروط لحدوث $A$ علما أن $B$ قد وقعت ويرمز له بـ $P(A\backslash B)$.ويعرف كالاتي:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\qquad,\quad P(B)>0$$

إن $A|B$ تعني حدوث الحدث $A$ بشرط أن $B$ قد حدث ولا تعني عملية قسمة ( $A$ شرط $B$ أو $A$ given $B$ ).
وبصورة خاصة إذا كان $S$ فضاء منتظما وكان $n$ يمثل عدد العناصر في الحدث $A$ فان

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}\qquad,\qquad P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}$$

$$\therefore\ P(A|B)=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}}=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{\text{عدد العناصر في الحدث }(A\cap B)}{\text{عدد العناصر في الحدث }(B)}$$

**بديهيات(مسلمات)الاحتمال**

لما كانت $P(A|B)$ هي احتمال فيجب أن تحقق بديهيات الاحتمال الثلاثة:

1. لأي حدث $A$ فان $0 \le P(A|B) \le 1$ .

2. للحدث المؤكد $S$ $P(S|B)=1$ .

3. إذا كان $A_1$ , $A_2$ حدثان متنافيان فان : $P(A_1 \cup A_2|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B)$

ويمكن تعميم هذه البديهية إلى $k$ من الأحداث المتنافية . أي انه إذا كان $A_1$ , $A_2,....,A_k$ أحداثا متنافية مثنى مثنى فان: $P(A_1 \cup A_2 \cup ...... \cup A_k|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B)+.......+P(A_k|B)$

**البرهان:**

(1) $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

$$\because 0 \le P(A\cap B) \le 1, P(B)>0$$
$$0 \le \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \le 1$$
$$\therefore 0 \le P(A|B) \le 1$$

(2) $P(S|B)=1$

$$(S\cap B)=B$$
$$P(S\cap B)=P(B)$$
$$P(S|B)=\frac{P(S\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=1$$

(3) $P(A_1\cup A_2|B)=\frac{P((A_1\cup A_2)\cap B)}{P(B)}$

$$(A_1\cup A_2)\cap B=(A_1\cap B)\cup(A_2\cap B)$$
$$P\big((A_1\cup A_2)\cap B\big)=P(A_1\cap B)+P(A_2\cap B)$$
$$P(A_1\cup A_2|B)=\frac{P\big((A_1\cup A_2)\cap B\big)}{P(B)}=\frac{P(A_1\cap B)+P(A_2\cap B)}{P(B)}$$
$$=\frac{P(A_1\cap B)}{P(B)}+\frac{P(A_2\cap B)}{P(B)}=P(A_1|B)+P(A_2|B)$$

**برهان التعميم**: $\because$ $A_1$ , $A_2,....,A_k$ أحداث متنافية مثنى مثنى فان $A_1\cap B$ , $A_2\cap B,....,A_k\cap B$ هي أحداث متنافية مثنى مثنى أيضا

$$P(A_1\cup A_2\cup ......\cup A_k|B)=\frac{P((A_1\cup A_2\cup ........\cup A_k)\cap B)}{P(B)}$$
$$=\frac{P(A_1\cap B)+P(A_2\cap B)+.....+P(A_k\cap B)}{P(B)}$$
$$=\frac{P(A_1\cap B)}{P(B)}+\frac{P(A_2\cap B)}{P(B)}+.......+\frac{P(A_k\cap B)}{P(B)}$$
$$=P(A_1|B)+P(A_2|B)+........+P(A_k|B)$$

**مثال:**– القي حجري نرد إذا كان المجموع 6 فما هو احتمال ظهور العدد 2 على احد الحجرين.

الحل/ نفرض الحدث $B$ يمثل المجموع 6 $\qquad B=\{(2,4),(4,2),(1,5),(5,1),(3,3)\}$

$A$ ظهور العدد 2 على احد الحجرين $\qquad P(A|B)=\frac{2}{5}$

**مثال:**– القي حجري نرد إذا كان العددان الناتجان مختلفين فأوجد احتمال أن يكون المجموع زوجيا.

الحل/ نفرض الحدث $B$ يمثل المجموع 6 $\qquad S=\{(1,1),(1,2),\ldots\ldots\ldots,(6,6)\}$

يوجد 6 حالات يكون العددان الناتجان متشابهان ∴ يوجد $36-6=30$ طريقة يكون العددان الناتجان مختلفان.

$$A=\{(2,4),(4,2),(1,3),(3,1),(1,5),(5,1),(2,6),(6,2),(3,5),(5,3),(6,4),(4,6)\}$$

$$P(A|B)=\frac{12}{30}=\frac{2}{5}$$

**مثال:**– قام رجل بزيارة عائلة لها طفلان دخل احد الطفلين وهو ولد إلى الحجرة ما هو احتمال $P$ أن يكون الطفل الأخر ولد إذا كان:– (1) من المعلوم أن الطفل الأخر هو الأصغر. (2) ليست هناك معلومات عن الطفل الأخر.

