University of Mosul
College of Education
For Pure Sciences

محاضرات في مادة التبولوجي

كلية التربية للعلوم الصرفة
قسم الرياضيات

المرحلة الرابعة

أ.م.د. صبيح وديع اسكندر
أ.د. عامر عبد الاله محمد
أ.م.د. بيداء سهيل عبد الله

المحاضرة الاولى

الفصل الثاني : الفضاء التبولوجي

تعريف: لتكن $X \neq \emptyset$ ، ولتكن τ عائلة من مجموعات جزئية من X ، يقال ان τ تبولوجيا على X او ان (X,τ) فضاء تبولوجي اذا وفقط اذا تحقق الشروط (البديهيات) الثلاث الاتية:

① $\emptyset, X \in \tau$

② $\bigcup_{\lambda} G_{\lambda} \in \tau \Longleftarrow G_{\lambda} \in \tau, \forall \lambda \in \Lambda$

③ $\bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \tau \Longleftarrow G_i \in \tau \quad i = 1, 2, \dots, n$

ملاحظة: تسمى عناصر ال τ بالمجموعات المفتوحة للفضاء التبولوجي.

مثال: لتكن $X = \{a, b, c\}$

$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}, X\}$

هل ان (X,τ) فضاء تبولوجي؟

① $X, \emptyset \in \tau$

② $\emptyset \cup G_i = G_i \quad \forall i$

$\{a\} \cup \{a,b\} = \{a,b\} \in \tau$

$\{a\} \cup X = X \in \tau$

$\{a,b\} \cup X = \{a,b,c\} = X \in \tau$

3) $\emptyset \cap G_i = \emptyset \in \tau \qquad \forall i$

$\{a\} \cap \{a,b\} = \{a\} \in \tau$

$\{a\} \cap \{a,b,c\} = \{a\} \in \tau$

$\{a,b\} \cap X = \{a,b\} \in \tau$

∴ (X,τ) فضاء تبولوجي

مثال: ليكن $X=\{a,b,c,d\}$, ولتكن

$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}, X\}$

هل ان τ تبولوجيا على X ؟

1) $\emptyset, X \in \tau$

2) $\emptyset \cup G_i = G_i \in \tau \qquad \forall\ G_i \in \tau \quad i=1,2,\dots,5$

$\{a\} \cup \{b,c\} = \{a,b,c\} \in \tau$

$\{a\} \cup \{a,b,c\} = \{a,b,c\} \in \tau$

$\{a\} \cup X = X \in \tau$

$\{b,c\} \cup \{a,b,c\} = \{a,b,c\} \in \tau$

$\{b,c\} \cup X = X \in \tau$

$\{a,b,c\} \cup X = X \in \tau$

③ $\emptyset \cap G_i = \emptyset \in \tau \quad \forall\, G_i \in \tau \,,\; i = 1,2,\dots,5$

$\{a\} \cap \{b,c\} = \emptyset \in \tau$

$\{a\} \cap \{a,b,c\} = \{a\} \in \tau$

$\{a\} \cap X = \{a\} \in \tau$

$\{b,c\} \cap \{a,b,c\} = \{b,c\} \in \tau$

$\{b,c\} \cap X = \{b,c\} \in \tau$

$\{a,b,c\} \cap X = \{a,b,c\} \in \tau$

∴ (X,τ) فضاء تبولوجي .

مثال : لتكن $X=\{a,b,c,d\}$ ولتكن

$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a,c\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, X\}$

هل ان (X,τ) فضاء تبولوجي ؟

① $\emptyset , X \in \tau$

② $\emptyset \cup G_i = G_i \quad \forall\, i = 1,2,\dots,6$

$G_i \cup X = X \quad \forall\, i = 1,2,\dots,6 \quad \tau \ni G_i \subseteq X$ ∵

$\{a\} \cup \{a,c\} = \{a,c\} \in \tau$

$\{a\} \cup \{c,d\} = \{a,c,d\} \in \tau$

$\{a\} \cup \{a,c,d\} = \{a,c,d\} \in \tau$

$\ldots\} \cup \{c,d\} = \{a,c,d\} \in \tau$

$\{a,c\} \cup \{a,c,d\} = \{a,c,d\} \in \tau$

$\{c,d\} \cup \{a,c,d\} = \{a,c,d\} \in \tau$

(3) $\phi \cap G_i = \phi \quad \forall\, i = 1,2,\ldots,6 \quad G_i \in \tau$

$G_i \cap X = G_i \quad \forall\, i = 1,2,\ldots,6 \quad G_i \subseteq X \quad \therefore$

$\{a\} \cap \{a,c\} = \{a\}$

$\{a\} \cap \{c,d\} = \phi$

$\{a\} \cap \{a,c,d\} = \{a\}$

$\{a,c\} \cap \{c,d\} = \{c\} \notin \tau$

(X,τ) τ ليس تبولوجي على X

مثال ④ : لتكن $X=\{a,b,c\}$ جد جميع التبولوجيا على X بحيث تشكل مع التبولوجيا على X فضاءً تبولوجياً.

