Mathematical Statistics **الاحصاء الرياضي**

Fourth class **المرحلة الرابعة**

Ass. Prof. Dr. Ghanim Mahmood Dhaher **أ.م. د. غانم محمود ظاهر**

Najlaa Sedeeq Yahya **م. نجلاء صديق يحيى**

$F(x)$: distribution function

دالة توزيع

متقطع

① $F(x) = p(X \le x) = \sum_{u \le x}$ if x is discrete

مستمر

② $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\, ds$ if x is continuous

And $F(0) = 0$ $\quad F(\infty) = 1$

$f(x)$:- probability density function (p.d.f)
satisfies two conditions :-

متقطع

$$\left.\begin{array}{l} ① \; f(x) \geq 0 \\ ② \; \sum_{x \in R_x} f(x) = 1 \end{array}\right\} x \text{ is discrete}$$

and

مستمر

$$\left.\begin{array}{l} ① \; f(x) \geq 0 \\ ② \; \int_{x \in R_x} f(x)\, dx = 1 \end{array}\right\} x \text{ is continuous}$$

(Mathematical Expectation) التوقع الرياضي

العزم الأول

$E(X) = \mu =$ توقع $=$ معدل $=$ مجموع / عدد : first moment

$$E(x) = \sum_{x \in R_X} x\, f(x)$$ disc متقطع

$$E(x) = \int_{x \in R_X} x\, f(x)\, dx$$ cont مستمر

$E(x) = M'_x(0) \Leftarrow E(x) =$ first moment

$M''_x(0) \Leftarrow E(x^2) =$ second moment

$\vdots$

$M_x^{(r)}(0) \Leftarrow E(x^r) =$ r-th moment

Joint Distribution التوزيع المشترك

دالة كثافة احتمالية

if X and Y are two r.v.s then the joint p.d.f is given by $f(x,y)$ which satisfies the

① where X, Y discrete عندما X,Y متقطع

ⓐ $f(x,y) \geq 0$

ⓑ $\sum_{y \in R_y} \sum_{x \in R_x} f(x,y) = 1$

② and if X, Y continuous عندما X,Y مستمر

ⓐ $f(x,y) \geq 0$

ⓑ $\int_{y \in R_y} \int_{x \in R_x} f(x,y) = 1$

Continuous Distributions التوزيعات المستمرة

① Uniform Distribution التوزيع المنتظم

$X \sim U(a,b)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{therwise} \end{cases}$$

التوقع

$$E(x) = \frac{a+b}{2}$$

$$V(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$$ التباين

$$M_x(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)} , \quad t \neq 0 , \quad a = b$$ مولد العزوم

Normal Distribution التوزيع الطبيعي

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} & -\infty < x < \infty \\ 0 & \text{other wise} \end{cases}$$

بخلاف ذلك

$E(x) = \mu$ التوقع

$V(x) = \sigma^2$ التباين

$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$ مولد العزوم

(5) توزيع جاما

Gamma distribution

الشكل الاول $f(x) = \frac{1}{\Gamma\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x}$ $\alpha > 0$ الشكل الاول اذا كانت

دالة جاما (مثلا)

رمز جاما وليس جذر $\Gamma\alpha = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx = (\alpha-1)!$

$\Gamma\alpha = (\alpha-1)!$ ... 1 $\Rightarrow \Gamma_1 = (1-1)! = 0! = 1$, $\Gamma_2 = (2-1)! = 1$

$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\,\Gamma\alpha$ ... 2

$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ ... 3

$\Gamma\frac{3}{2} = \Gamma(\frac{1}{2}+1) = \frac{1}{2}\Gamma\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}$

الشكل الثاني: if $x = \dfrac{y}{B}$, $B > 0$

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma\alpha \, B^{\alpha}} \, y^{\alpha-1} \, e^{-\frac{y}{B}} & y > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

الشكل النهائي لدالة توزيع كاما للمعلمتين (α, B)

$\therefore Y \sim G(\alpha, B)$

$E(x) = \alpha B$, $V(y) = \alpha B^2$

$M_y(t) = (1 - Bt)^{-\alpha}$

مثال: $X \sim G(\overset{\alpha}{10}, \overset{B}{6})$ أوجد الدالة الاحتمالية والتوقع والتباين والدالة المولدة للعزوم