الحل/ (1) فضاء العينة لنوع الطفلين هو $P(S)=\{bb,bg,gb.gg\}$ ويمثل الترتيب في كل نقطة ترتيب الميلاد .

1) فضاء العينة المختزل $\quad S_1=\{bb,bg\} \quad \Leftarrow \quad P=\frac{1}{2}$

1) فضاء العينة المختزل $\quad S_1=\{bb,bg,gb\} \quad \Leftarrow \quad P=\frac{1}{3}$

**نظرية الضرب في الاحتمال المشروط :** من تعريف الاحتمال المشروط

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$
$$P(A\cap B)=P(B)P(A|B)(1)$$
$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)(2)$$
$$P(B)P(A|B)=P(A)P(B|A)$$
$$\therefore P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

من الممكن تعميم (1) إلى $k$ من الأحداث $A_1\ ,\ A_2,\ldots.,A_k$

$$P(A_1\cap A_2\cap\ldots\ldots\cap A_k)=P(A_1)\times P(A_2|A_1)\times P(A_3|A_1\cap A_2)\times\ldots..\times P(A_k|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{k-1})$$

ممكن برهنة النتيجة الأخيرة كما يلي:

الطرف الأيمن:

$$P(A_1)\times P(A_2|A_1)\times P(A_3|A_1\cap A_2)\times\ldots..\times P(A_k|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{k-1})$$
$$=P(A_1)\times\frac{P(A_1\cap A_2)}{P(A_1)}\times\frac{P(A_3\cap A_1\cap A_2)}{P(A_1\cap A_2)}\times\ldots..\times\frac{P(A_k\cap A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_k)}{P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{k-1})}$$
$$=P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_k)$$

**مثال:–** صندوق فيه 12 وحدة إنتاج من بينها 4 معيبة سحبت ثلاث وحدات واحدة تلو الأخرى .اوجد احتمال أن تكون: (1) الوحدات الثلاثة سليمة. (2) الأولى سليمة الثانية معيبة الثالثة سليمة. (3) الوحدات الثلاثة معيبة.

الحل/ افرض الوحدة معيبة $D \equiv$ ، افرض الوحدة سليمة $N \equiv$

الطريقة السابقة: $P\dfrac{\binom{8}{3}}{\binom{12}{3}} = \dfrac{8\times7\times6\times3!}{12\times11\times10\times3!} = \dfrac{14}{55}$

$$(1)P(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = P(N_1) \times P(N_2|N_1) \times P(N_3|N_1 \cap N_2) = \frac{8}{12} \times \frac{7}{11} \times \frac{6}{10} = \frac{14}{55}$$
$$(2)P(N_1 \cap D_2 \cap N_3) = P(N_1) \times P(D_2|N_1) \times P(N_3|N_1 \cap D_2) = \frac{8}{12} \times \frac{4}{11} \times \frac{7}{10} = \frac{28}{165}$$
$$(3)P(D_1 \cap D_2 \cap D_3) = P(D_1) \times P(D_2|D_1) \times P(D_3|D_1 \cap D_2) = \frac{4}{12} \times \frac{3}{11} \times \frac{2}{10} = \frac{1}{55}$$

**مثال:–** إذا كان احتمال أن يصــيب ثلاثة رجال هدفا على التوالي $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}$. فإذا كان كل منهم يصــوب مرة واحدة على الهدف : (1) اوجد الاحتمال أن يصــيب رجل واحد فقط منهم الهدف. (2) إذا أصــاب الهدف رجل واحد فقط فما هو احتمال أن يكون هذا الرجل هو الأول.

الحل/ $P(A) = \frac{1}{6}\ ,\ P(B) = \frac{1}{4}\ ,\ P(C) = \frac{1}{3}$

(1) نرمز لحادثة أن يصيب احدهم فقط الهدف بالرمز $k$.

$$k = (A \cap B^c \cap C^c) or (A^c \cap B \cap C^c) or (A^c \cap B^c \cap C)$$
$$P(k) = P(A).P(B^c).P(C^c) + P(A^c).P(B).P(C^c) + P(A^c).P(B^c).P(C)$$
$$= \frac{1}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12} + \frac{5}{36} + \frac{5}{24} = \frac{31}{72}$$

(2) نبحث عن الاحتمال $P(A|k)$

$$P(A|k) = \frac{P(A \cap k)}{P(k)} = \frac{P(A \cap B^c \cap C^c)}{P(k)} = \frac{\frac{1}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3}}{\frac{31}{72}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{31}{72}} = \frac{6}{31}$$

**مثال:-** احتمال أن يصـــيب $A$ الهدف $\frac{1}{4}$ واحتمال أن يصـــيب $B$ الهدف $\frac{1}{3}$: (1) إذا أطلق كل منهم مرتين فما هو احتمال أن يصـاب الهدف مرة واحدة على الأقل. (2) إذا أطلق كل منهم مرة واحدة وأصـيب الهدف مرة واحدة فما هو احتمال أن يكون $A$ هو الذي أصـاب الهدف .(3) إذا كان $A$ يمكنه الإطلاق مرتين فقط فما هو عدد المرات التي يجب أن يطلقها $B$ لكي يكون احتمال إصابة الهدف على الأقل 90%.