$\tau_1=\{\phi, X\}$. تبولوجيا تافهة

$\tau_2=\{\phi, \{a\}, X\}$

$\tau_3=\{\phi, \{b\}, X\}$

$\tau_4=\{\phi, \{c\}, X\}$

$\tau_5=\{\phi, \{a,b\}, X\}$

$\tau_6=\{\phi, \{a,c\}, X\}$

$\tau_7=\{\phi, \{b,c\}, X\}$

$\tau_8=\{\phi, \{a\}, \{a,b\}, X\}$

$\tau_9=\{\phi, \{a\}, \{a,c\}, X\}$

$\tau_{10}=\{\phi, \{b\}, \{a,b\}, X\}$

$\tau_{11}=\{\phi, \{b\}, \{b,c\}, X\}$

$\tau_{12}=\{\phi, \{c\}, \{a,c\}, X\}$

$\tau_{20}=\{\phi, \{c\}, \{a,b\}, X\}$

$\tau_{21}=\{\phi, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, X\}$

$\tau_{22}=\{\phi, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}, X\}$

$\tau_{23}=\{\phi, \{c\}, \{a,c\}, \{b,c\}, X\}$

$\tau_{13} = \{\emptyset, \{c\}, \{b,c\}, X\}$

$\tau_{14} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, X\}$

$\tau_{15} = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a,c\}, X\}$

$\tau_{16} = \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b,c\}, X\}$

$\tau_{17} = \{\emptyset, \{c\}, \{a,b\}, X\}$

$\tau_{17} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, X\}$ التبولوجيا العادية

$\tau_{18} = \{\emptyset, \{a\}, \{b,c\}, X\}$, $\tau_{19} = \{\emptyset, \{b\}, \{a,c\}, X\}$.

ملاحظة: ان اتحاد تبولوجيتين على مجموعة ليس بالضرورة تبولوجيا على المجموعة نفسها.

مثال: لتكن $X = \{a,b,c\}$ ولتكن

$\tau_1 = \{\emptyset, \{a\}, X\}$

$\tau_2 = \{\emptyset, \{b\}, X\}$

هل ان $\tau_1 \cup \tau_2$ تبولوجيا على X

$\tau_1 \cup \tau_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$

$\{a\} \cup \{b\} = \{a,b\} \notin \tau_1 \cup \tau_2$

$\therefore$ $\tau_1 \cup \tau_2$ ليس تبولوجيا على X

ولكن $\tau_1 \cap \tau_2$ هو تبولوجيا على X

$\tau_1 \cap \tau_2 = \{\emptyset, X\}$

مبرهنة: ان تقاطع عائلة من التبولوجيات على مجموعة X يكون تبولوجيا على المجموعة نفسها.

البرهان: لنفرض ان $\{T_i : i \in I\}$ عائلة من التبولوجيات على X
سوف نثبت ان $\cap T_i$ هو تبولوجيا على X.
الوجب ان تحقق البديهيات الثلاثة:

① بما ان $\phi, X \in T_i$ لكل $i \in I \Leftrightarrow T_i$ تبولوجيا على X
لذلك
$\phi, X \in \cap T_i$

② نفرض ان لكل $i \in I$ $G_\lambda \in T_i$ لكل $\lambda \in \Lambda$
بما ان $\cup_\lambda G_\lambda \in T_i$ لان T_i تبولوجيا لكل $i \in I$
$\therefore \cup_\lambda G_\lambda \in \bigcap_i T_i$

③ نفرض ان لكل $i \in I$ $G_\lambda \in T_i$ لكل λ
$1 \leq i \leq n$ كذلك
$\bigcap_{\lambda=1}^{n} G_\lambda \in T_i$
لان T_i تبولوجيا على X لكل $i \in I$
$\therefore \bigcap_{\lambda=1}^{n} G_\lambda \in \bigcap_i T_i \quad (1 \leq i \leq n)$
$\therefore \bigcap_i T_i$ هو تبولوجيا على X

المحاضرة الثانية

نقط الغاية: ليكن (X,τ) فضاءاً تبولوجياً و $A \subseteq X$

يقال عن النقطة $x \in X$ انها نقطة غاية لـ A

اذا وفقط اذا تحقق الشرط التالي:

لكل مجموعة مفتوحة G تحتوي على النقطة x يكون

$$A \cap G - \{x\} \neq \emptyset$$

اي ان كل مجموعة مفتوحة G تحتوي على x يجب ان تحتوي على نقطة من A تختلف عن x:

المجموعة المشتقة: ليكن $A \subseteq X$ نرمز لمجموعة كل نقاط غاية المجموعة A بالرمز $d(A)$ وتسمى بالمجموعة المشتقة اي ان

$$d(A) = \{x : x \text{ هي نقطة غاية للمجموعة } A\}$$

مثال: ليكن $X = \{a,b,c,d,e\}$

$$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b,d\}, \{a,b,d\}, \{b,c,d,e\}, X\}$$

$$A = \{a,b,c\}, \quad B = \{b,c,d\}$$

اوجد $d(A)$, $d(B)$

الحل: نختبر جميع نقاط المجموعة X فاعتبار النقطة a يكون بالقانون

$$A \cap G - \{a\} \neq \emptyset$$

اي جميع المفتوحات (G) التي تحتوي على a هي

$\{a\}, \{a,b,d\}, X$

$$A \cap \{a\} - \{a\} = \{a\} - \{a\} = \emptyset$$

$$a \notin d(A)$$

لا نأخذ بقية المجموعات المفتوحة الأخرى لأنها إذا كانت
إحدى المجموعات المفتوحة لا تحقق نتوقف .

المجاميع المفتوحة التي تحتوي على b هي

$$\{b,d\},\ \{a,b,d\},\ \{b,c,d,e\},\ X$$

$$A \cap G - \{b\} \neq \emptyset$$

$$A \cap \{b,d\} - \{b\} = \{b\} - \{b\} = \emptyset$$

$$\therefore b \notin d(A)$$

المجاميع المفتوحة التي تحتوي على c هي

$$\{b,c,d,e\},\ X$$

$$A \cap G - \{c\} \neq \emptyset$$

$$\{a,b,c\} \cap \{b,c,d,e\} - \{c\} = \{b,c\} - \{c\}$$
$$= \{b\} \neq \emptyset$$

$$\{a,b,c\} \cap X - \{c\} = \{a,b,c\} - \{c\} = \{a,b\} \neq \emptyset$$

$$\therefore c \in d(A)$$

الاجزاء المفتوحة التي تحتوي على d هي

$\{b,d\},\ \{a,b,d\},\ \{b,c,d,e\},\ X$

$A \cap G - \{d\} \neq \emptyset$

$A \cap \{b,d\} - \{d\} = \{b\} - \{d\} = \{b\} \neq \emptyset$

$A \cap \{a,b,d\} - \{d\} = \{a,b\} - \{d\} = \{a,b\} \neq \emptyset$

$A \cap \{b,c,d,e\} - \{d\} = \{b,c\} - \{d\} = \{b,c\} \neq \emptyset$

$A \cap X - \{d\} = A - \{d\} = A \neq \emptyset$

$\therefore\ d \in d(A)$

الاجزاء المفتوحة التي تحتوي على e هي

$\{b,c,d,e\},\ X$

$A \cap G - \{e\} \neq \emptyset$

$A \cap \{b,c,d,e\} - \{e\} = \{b,c\} - \{e\} = \{b,c\} \neq \emptyset$

$A \cap X - \{e\} = A - \{e\} = A \neq \emptyset$

$\therefore\ e \in d(A)$

$\therefore\ d(A) = \{c,d,e\}$

الآن نجد $d(B)$

$B = \{b, c, d\}$

$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b, d\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d, e\}, X\}$

المجاميع المفتوحة التي تحتوي على a هي

$\{a\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c, d, e\} = X$

$B \cap \{a\} - \{a\} = \emptyset - \{a\} = \emptyset$

$a \notin d(B)$

المجاميع المفتوحة التي تحتوي على b هي

$\{b, d\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d, e\}, X$

$B \cap \{b, d\} - \{b\} = \{b, d\} - \{b\} = \{d\} \neq \emptyset$

$B \cap \{a, b, d\} - \{b\} = \{d\} \neq \emptyset$

$B \cap \{b, c, d, e\} - \{b\} = \{d, c\} \neq \emptyset$

$B \cap X - \{b\} = B - \{b\} = \{c, d\} \neq \emptyset$

$\therefore\ b \in d(B)$

الجوارات التي تحوي c هي

$\{b, c, d, e\}, X$

$B \cap \{b, c, d, e\} - \{c\} = B - \{c\} = \{b, d\} \neq \emptyset$

$B \cap X - \{c\} = B - \{c\} = \{b, d\} \neq \emptyset$

$\therefore c \in d(B)$

الجوارات التي تحوي d هي

$\{b, d\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d, e\}, X$

$B \cap \{b, d\} - \{d\} = \{b\} \neq \emptyset$

$B \cap \{a, b, d\} - \{d\} = \{b\} \neq \emptyset$

$B \cap \{b, c, d, e\} - \{d\} = \{b, c\} \neq \emptyset$

$B \cap X - \{d\} = \{b, c\} \neq \emptyset$

$d \in d(B)$

الجوارات التي تحوي e هي

$\{b, c, d, e\}, X$

$B \cap \{b, c, d, e\} - \{e\} = B \neq \emptyset$

$B \cap X - \{e\} = B \neq \emptyset$

$e \in d(B)$

$d(B) = \{b, c, d, e\}$

المجموعة المغلقة: ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي. يقال للمجموعة $E\subseteq X$ بانها مغلقة اذا احتوت على جميع نقاط غايتها اي ان:

$$d(E)\subseteq E$$

مثال: ليكن $X=\{a,b,c,d\}$

$$\tau=\{\emptyset,\{a\},\{b,c\},\{a,b,c\},X\}$$

$$E=\{a,d\}$$

هل ان E مغلقة؟

الحل: نجد اولاً نقاط الغاية للمجموعة E من خلال الصيغة: نفرض ان $x\in X$ لكل مجموعة مفتوحة G تحتوي على x يجب ان نحصل على انه

$$E\cap G-\{x\}\neq\emptyset \iff x\in d(E)$$

لان $a\in X$

والمجاميع المفتوحة التي تحتوي على a هي

$\{a\},\{a,b,c\},X$

$$E\cap\{a\}-\{a\}=\{a\}-\{a\}=\emptyset$$

$\therefore a\notin d(E)$

$b\in X$

المجاميع المفتوحة التي تحتوي على b هي

$\{b,c\},\{a,b,c\},X$

$$E\cap\{b,c\}-\{b\}=\{b\}-\{b\}=\emptyset$$

$\therefore b\notin d(E)$

$c \in X$

المجاميع المفتوحة التي تحتوي على c هي

$\{b,c\}, \{a,b,c\}, X$

$$E \cap \{b,c\} - \{c\} = \emptyset - \{c\} = \emptyset$$

$\therefore c \notin d(E)$

$d \in X$

المجاميع المفتوحة التي تحتوي على d هي

X

$$E \cap X - \{d\} = \{a,d\} - \{d\} = \{a\} \neq \emptyset$$

$\therefore d \in d(E)$

$$\therefore d(E) = \{d\} \subseteq E = \{a,d\}$$

$\therefore$ E مجموعة مغلقة

التحقيق: ① بما انه E مغلقة $\Leftarrow$ E^c مفتوحة

نأخذ E^c اذا كانت تنتمي τ فانها تكون مغلقة

اي E مغلقة.

او ② نأخذ τ^c اذا كانت $E \subseteq \tau^c$ فان E مغلقة.

تكملة

مبرهنة :

اذا كانت A, B, C مجموعات جزئية من فضاء تبولوجي (X, τ) فان :

① $d(\emptyset)=\emptyset$

② اذا كانت $A \subseteq B$ فان $d(A) \subseteq d(B)$

③ اذا كانت $x \in d(E)$ فان $x \in d(E \setminus \{x\})$

④ $d(A \cup B)=d(A) \cup d(B)$

البرهان : ① لكل $x \in X$ ولكل $G \in \tau$ تحتوي على x نحصل على انه :

$$\emptyset \cap G-\{x\}=\emptyset$$

$$\therefore d(\emptyset)=\emptyset$$

② نفرض انه $A \subseteq B$

نفرض انه $x \in d(A)$ ولكل مجموعة مفتوحة G تحتوي على x نحصل على ان

$$A \cap G-\{x\} \neq \emptyset \quad \text{—— ①}$$

$$\because A \subseteq B \Rightarrow A \cap G \subseteq B \cap G$$

$$\Rightarrow \emptyset \neq A \cap G-\{x\} \subseteq B \cap G-\{x\}$$

من ① نحصل على انه

$$B \cap G-\{x\} \neq \emptyset$$

$$\therefore x \in d(B) \Rightarrow d(A) \subseteq d(B)$$

$x \in d(E)$

٣ نفرض انه
الآن لكل مجموعة مفتوحة G تحتوي على x فعلينا
علينا انه

$E \cap G - \{x\} \neq \phi$

$\therefore E \cap G \cap \{x\}^c \neq \phi$

$E \cap G \cap [\{x\}^c \cap \{x\}^c] \neq \phi$ لأن $A \cap A = A$
كذلك $\cap$ الابدالية