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma 10 \; 6^{10}} \, x^{10-1} \, e^{-\frac{x}{6}}$$

$E(x) = \alpha B = 10 * 6 = 60$

$V(x) = \alpha B^2 = 10 * (6)^2 = 360$

$M_x(t) =$ واجب

توزيع
مربع كاي

-: Chi-Square Distribution

$B = 2$
$\alpha = \frac{r}{2}$ نستخدم القيم في حالة

If ● hear a Gamma distribution with $B = 2$

and $\alpha = \frac{r}{2}$ where r is Postive integer

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma\frac{r}{2}\, 2^{\frac{r}{2}}}\, x^{\frac{r}{2}-1}\, e^{-\frac{x}{2}} & x \geq 0 \\ 0 & \text{other} \end{cases}$$

this is a chi-seguare Distribution with (r)
درجة
degree of freedom $X \sim \chi^2(r)$

$E(x) = r$ $\quad V(x) = 2r$ $\quad M_x(t) = (1-2t)^{-\frac{r}{2}}$

الكتابة

مثال: $X \sim G(\overset{\alpha}{10}, \overset{\beta}{6})$ أوجد الدالة الاحتمالية والتوقع والتباين والدالة المولدة للعزوم

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(10)\, 6^{10}} \, x^{10-1} \, e^{-\frac{x}{6}}$$

$$\mu(x) = \alpha\beta = 10 * 6 = 60$$

$$V(x) = \alpha\beta^2 = 10 \times (6)^2 = 360$$

$M_x(t) =$ واجب

توزيع بيتا ⑥

Beta Distribution

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma\alpha\,\Gamma\beta}\, x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{otheris} \end{cases}$$

$$E(x) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \qquad V(x) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

$M_x(t) =$ مامطلوب.

$$X \sim B(\alpha, \beta)$$

مفيد

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx$$ دالة بيتا

the brobability density function (p.d.f) دالة الكثافة الاحتمالية

$$f(x) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \qquad 0 < x < 1$$

ملاحظات عن جاما

جاما $\Gamma n = (n-1)!$

n تكون اعداد صحيحة موجبة

$\Gamma 3 = (3-1)! = 2! = 2\cdot 1 = 2$

$\Gamma 10 =$

$\vdots$

$\Gamma 1 = (1-1)! = 0! = 1$

$\Gamma 0 = (0-1)! = (-1)! = \infty$

كل عدد سالب
من ! هو ∞

$\Gamma \frac{1}{2} = \sqrt{\pi}$

$\Gamma \frac{3}{2} = \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

$\Gamma \frac{5}{2} = \frac{3}{2} + 1 = \frac{3}{2}\Gamma\frac{3}{2} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$

ملاحظات عن جاما

جاما $\Gamma n = (n-1)!$ بشرط تكون اعداد صحيحة موجبة

$\Gamma 3 = (3-1)! = 2! = 2 \cdot 1 = 2$

$\Gamma 10 =$

$\vdots$

$\Gamma 1 = (1-1)! = 0! = 1$

$\Gamma 0 = (0-1)! = (-1)! = \infty$

كل عدد سالب
من ! هو ∞

$\Gamma \frac{1}{2} = \sqrt{\pi}$

$\Gamma \frac{3}{2} = \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

$\Gamma \frac{5}{2} = \frac{3}{2}+1 = \frac{3}{2}\Gamma\frac{3}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$

توزيع برنولي

Bernolli dist^n ①

$X \sim Ber(p)$

نجاح فشل

$$f(x) = \begin{cases} p^x q^{1-x} & x = 0, 1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$E(x) = p$, $V(x) = pq$ $M_x(t) = q + pe^t$

حالة خاصة من

↳

توزيع ذي الحدين

Binomial dist^n ②

$X \sim bin(n, p)$

$$f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} & x = 0, 1, 2, \dots, n \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$E(x) = np$, $Var(x) = npq$ $M_x(t) = (q + pe^t)^n$

توزيع بواسون

Poisson dist^

$X \sim Po(\lambda)$

$$P(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} & x = 0, 1, \dots, \infty \\ 0 & \end{cases}$$

$E(x) = Var(x) = \lambda$

$$M_x(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

ذو الحدين سالب

Negative Binomial dist^n 5

$X \sim Nb(r, p)$

$$f(x) = \begin{cases} \binom{x+r-1}{r-1} p^r \cdot q^x & , x = 0, 1 \\ 0 & 0 < p < 1 , r > 0 \end{cases}$$