الحل / $AABB$

عدم إصابة الهدف $A^c A^c B^c B^c$

إصابة الهدف لمرة واحدة ........... $AA^c B^c B^c \,, A^c AB^c B^c$

إصابة الهدف لمرتين ........... $AAB^c B^c \,, A^c ABB^c$

إصابة الهدف لثلاث مرات ........... $AABB^c \,, AAB^c B$

إصابة الهدف لأربع مرات $AABB$

هناك خمسة احتمالات ممكنة : عدم إصابة الهدف، إصابة الهدف لمرة واحدة، إصابة الهدف لمرتين، إصابة الهدف لثلاث مرات، إصابة الهدف لأربع مرات

(1) $P($عدم إصابة الهدف$) = A^c A^c B^c B^c = P(A^c)P(A^c)P(B^c)P(B^c) = \frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3} = \frac{1}{4}$

$P($إصابة الهدف على الأقل مرة واحدة$)= 1-P($عدم إصابة الهدف$) = 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

(2)افرض أن $E \equiv$ إصابة الهدف لمرة واحدة. لذا يكون $E = AB^c or A^c B$

$$\therefore P(E) = P(AB^c) + P(A^c B) = \frac{1}{4}\times\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\times\frac{1}{3} = \frac{2+3}{12} = \frac{5}{12}$$

$$P(A|E) = \frac{P(A\cap E)}{P(E)} = \frac{P(A).P(B^c)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}}{\frac{5}{12}} = \frac{2}{5}$$

(1) احتمال أن يخطئ $A$ الهدف في المرتين $= \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^2$. احتمال أن يخطئ $B$ الهدف في $n$ رمية $= \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$P($أن يخطئ $A$ مرتين و $B$ $n$ مرة$) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 . \left(\frac{2}{3}\right)^n$

احتمال إصابة الهدف $1-\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^n \ge 0.9$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^n \le 0.1$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n \le \frac{16}{9}(0.1) = 0.178$$

عندما $n = 1 \Rightarrow \frac{2}{3} \le 0.178$ ليس صحيح

عندما $n = 2 \Rightarrow \frac{4}{9} \le 0.178$ ليس صحيح

عندما $n = 3 \Rightarrow (0.67)^3 = 0.3 \le 0.178$ ليس صحيح

عندما $n = 4 \Rightarrow (0.67)^4 = 0.2 \le 0.178$ ليس صحيح

عندما $n = 5 \Rightarrow (0.67)^5 = 0.135 \le 0.178$ صحيح

مثال:– اعتبر $A$ , $B$ حدثان بحيث $P(A)=\frac{1}{3}$ , $P(B)=\frac{1}{4}$ , $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$ , اوجد :

(1) $P(A|B)$ (2), $P(B|A)$ (3) , $P(A\cap B^c)$ , (4) $P(A|B^c)$

الحل/

(1) $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{4+3-6}{12}=\frac{1}{12}$

$P(A|B)=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

(2) $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

(3) $A\cap B^c=A\setminus B=A-(A\cap B)$

$P(A\cap B^c)=P(A\setminus B)=P(A)-P(A\cap B)$

$=\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\frac{4-1}{12}=\frac{1}{4}$

(4) $P(A|B^c)=\frac{P(A\cap B^c)}{P(B^c)}=\frac{\frac{1}{4}}{\left(1-\frac{1}{4}\right)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}$

**مثال:**– في إحدى الكليات رسب 25% من الطلبة في امتحان الرياضيات ورسب 15% من الطلبة في مادة الكيمياء و رسب 10% من الطلبة في امتحان الراضيات والكيمياء اختير احد الطلبة بطريقة عشوائية :

(1) إذا كان راسبا في الكيمياء فما هو احتمال أن يكون راسبا في الرياضيات ؟
(2) إذا كان راسبا في الرياضيات فما هو احتمال أن يكون راسبا في الكيمياء ؟
(3) ما هو احتمال أن يكون راسبا في الرياضيات أو الكيمياء ؟
(4) ما هو احتمال أن لا يكون راسبا في الرياضيات أو الكيمياء ؟
(5) إذا لم يكن راسبا في الرياضيات فما هو احتمال أن يكون راسبا في الكيمياء ؟
(6) إذا لم يكن راسبا في الكيمياء فما هو احتمال أن يكون راسبا في الرياضيات ؟
(7) إذا لم يكن راسبا في الرياضيات فما هو احتمال أن لا يكون راسبا في الكيمياء ؟