$E \cap \{x\}^c \cap G \cap \{x\}^c \neq \phi$

$(E / \{x\}) \cap G - \{x\} \neq \phi$

$\therefore x \in d(E/\{x\})$

٤

$\therefore A \subseteq A \cup B$
$B \subseteq A \cup B$

من الفرع (ب) لنفس البرهنة نحصل على انه

$\therefore d(A) \subseteq d(A \cup B)$
$d(B) \subseteq d(A \cup B)$

$\therefore d(A) \cup d(B) \subseteq d(A \cup B)$ —— ①

الآن نفرض انه $x \notin d(A) \cup d(B)$

$\Rightarrow x \notin d(A) \wedge x \notin d(B)$

كما $x \notin d(A)$ فمعنى يوجد G_A مفتوحة تحتوي على x بحيث انه

$$A \cap G_A - \{x\} = \emptyset \quad \text{(2)}$$

$x \notin d(B)$ فمعنى يوجد G_B مفتوحة تحتوي على x بحيث انه

$$B \cap G_B - \{x\} = \emptyset \quad \text{(3)}$$

لكن $G = G_A \cap G_B$ تكون G مجموعة مفتوحة تحتوي على x

ومن (2) ---

نحصل على انه

$$A \cap G - \{x\} = \emptyset \quad \text{(4)}$$

ومن (3) نحصل على

$$B \cap G - \{x\} = \emptyset \quad \text{(4)}$$

من (4) , (5) نحصل على

$$(A \cup B) \cap G - \{x\} = \emptyset$$

$$\therefore \; x \notin d(A \cup B)$$

المحاضرة الثالثة

الفضاء الباري :

يقال للفضاء التبولوجي (X,τ) بانه فضاء باري يكون اذا كانت كل مجموعة جزئية من X هي مجموعة مفتوحة او مغلقة .

مثال : اذا كانت $X=\{a,b\}$

$\tau=\{\phi,\{a\},X\}$

هل ان (X,τ) فضاء باري ؟

من الواضح ان المجاميع الجزئية من X هي $\{a\},\{b\}$

المجاميع المفتوحة هي : $\phi,\{a\},X$

والمجاميع المغلقة هي : $X,\{b\},\phi$

$\therefore (X,\tau)$ فضاء باري

مثال : اذا كانت $X=\{a,b,c\}$

$\tau=\{\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\},X\}$

هل ان (X,τ) فضاء باري ؟

المجاميع الجزئية من X هي $\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}$

المجاميع المفتوحة هي : $\{a\},\{b\},\{a,b\},\phi,X$

المجاميع المغلقة هي : $\{b,c\},\{a,c\},\{c\},X,\phi$

$\therefore (X,\tau)$ هو فضاء باري

الانغلاق Clouser :
ليكن (X, τ) فضاءاً توبولوجياً ، E مجموعة جزئية من X . $(E \subseteq X)$ يعرف انغلاق المجموعة E ويرمز $\bar{E}$ بأنه تقاطع كل المجاميع المغلقة التي تحتوي على E اي ان

$\bar{E} = \cap F_i$ ، F_i المجاميع المغلقة الحاوية على E

$E \subseteq F_i \quad \forall i \qquad E \subseteq \bar{E}$

$\bar{E}$ مغلقة لانها تقاطع مجاميع مغلقة
لكن $\bar{E} \subseteq F_i$

مثال: ليكن $X = \{a, b, c, d, e\}$
$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d, e\}, X\}$.
فاذا كانت
$E_1 = \{a, b\}$
$E_2 = \{d, e\}$
$E_3 = \{b, c\}$
المطلوب ايجاد $\bar{E}_1$ ، $\bar{E}_2$ ، $\bar{E}_3$:

المجاميع المغلقة هي τ^c
$= \{X, \{b, c, d, e\}, \{a, d, e\}, \{d, e\}, \{a\}, \emptyset\}$

المجاميع المغلقة الحاوية على E_1 هي

X ,
$\therefore \bar{E}_1 = X$

المجاميع المغلقة الحاوية على E_2 هي

$X, \{b,c,d,e\}, \{a,d,e\}, \{d,e\}$

$\therefore \bar{E}_2 = X \cap \{b,c,d,e\} \cap \{a,d,e\} \cap \{d,e\} = \{d,e\}$

المجاميع المغلقة الحاوية على E_3 هي

$X, \{b,c,d,e\}$

$\therefore \bar{E}_3 = X \cap \{b,c,d,e\} = \{b,c,d,e\}$

مبرهنة: لتكن E مجموعة جزئية في فضاء توبولوجي عندئذٍ يكون

$\bar{E} = E \cup d(E)$

البرهان: سوف نثبت أن

$E \cup d(E) \subseteq \bar{E}$

بما أن $E \subseteq F_i \quad \forall i$

$\therefore E \subseteq \cap F_i = \bar{E} \Rightarrow E \subseteq \bar{E}$ --- ①'

من ①'

$d(E) \subseteq d(\bar{E})$ --- ②'

بما أن $\bar{E}$ مجموعة مغلقة (لأنها تقاطع مجاميع مغلقة)

$\therefore d(\bar{E}) \subseteq \bar{E}$ --- ③'

من ②' , ③' نحصل على

$d(E) \subseteq \bar{E}$ --- ④'