$E(x) = \dfrac{rq}{p}$, $Var(x) = \dfrac{rq}{p^2}$

$M_x(t) = \left[\dfrac{p}{1 - qe^t} \right]^r$

Derivative of Integrals : (Leibniz Rule)

① $\frac{d}{dx}\int_a^x f(u)\,du = f(x)$ مثال $\int_0^x du =$

دالة
نعوض الحد الاعلى ونشتقه

② $\frac{d}{dx}\int_{a \in \mathbb{R}}^{\phi(x)} f(u)\,du = f(\phi(x))\,\frac{d\phi(x)}{dx}$

دالة
الاعلى – الادنى

③ $\frac{d}{dx}\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(u)\,du = f(\phi_2(x))\,\frac{d\phi_2(x)}{dx} - f(\phi_1(x))\,\frac{d\phi_1(x)}{dx}$

دالة

$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ $-\infty < x < \infty$

متغير عشوائي
معطى

theorem :- If the random variable $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma^2 > 0$ then the random variable $W = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

مطلوب

$f(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}w^2}$ $-\infty < w < \infty$

Example :- Find $\int^{\frac{y+3}{5}} 3x^2\,dx$ using Leibniz باستخدام

theorem (2) :- If the random variable $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, then the random variable $V = \left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(1)$

مربع كاي

Proof :-

Range $\begin{cases} R_X = \{x : -\infty < x < \infty\} \\ x \to -\infty \quad \therefore V \to \infty \\ x \to \infty \quad \therefore V \to \infty \end{cases}$

$R_V = \{v : 0 \le v < \infty\}$

$G(V) = P(V \le v) = P\left(\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 \le v\right) = P(w^2 \le v)$

$= P\{w : -\sqrt{v} < a < \sqrt{v}\}$ حسب مبرهنة 1

$= \int_{-\sqrt{v}}^{\sqrt{v}} f(x)\,dx$

$\sqrt{v}$

$-\frac{1}{2}w^2$

$$= P\{ W : -\sqrt{v} < a < \sqrt{v} \}$$

$$= \int_{-\sqrt{v}}^{\sqrt{v}} f(x)\, dx$$

دالة زوجية

$$2 \int_{0}^{\sqrt{v}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}w^2}\, dw$$ حسب مبرهنة ①

حسب قاعدة ②

$$= 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{v})^2} \cdot \frac{1}{2} v^{-\frac{1}{2}}$$ مشتقة الحد الاعلى

$$g(v) = \cancel{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{v})^2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} v^{-\frac{1}{2}}$$

$$g(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}v} \cdot v^{-\frac{1}{2}} \quad —①$$

حسب مبرهنة لجذ

(1) هنا

أي انها $\chi^2(1)$

تكامل

دالة التوزيع

$$G(w) = \int_{-\infty}^{\sigma w + \mu} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

نحل بطريقة Leibniz

Probability

مشتقة الداخل

$$g(w) = G'(w) = \frac{1}{\cancel{\sigma}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\cancel{\sigma} w + \cancel{\mu} - \cancel{\mu}}{\cancel{\sigma}}\right)^2} \cdot \cancel{\sigma}$$

$$g(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} w^2}$$

$w \sim N(\underset{\mu}{0}, \underset{\sigma^2}{1})$ طبيعي معياري

theorem (2) :- If the random variable $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

then the random variable $V = \left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2_{(1)}$

مربع كاي

Proof :-

$R_x = \{ x : -\infty < x < \infty \}$

Range $\begin{cases} x \to -\infty & \therefore V \to \infty \\ x \to \infty & \therefore V \to \infty \end{cases}$

$R_V = \{ v : 0 \leq v < \infty \}$

$G(V) = P(V \leq v) = P\left\{ \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 \leq v \right\} = P\{ w^2 \leq v \}$

$= P\{ w : -\sqrt{v} < a < \sqrt{v} \}$ حسب مبرهنة 1

$$= P\{ w : -\sqrt{v} < a < \sqrt{v} \}$$

$$= \int_{-\sqrt{v}}^{\sqrt{v}} f(x)\, dx$$

دالة زوجية

$$2 \int_{0}^{\sqrt{v}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} w^2} \, dw$$ حسب مبرهنة 1