الحل/ $P(M\cap C)=0.10$ , $P(C)=0.15$ , $P(M)=0.25$

(1) $P(M|C)=\frac{P(M\cap C)}{P(C)}=\frac{0.1}{0.15}=\frac{2}{3}$

(2) $P(C|M)=\frac{P(C\cap M)}{P(M)}=\frac{0.1}{0.25}=\frac{2}{5}$

(3) $P(M\cup C)=P(M)+P(C)-P(M\cap C)=0.25+0.15-0.1=0.3$

(4) $P((M\cup C)^c)=1-P(M\cup C)+P(C)-P(M\cap C)=1-0.3=0.7$

(5) $P(M^c)=1-P(M)=1-0.25=0.75$

$C-M=C\cap M^c=C-C\cap M=0.15-0.10=0.05$

$P(C|M^c)=\frac{P(C\cap M^c)}{P(M^c)}=\frac{0.75}{0.15}=5$

**العمليات العشوائية والأشجار البيانية:**

العمليات العشـــوائية عبارة عن متتابعة من التجارب بحيث يكون لكل تجربة عدد منته من النواتج باحتمالات معطاة ويمكن وصـف هذه العملية وحسـاب أي حدث بطريقة الأشـجار البيانية. ونسـتخدم نظرية حاصـل الضـرب المعرفة سابقا في حساب احتمال ظهور أي ناتج ممثل بمسار معطى من هذه الشجرة.

حل مثال سابق بطريقة الأشجار البيانية

**مثال:–** صـــندوق فيه 12 وحدة إنتاج من بينها 4 معيبة ســـحبت ثلاث وحدات واحدة تلو الأخرى. اوجد احتمال أن تكون : (1) الوحدات الثلاثة سليمة. (2) الأولى سليمة الثانية معيبة الثالثة سليمة. (3) الوحدات الثلاثة معيبة.

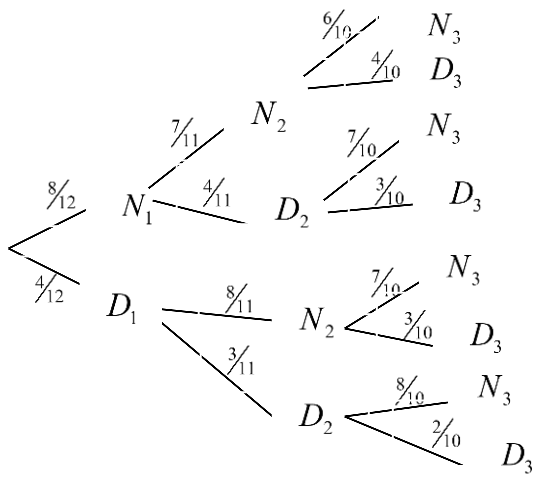
الحل/ افرض ان الوحدة معيبة $\equiv D$ ، افرض الوحدة سليمة $\equiv N$

الطريقة الاولى: $(1)P(N)=\dfrac{\binom{8}{3}}{\binom{12}{3}}=\dfrac{8\times7}{2\times11\times10}=\dfrac{14}{55}$

الطريقة الثانية:

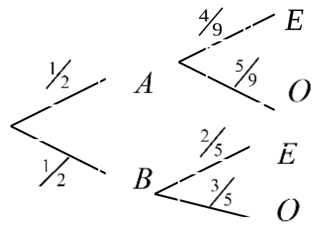
$$(1)P(N_1\cap N_2\cap N_3)=P(N_1)\times P(N_2|N_1)\times P(N_3|N_1\cap N_2)=\frac{8}{12}\times\frac{7}{11}\times\frac{6}{10}=\frac{14}{55}$$
$$(2)P(N_1\cap D_2\cap N_3)=P(N_1)\times P(D_2|N_1)\times P(N_3|N_1\cap D_2)=\frac{8}{12}\times\frac{4}{11}\times\frac{7}{10}=\frac{28}{165}$$
$$(3)P(D_1\cap D_2\cap D_3)=P(D_1)\times P(D_2|D_1)\times P(D_3|D_1\cap D_2)=\frac{4}{12}\times\frac{3}{11}\times\frac{2}{10}=\frac{1}{55}$$

الطريقة الثالثة:




$$(1)P(N_1\cap N_2\cap N_3)=\frac{8}{12}\times\frac{7}{11}\times\frac{6}{10}=\frac{14}{55}$$
$$(2)P(N_1\cap D_2\cap N_3)=\frac{8}{12}\times\frac{4}{11}\times\frac{7}{10}=\frac{28}{165}$$
$$(3)\rightleftarrows\rightleftarrows\rightleftarrows P(D_1\cap D_2\cap D_3)=\frac{4}{12}\times\frac{3}{11}\times\frac{2}{10}=\frac{1}{55}$$

**مثال:–** يحتوي الصندوق $A$ على 9 ورقات مرقمة من $1-9$ ويحتوي صندوق $B$ على 5 ورقات مرقمة من $1-5$ اختير صندوق بطريقة عشوائية وسحبت منه ورقة. إذا كان الرقم المسحوب زوجيا ما هو احتمال أن تكون الورقة قد سحبت من الصندوق $A$.