بأخذ اتحاد ①' , ④' نحصل على

$E \cup d(E) \subseteq \bar{E}$ --- ①

لاحظ ما يأتي :

ومنه نستنتج ان $\bar{E} \subseteq E \cup d(E)$

بما ان $E \subseteq E \cup d(E)$

بما ان $\bar{E} \subseteq F_i$ لان

$\boxed{\bar{E} \subseteq F_i}$

يكفي ان نبرهن ان $E \cup d(E)$ مغلقة :

او نبرهن ان $(E \cup d(E))^c$ مفتوحة :

نفرض ان $x \notin E \cup d(E)$

هذا يعني $x \notin E$ & $x \notin d(E)$

بما ان $x \notin d(E)$

توجد مجموعة مفتوحة G_x تحتوي على x بحيث انه

$G_x \cap E - \{x\} = \phi$

بما ان $x \notin E$

$\therefore G_x \cap E = \phi$

هذا يعني ان $G_x \subset E^c$ —— ①"

لان G_x لا تتقاطع مع جميع نقاط E

$\therefore G_x \subseteq d(E)^c$ —— ②"

من ①" , ②" نحصل على

$(E \cup d(E))^c = \cup \{G_x : x \notin E \cup d(E)\}$

$\therefore (E \cup d(E))^c$ مفتوحة

$\Leftarrow$

$\bar{E} \subset E \cup d(E)$ —— ②

من ① و ② نحصل على

$\bar{E} = E \cup d(E)$

مبرهنات الانغلاق :

① $\overline{\emptyset}=\emptyset$, $\overline{X}=X$

② $\overline{E}$ • أصغر مجموعة مغلقة تحتوي على E

③ $\overline{E}=E \iff E$ مغلقة

④ $\overline{\overline{E}}=\overline{E}$

⑤ $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ ؛ البرهان :

$$\overline{A\cup B}=(A\cup B)\cup d(A\cup B) = A\cup B\cup d(A)\cup d(B)$$
$$= A\cup d(A)\cup B\cup d(B)=\overline{A}\cup\overline{B}$$

ملاحظة : ان المبرهنة الخاصة لا تصلح اذا ابدلنا الاتحاد بالتقاطع احيانا

$\overline{A\cap B}\neq\overline{A}\cap\overline{B}$

مثال : اعطي مثال تبين فيه ان $\overline{A\cap B}\neq\overline{A}\cap\overline{B}$

الحل :

نأخذ $X=\{a,b,c,d,e\}$,

$\tau=\{\emptyset,\{a\},\{b,c\},\{a,b,c\},\{a,b,c,d\},X\}$

$A=\{a,b,d\}$, $B=\{c,d\}$

$A\cap B=\{d\}$

المجاميع المغلقة هي :

$\{X,\{b,c,d,e\},\{a,d,e\},\{d,e\},\{e\},\emptyset\}$

جميع المغلقة التي تحتوي على A هي

X,

$\therefore \quad \bar{A} = X$

جميع المغلقة التي تحتوي على B هي

$X, \{b, c, d, e\}$

$\therefore \quad \bar{B} = \{b, c, d, e\}$

جميع المغلقة التي تحتوي على $A \cap B$ هي

$X, \{b, c, d, e\}, \{d, e\}, \{a, d, e\}$

$\overline{A \cap B} = \{d, e\}$

$\bar{A} \cap \bar{B} = \{b, c, d, e\}$

$\therefore \quad \bar{A} \cap \bar{B} \neq \overline{A \cap B}$

الداخل

داخل المجموعة : يعرف داخل
ليكن (X, τ) فضاء توبولوجي ولتكن $E \subseteq X$
المجموعة E ويرمز لها E° بأنه اتحاد كل المجاميع
المفتوحة المحتواة في E

$$E^{\circ} = \cup G_i$$

استنتاج $G_i \subseteq E$
وعليه $E^{\circ} = \cup G_i \subseteq E$

$\therefore E^{\circ} \subseteq E$

$\therefore E^{\circ} \cap E^{c} = \emptyset$

$\therefore E^{\circ}$ مجموعة مفتوحة.