حسب قاعدة 2

مشتقة الحد الاعلى

$$= 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{v})^2} \cdot \frac{1}{2} v^{-\frac{1}{2}}$$

$$g(v) = \cancel{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{v})^2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} v^{-\frac{1}{2}}$$

$$g(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} v} \cdot v^{\frac{1}{2}} \quad — 1$$

حسب مبرهنة لجزء

(٧) هنا

[illegible]

$$\chi^2(r) = f(x) = \frac{1}{\Gamma\frac{r}{2} \cdot 2^{\frac{r}{2}}}\, x^{\frac{r}{2}-1}\, e^{-\frac{x}{2}}$$

$$\chi^2(1) \rightarrow f(x) = \frac{1}{\Gamma\frac{1}{2}\, 2^{\frac{1}{2}}}\, x^{\frac{1}{2}-1}\, e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, x^{-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{x}{2}} \quad \text{--- (2)}$$

مقارنة (1) مع (2) نحصل ع

$$V \sim \chi^2(1)$$

5) $M_x(t) = (1-6t)^{-10}$

$X \sim Ga(\alpha, \beta) \Rightarrow X \sim Ga(10, 6)$

$M_x(t) = (1-\beta t)^{-\alpha}$

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma\alpha \ \beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}$$

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma 10 \ 6^{10}} x^{9} e^{-\frac{x}{6}}$$

$E(x) = \alpha\beta = 10(6) = 60$

$V(x) = \alpha\beta^2 = 10(6^2) = 10(36) = 360$

Ex:- let X r.v. with p.d.f. $f(x) = 3x$, $0 < x < \sqrt{\frac{2}{3}}$

let $Y = 3x^2 + 10$ find $g(y)$? give the name of distribution?

أعين   توزيع

الحل

$R_x = \{ x : 0 < x < \sqrt{\frac{2}{3}} \}$

Range
$x = 0 \rightarrow y = 10$
$x = \sqrt{\frac{2}{3}} \rightarrow y = 12$

$R_y : \{ y : 10 \le y \le 12 \}$

prop.) $G(y) = P(Y \le y) = P(3x^2 + 10 \le y) = P\left(X \le \sqrt{\frac{y-10}{3}}\right)$

$= \int_0^{\sqrt{\frac{y-10}{3}}} 3x \, dx = \frac{3x^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{\frac{y-10}{3}}}$

$\frac{3}{2} \cdot \frac{(y-10)}{3} = \frac{y-10}{2}$

$g(y) = G'(y) = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} & 10 \le y \le 12 \\ 0 & \text{others} \end{cases}$

$Y \sim U(10, 12)$

متغير واحد

(a) one Variable (univariate)

دالة كتلة الاحتمالية

Definition:- let $f(x)$ is p.m.f. of r.vs. and $y = u(x)$ is one to one transformation then p.m.f of y is given by $g(y) = f[\phi(y)]$ where $\phi(y) = x$ is the inverse of transformation

Ex:- let X is r.vs. with p.m.f $f(x) = \frac{2}{5}$, $x = 1, 2, 3$

let $Y = 3X + 2$ find $g(y)$?

$R_x = \{x : x = 1, 2, 3\}$

$R_y = \{y : y = 5, 8, 11\}$

inverse

معكوس

$Y = 3X + 2 \Rightarrow X = \frac{y-2}{3}$

نعوض بالدالة

$f(\ldots) \quad f\left(\frac{y-2}{\ldots}\right)$

EX3:- let $X \sim bin\left(\overset{n}{3}, \overset{p}{\tfrac{1}{3}}\right)$, $Y = X^2$ find $g(y)$?

$bin(n, p) \Rightarrow f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$, $x = 0, 1, \dots, n$

$R_x = \{x : x = 0, 1, \dots, n\}$

$R_y = \{y : y = 0, 1, 4, \dots, n^2\}$

$Y = X^2 \to X = \pm\sqrt{y} = \phi(y)$ ناخذ + فقط

$g(y) = f(\phi(y)) = f(\sqrt{y})$

$q = 1-p$

$$g(y) = \begin{cases} \binom{3}{\sqrt{y}} \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{y}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{3-\sqrt{y}}, & y = 0, 1, 4, \dots, n^2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$