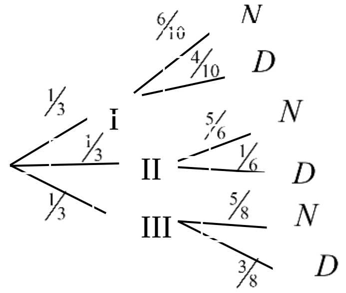



$$P(E)=\frac{1}{2}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{10+9}{45}=\frac{19}{45}$$

$$P(A|E)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}=\frac{P(A).P(E|A)}{P(E)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{4}{9}}{\frac{19}{45}}=\frac{10}{19}$$

**مثال:–** لديك ثلاث صناديق مصابيح إضاءة. بالصندوق I 10 مصابيح من بينها 4 معيبة وبالصندوق II 6 مصابيح من بينها 1 معيب وبالصندوق III 8 مصابيح من بينها 3 معيبة. اختير صندوق بطريقة عشوائية وبعد ذلك سحب مصباح منه بطريقة عشوائية. ما هو احتمال أن يكون المصباح (1) معيب (2) سليم.

الحل/ افرض ان الوحدة معيبة $\equiv D$ ، افرض الوحدة سليمة $\equiv N$




$$(1)P(D)=\frac{1}{3}\times\frac{4}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}=\frac{113}{360}$$

$or$

$D=D\cap IorD\cap IIorD\cap III$

$=(D\cap I)\cup(D\cap II)\cup(D\cap III)$

$P(D)=P(D\cap I)+P(D\cap II)+P(D\cap III)$

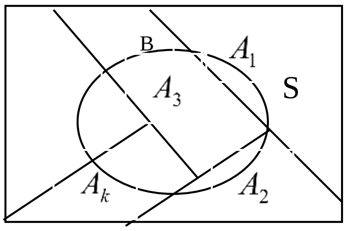
$$=P(I).P(D|I)+P(II).P(D|II)+P(III).P(D|III)=\frac{1}{3}\times\frac{4}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}=\frac{113}{360}$$

$$(2)P(N)=\frac{1}{3}\times\frac{6}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{5}{6}+\frac{1}{3}\times\frac{5}{8}=\frac{247}{360}$$

إضافة شرط أخر بالنسبة للمثال السابق: إذا سحب مصباح ووجد انه معيب ما هو احتمال أن يكون من الصندوق الأول؟

$$P(I|D)=\frac{P(I\cap D)}{P(D)}=\frac{P(I).P(D|I)}{P(D)}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{4}{10}}{\frac{113}{360}}=\frac{48}{113}$$

**التجزيئات:** افرض أن الأحداث $A_1, A_2, ......, A_k$ تمثل تجزيئا لفضـــاء العينة $S$. أي أن الأحداث $A_i$ متنافية مثنى مثنى $\forall i \neq j \quad A_i \cap A_j = \phi$ . افرض أن $B$ أي حدث في $S$ فيكون:




$$B = S \cap B$$
$$S = A_1 \cup A_2 \cup ..... \cup A_k$$
$$B = (A_1 \cup A_2 \cup ..... \cup A_k) \cap B$$
$$= (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup ..... \cup (A_k \cap B)$$

حيث أن $\forall i, j \quad A_i \cap A_j = \phi,$ أحداث متنافية

$$P(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + ..... + p(A_k \cap B)$$

**مبرهنة بيز:** إذا كانت $A_1, A_2, ......, A_k$ تمثل أحداثا في $S$ بحيث تجزء $S$ وان $B$ حدث في $S$ فان

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(A_i)P(B|A_i)}$$

البرهان: بما أن الأحداث $A_1, A_2, ......, A_k$ تجزء $S$ فان $\forall i \neq j \quad A_i \cap A_j = \phi$ وان

$$S = A_1 \cup A_2 \cup ..... \cup A_k$$

$$B = S \cap B$$
$$B = (A_1 \cup A_2 \cup ..... \cup A_k) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup ..... \cup (A_k \cap B)$$

لاحظ أن الأحداث $\forall i \neq j \quad (B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = \phi$ أحداث متنافية.

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + ..... + P(A_k \cap B)$$
$$P(B) = P(A_1).P(B|A_1) + P(A_2).P(B|A_2) + ..... + P(A_k).P(B|A_k)$$
$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i).P(B|A_i) ..........(1)$$

وكذلك لكل $i$ يكون الاحتمال المشروط إلى $A_i$ عند وقوع $B$ هو

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} ..................(2)$$
$$P(B|A_i) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(A_i)} \Rightarrow P(A_i \cap B) = P(A_i).P(B|A_i) ...................(3)$$

بتعويض (1) و(3) في (2) ينتج لدينا

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i).P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(A_i).P(B|A_i)}$$

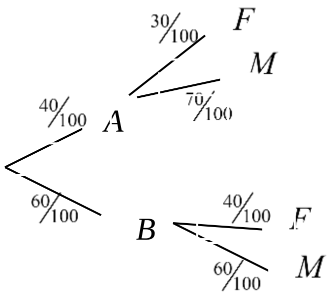
**نظرية بيز:** لو افترضنا ان لدينا صندوقين في داخلهما وحدات سليمة ومعيبة. اذا سحبت مفردة معيبة عشوائيا من احد الصناديق بدون ان نعرف، ما هو احتمال ان تكون هذه المفردة المعيبة قد سحبت من الصندوق الاول؟ للاجابة على هذا السؤال نستخدم نظرية بيز والتي تعتبر تطبيقا للاحتمال الشرطي. تهدف نظرية بيز الى حساب احتمالات صحة الفروض بناء على معلومات ميدانية او تجريبية.