مثال : ليكن $X = \{a, b, c, d, e\}$

$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}, X\}$

$A = \{a, b, e\}$

$B = \{a, c, d\}$

جد A° , B° ؟

المجاميع المفتوحة المحتواة في A هي

$\emptyset, \{a\}$

$\therefore A^{\circ} = \emptyset \cup \{a\} = \{a\}$

المجاميع المفتوحة المحتواة في B هي

$\emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}$

$\therefore B^{\circ} = \emptyset \cup \{a\} \cup \{c, d\} \cup \{a, c, d\} = \{a, c, d\}$

$X^{\circ} = X$

$\emptyset^{\circ} = \emptyset$

مبرهنة : لكل مجموعة E في فضاء تبولوجي يكون لدينا :
المشتقة

$$E^{o} = E^{c^{-}c}$$

البرهان : سوف نثبت ان

$$E^{c^{-}c} \subseteq E^{o} \quad (1)$$

$$\text{let } x \in E^{c^{-}c} \Rightarrow x \notin E^{c^{-}}$$

$$\Rightarrow x \notin (E^{c} \cup d(E^{c})) \Rightarrow x \notin E^{c} \;\&\; x \notin d(E^{c})$$

$$\therefore x \notin d(E^{c})$$

توجد مجموعة مفتوحة G_x تحتوي x وبحيث انه

$$G_x \cap E^{c} - \{x\} = \emptyset$$

كذلك $x \notin E^{c}$

$$G_x \cap E^{c} = \emptyset$$

هذا يعني انه

$$x \in G_x \subseteq E$$

وعليه

$$x \in \cup G_x = E^{o}$$

$$\therefore E^{c^{-}c} \subseteq E^{o}$$

الاتجاه الثاني: سوف نثبت ان $E^{\circ} \subseteq E^{c\,c}$ — ②

let $x_0 \in E^{\circ}$

عندئذٍ E° مجموعة منفصلة عن احتواء E^{c}

$E^{\circ} \cap E^{c} = \emptyset$

$E^{\circ} \cap E^{c} - \{x\} = \emptyset$

$\Rightarrow x \notin d(E^{c})$

بما ان $x \in E^{\circ} \Rightarrow x \notin E^{c}$

$\Rightarrow x \notin d(E^{c}) \cup E^{c}$

$\Rightarrow x \notin \bar{E^{c}} \Rightarrow x \in E^{c\,c}$

من ①, ② نحصل على ان

$E^{\circ} = E^{c\,c}$.

مبرهنات الداخل:

① $X^{\circ} = X$, $\emptyset^{\circ} = \emptyset$

② E° هي اكبر مجموعة مفتوحة جزئية من E

③ $E^{\circ} \subset E$

④ $E^{\circ\circ} = E^{\circ}$

⑤ $(A \cap B)^{\circ} = A^{\circ} \cap B^{\circ}$ البرهان:

$(A \cap B)^{\circ} = (A \cap B)^{c\,c} = (\overline{A^{c} \cup B^{c}})^{c}$

$= (\overline{A^{c}} \cup \overline{B^{c}})^{c} = A^{c\,c} \cap B^{c\,c} = A^{\circ} \cap B^{\circ}$

المحاضرة الرابعة

الفصل الرابع : " الترابط ، التراص "

التعريف : ليكن (X,T) فضاءً تبولوجياً ولتكن $E\subseteq X$ يقال للمجموعتين A , B بأنهما تمثلان تفريقاً للمجموعة E ويرمز له بالرمز $E=A/B$ إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية :

① $A\neq\phi\ ,\ B\neq\phi$

② $A\cap B=\phi$

③ $A\cup B=E$

④ $(\underbrace{A\cap\bar{B}}_{\phi})\cup(\underbrace{\bar{A}\cap B}_{\phi})=\phi$

مثال : لتكن $X=\{a,b,c,d,e\}$

$T=\{\phi,\{a,b,c\},\{c,d,e\},\{c\},X\}$

ⓐ $E=\{a,d,e\}\ ,\ A=\{a\}\ ,\ B=\{d,e\}$

هل A , B تمثلان تفريقاً للمجموعة E ؟ ؟

① $A=\{a\}\neq\phi\ ,\ B=\{d,e\}\neq\phi$

② $A\cap B=\phi$

③ $A\cup B=E$

④ المجاميع المغلقة هي $X\ ,\ \{d,e\},\ \{a,b\},\ \{a,b,d,e\},\ \phi$

$\bar{A}=X\cap\{a,b\}\cap\{a,b,d,e\}=\{a,b\}$

$\bar{B} = X \cap \{d,e\} \cap \{a,b,d,e\} = \{d,e\}$

$A \cap \bar{B} = \phi \quad , \quad \bar{A} \cap B = \phi$

$(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) = \phi$

$\therefore$ A, B تشكلان تجزيئاً لـ E

$\therefore E = A/B$

$\boxed{b}$ $D = \{c,e\}, \quad C = \{b\}, \quad F = \{b,c,e\}$

هل $F = C/D$

① $C \neq \phi \quad , \quad D \neq \phi$

② $C \cap D = \phi$

③ $C \cup D = F$

③ $\bar{C} = \{a,b\}$

$\bar{D} = X$

$C \cap \bar{D} = \{b\} \quad , \quad \bar{C} \cap D = \phi$

$\therefore (C \cap \bar{D}) \cup (\bar{C} \cap D) = \{b\} \neq \phi$

$\therefore$ C, D لا تشكلان تجزيئاً.