**الاحتمال القبلي (السابق):** هو الاحتمال الذي يعتمد على الخبرة الشخصية وقبل الحصول على نتائج التجربة. مثلا الاحتمالات المعتمدة على سجلات المبيعات السابقة او على الرقم السابق لكمية الانتاج الغير سليم.

**الاحتمال البعدي (اللاحق):** هو الاحتمال الذي يحسب على ضوء معلومات ميدانية.

**مثال:** اذا كان $40\%$ من المدخنين في مدينة ما يفضلون نوع السكائر $A$ والباقي منهم يفضلون النوع $B$. وكان النساء يمثلون $0.30$ من الذين يفضلون النوع $A$ والنساء يمثلون $0.40$ من الذين يفضلون النوع $B$. اختير احد المدخنين بطريقة عشوائية وكانت امراة فما هو احتمال ان تكون(1) ممن يفضلون النوع $A$ (2) ممن يفضلون النوع $B$

الحل/




$$P(A\cap F)=\frac{40}{100}\times\frac{30}{100}=\frac{12}{100}$$

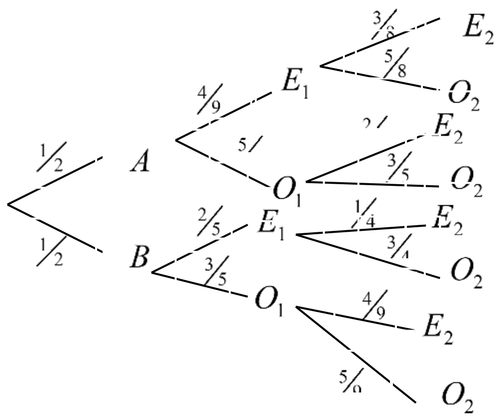
$$P(F)=\frac{40}{100}\times\frac{30}{100}+\frac{60}{100}\times\frac{40}{100}=\frac{12}{100}+\frac{24}{100}=\frac{36}{100}$$

$$(1)\ P(A|F)=\frac{P(A\cap F)}{P(F)}=\frac{\frac{40}{100}\times\frac{30}{100}}{\frac{36}{100}}=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$$

$$(2)\ P(B|F)=\frac{P(B\cap F)}{P(F)}=\frac{\frac{60}{100}\times\frac{40}{100}}{\frac{36}{100}}=\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$$

| الاحتمال القبلي | الاحتمال البعدي | الاحتمال |
|---|---|---|
| $\frac{40}{100}$ | $\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$ | $P(F\mid A)=\frac{30}{100}$ |
| $\frac{60}{100}$ | $\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$ | $P(F\mid B)=\frac{40}{100}$ |

**مثال:–** يحتوي الصندوق $A$ على 9 ورقات مرقمة من 1 – 9 ويحتوي صندوق $B$ على 5 ورقات مرقمة من 1 –5 اختير صندوق بطريقة عشوائية وسحبت منه ورقة. إذا كان الرقم المسحوب زوجيا فإننا نسحب ورقة أخرى من نفس الصندوق وإذا كان الرقم المسحوب فرديا فإننا نسحب ورقة أخرى من الصندوق الآخر:(1) ما هو احتمال أن يكون الرقمان المسحوبان زوجيان.(2) إذا كان الرقمان المسحوبان زوجيين فما احتمال أن يكون الصندوق $A$ هو المختار.




$$P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{2}\times\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}+\frac{1}{20}=\frac{2}{15}$$

$$P(A|E_1 \cap E_2) = \frac{P(A\cap(E_1\cap E_2))}{P(E_1\cap E_2)} = \frac{P(A).P(E_1\cap E_2|A)}{P(A).P(E_1\cap E_2|A)+P(B).P(E_1\cap E_2|B)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\times\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}}{\frac{2}{15}} = \frac{5}{8}$$

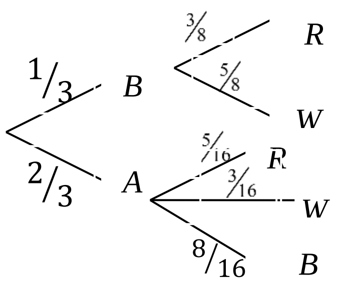
**مثال:–** لديك صندوقان في الصندوق $A$ 5 كرات حمراء و 3 بيضاء و 8 زرقاء وفي الصندوق $B$ 3 كرات حمراء و 5 بيضاء. القينا حجر نرد فإذا ظهر الرقم 3 أو 6 سحبنا كرة من $B$ وبخلاف ذلك نسحب كرة من $A$.

( أ ) اوجد احتمال أن تكون الكرة: (1) حمراء (2) بيضاء (3) زرقاء.

( ب) (1) إذا سحبنا كرة حمراء فما هو احتمال أن تكون الكرة من الصندوق $A$.

(2) إذا سحبت كرة بيضاء فما هو احتمال أن يكون الرقم 5 قد ظهر عند إلقاء حجر النرد.

الحل/




$$P(B) = P(3or6) = p(3) + p(6) = \frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$$p(A) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

هناك مساران متنافيان يؤدي إلى أن تكون الكرة حمراء.

(أ) $(1)P(R)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}+\frac{2}{3}\times\frac{5}{16}=\frac{1}{3}$

$$(2)P(W)=\frac{1}{3}\times\frac{5}{8}+\frac{2}{3}\times\frac{3}{16}=\frac{1}{3}$$

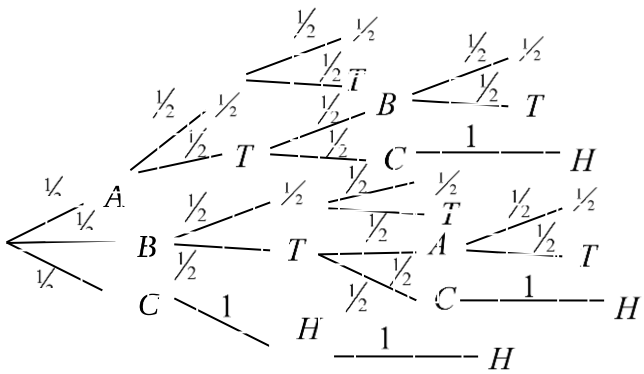
$$(3)P(B)=\frac{1}{3}\times\frac{8}{16}=\frac{1}{3}$$

**(ب)** $(1)P(A|R)=\frac{P(A\cap R)}{P(R)}=\frac{\frac{2}{3}\times\frac{5}{16}}{\frac{1}{3}}=\frac{\frac{5}{24}}{\frac{1}{3}}=\frac{15}{24}=\frac{5}{8}$

$$(2)P(5|W)=\frac{P(5\cap W)}{P(W)}=\frac{P(5).P(W|5)}{P(W)}=\frac{\frac{1}{6}\times\frac{3}{16}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{32}$$

**مثال:-** في صندوق ثلاث قطع من النقود اثنتان منها عاديتان وبالثالثة صورتان اختيرت قطعة بطريقة عشوائية ثم ألقيت. إذا وقعت الصورة فان القطعة تلقى مرة أخرى وإذا وقعت الكتابة فان قطعة أخرى تختار بطريقة عشوائية من القطعتين المتبقيتين في الصندوق ثم تلقى. المطلوب: (1) اوجد احتمال وقوع الصورة مرتين. (2) إذا ألقيت نفس القطعة مرتين فأوجد احتمال أن تكون هي القطعة ذات الصورتين (3) اوجد احتمال وقوع الكتابة مرتين.

الحل/ نفرض أن $A$ , $B$ , $C$ ثلاث قطع نقود و $C$ ذات صورتين .




(1) توجد ثلاث مسارات متنافية للحصول على صورتين

$$P(HH)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times1\times1=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

(2) نفرض أن إلقاء نفس القطعة مرتين $\equiv E$ لنبحث عن الاحتمال $P(C|E)$ .

بالنسبة للحدث $E$ توجد ثلاث مسارات متنافية لإلقاء القطعة مرتين (أي بمعنى ظهور الصورة بالرمية الأولى) وممكن اخذ $P(C|H)$ باعتبار $H$ واقعة:

$$P(E)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times1=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

$$(1)P(C|E)=\frac{P(C\cap E)}{P(E)}=\frac{\frac{1}{3}\times1}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$$

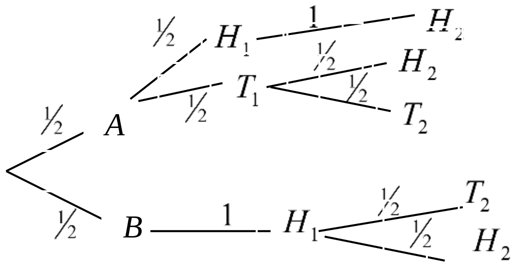
(3) يوجد مسارين متنافيين للحصول على كتابتين

$$P(HH)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{24}=\frac{1}{12}$$

**مثال:–** بصـندوق قطعة نقود عادية وقطعة نقود ذات صـورتين اختيرت قطعة بطريقة عشـوائية ثم ألقيت. إذا وقعت الصـــــورة فان القطعة الأخرى تلقى وإذا وقعت الكتابة فان نفس القطعة تلقى مرة ثانية: (1) اوجد احتمال أن تقع الصورة في المرة الثانية. (2) إذا وقعت الصورة في المرة الثانية فما هو احتمال أن تكون الصورة قد وقعت في المرة الأولى.

الحل/ نفرض أن $A$ قطعة نقود عادية و $B$ قطعة نقود ذات صورتين .

يوجد ثلاث مسارات متنافية للحصول على الصورة الثانية

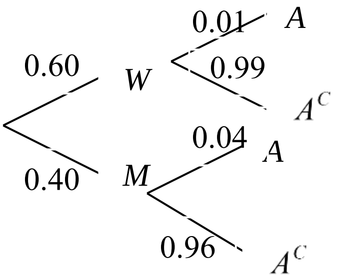



$$(1)P(H_2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{24}=\frac{5}{8}$$

$$(2)P(H_1|H_2)=\frac{P(H_1\cap H_2)}{P(H_2)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2}}{\frac{5}{8}}=\frac{4}{8}$$

**مثال:–** في إحدى الكليات وجد أن 4% من الرجال و 1% من النســـــاء أطول من 1.8م وان 60% من الطلبة من النساء اختير احد الطلبة بطريقة عشوائية ووجد انه أطول من 1.8م فما هو احتمال أن يكون امرأة .

الحل/ نفرض أن الطول 1.8م = $A$. نبحث عن الاحتمال $P(W|A)$ .




$$A=(W\cap A)or(M\cap A)$$
$$A=(W\cap A)+(M\cap A)$$
$$A=(W).P(A|W)+P(M).(A|M)$$

$$(1)\qquad P(W|A)=\frac{P(W\cap A)}{P(A)}=\frac{P(W).P(A|W)}{P(W).P(A|W)+P(M).P(A|M)}=\frac{0.60(0.01)}{0.60(0.01)+0.40(0.04)}=\frac{3}{11}$$

**مثال:–** في مدينة نعلم أن 40% من المواطنين لهم شعر بني اللون و 25% لهم عيون بنية اللون و 15% لهم شعر بني وعيون بنية اختير مواطن بطريقة عشـــوائية من المدينة.(1) إذا كان شـــعره بني فما هو احتمال أن تكون عيناه أيضا بنيتان. (2) إذا كانت عيناه بنيتان فما هو احتمال أن يكون شعره ليس بنيا.(3) ما هو احتمال أن لا يكون شعره بني وان لا تكون عيناه بنيتان.

الحل/ 0.04 = 40% شعر بني $\equiv A$ ،

0.25 = 25% عيون بنية $\equiv B$

0.15 = 15% شعر بني وعيون بنية $\equiv A \cap B$

(1) نبحث عن الاحتمال $P(B|A)$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0.15}{0.40} = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$$

(2) $P(A^c|B)$

$$P(A^c|B) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)}$$

$$A^c \cap B = B \setminus A$$

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B) = 0.25 - 0.15 = 0.10$$

$$P(A^c|B) = \frac{0.10}{0.25} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

(3) $A^c$ و $B^c = A^c \cap B^c$

$$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= 0.40 + 0.25 - 0.15 = 0.50$$

$$P(A^c \cap B^c) = p\left(P(A \cup B)^c\right) = 1 - P(A \cup B)$$
$$= 1 - 0.5 = 0.5$$

**مثال:–** في صـــندوق 5 صـــمامات كهربائية من بينها صـــمامان معيبان اختبرت الصـــمامات واحدا بعد الأخر حتى يكتشف الصمامان المعيبان ما هو احتمال أن تتوقف عملية الاختيار بعد:

(1) الاختيار الثاني (2) الاختيار الثالث. (3) إذا توقفت عملية الاختيار بعد الاختيار الثالث ما هو احتمال أن يكون الصمام الأول معيبا.

الحل/ افرض $D$ معيب و $N$ سليم

(1) تتوقف العملية بعد الاختيار الثاني إذا كان الصمامان المختاران معيبان.

$$P(D_1D_2) = P(D_1 \cap D_2) = P(D_1).P(D_2|D_1) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

وممكن بطريقة التوافيق $\dfrac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \dfrac{1}{10}$

(2)هناك ثلاث احتمالات متنافية لتتوقف العملية بعد الاختيار الثالث وهي $NDD \text{ or } DND \text{ o } NNN$

(حيث تتوقف العملية لاكتشاف الصمامان المعيبان)

$$P(\text{توقف بعد الاختيار الثالث}) = P(N_1D_1D_2)+P(D_1N_1D_2)+P(N_1N_1N_2)$$
$$= P(N_1).P(D_1|N_1).P(D_2|N_1 \cap D_1)$$
$$+ P(D_1).P(N_1|D_1).P(D_2|D_1 \cap N_1)$$
$$+ P(N_1).P(N_2|N_1).P(N_3|N_1 \cap N_2)$$
$$= \frac{3}{5}+\frac{2}{4}+\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{4}+\frac{1}{3}+\frac{3}{5}+\frac{2}{4}+\frac{1}{3} = \frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10} = \frac{3}{10}$$

(3) نفرض $E = (D_1 \cap N_2 \cap D_3) \cup (N_1 \cap D_2 \cap D_3) \cup (N_1 \cap N_2 \cap N_3)$

$$P(E) = \frac{3}{10}$$

$$P(D_1 \cap N_2 \cap D_3|E) = \frac{P(D_1 \cap N_2 \cap D_3 \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3}}{\frac{3}{10}} = \frac{1}{3}$$