المجموعة المترابطة: يقال عن مجموعة E جزئية من فضاء تبولوجي (X,T) بأنها مترابطة اذا لم يوجد لها تجزئة في X.

مثال: ① المجاميع الاحادية $\{P\}$ التي فيها عنصر واحد فقط
② مجموعة ϕ مترابطة.

الصفة المطلقة: يقال عن صفة P لفضاء تبولوجي انها صفة مطلقة اذا لم تعتمد تلك الصفة على الفضاء الذي توجد فيه المجموعة التي تمتلك تلك الصفة اي ان المجموعة تحتفظ بصفتها سواء كانت جزئية من الفضاء التبولوجي او جزئية من الفضاء التبولوجي الجزئي منه.

مثال: الترابط صفة مطلقة.

مبرهنة ①: ليكن (X,T) فضاء تبولوجي فان $X = A/B$ اذا وفقط اذا كانت A,B مجموعتين منفصلتين كل منهما مغلقة ومفتوحة غير خالية جزئية من X واتحادهما يساوي X.

البرهان: ① نفرض انه $X = A/B$

① $A \neq \phi ,\ B \neq \phi$ (A, B غير خالية جزئيتين من X) :

② $A \cap B = \phi$ (A, B منفصلتين)

③ $A \cap B = \phi$ A لا تحتوي على جميع نقاط غايتها

$\therefore A$ مغلقة.

B تحوي على جميع نقاط نهايتها $A \cap \bar{B} = \emptyset$

∴ B مغلقة

بما أن $B = A^c$ لأن $X = A \cup B$ لأن $X = A / B$

بما أن B مغلقة ⇐ A^c مغلقة ⇐ A مفتوحة .

بما أن $A = B^c$ لأن $X = A \setminus B$

بما أن A مغلقة ⇐ B^c مغلقة ⇐ B مفتوحة .

(2) نفرض أن A, B مجموعتين منفصلتين كل منهما مغلقة ومفتوحة غير خالية تجزئ من X .

(1) بما أن A, B غير خالية جزئية من X

∴ $A \neq \emptyset \quad , \quad B \neq \emptyset$.

(2) بما أن A, B منفصلتين ⇐ $A \cap B = \emptyset$

(3) بما أن A, B مغلقة ومفتوحة

∴ $A^c = B$

فإن $A^c \cup A = A \cup B$

$X = A \cup B$

$X = A \cup B$ معطى لا حاجة لبرهانها

(4) بما أن A مغلقة فإنه $\bar{A} = A$ وعليه

$\bar{A} \cap B = \emptyset$

بما أن B مغلقة فإن $\bar{B} = B$ وعليه

$A \cap \bar{B} = \emptyset$

∴ $(\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = \emptyset$

إذا كان (R, τ) هو فضاء متقطع يحوي أكثر من نقطة فإنه (ج)
ليس مترابطاً (لاحظ التعريف) لأن كل مجموعة أحادية هي مفتوحة ومغلقة

مبرهنة ②: لتكن C مجموعة مترابطة في فضاء تبولوجي (X, τ) اذا كان $X = A/B$ تفريقاً فان $C \subseteq A$ او $C \subseteq B$.

نتيجة: اذا كانت C مجموعة مترابطة في فضاء تبولوجي (X, τ) ، $C \subseteq E \subseteq \bar{C}$ فان E مترابطة

نفرض ان E غير مترابطة لذلك توجد A, B تفريقاً لـ E اي $E = A/B$

حسب المبرهنة ② لتكن C مجموعة مترابطة في فضاء تبولوجي (X, τ) اذا كان $X = A/B$ تفريقاً فان $C \subseteq A$ او $C \subseteq B$ E

اي اما

$$C \subseteq A \quad \text{او} \quad C \subseteq B$$

نفرض $C \subseteq A \Rightarrow \bar{C} \subseteq \bar{A} \Rightarrow \bar{C} \cap \bar{B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$

$$\therefore \bar{C} \cap B = \emptyset \quad \text{---} \quad ①$$

لكن

$$B \subseteq E \subseteq \bar{C}$$

$$\therefore \; B \subseteq \bar{C}$$

$$B \cap \bar{C} = B \quad \text{---} \quad ②$$

من ① ، ② نحصل على

$$B = \emptyset$$

وهذا تناقض مع الفرض لأن $E = A/B$

$\therefore$ E مترابطة

نتيجة: اذا كانت كل نقطتين من مجموعة E محتواة في مجموعة مترابطة جزئية من E فان E مترابطة.

البرهان: نفرض العكس: اذا لم تكن E مترابطة. يوجد لها تجزئة فتوجد تجزئة $E=A|B$ وبما ان $A\neq\phi$, $B\neq\phi$ لذلك توجد نقطة مثل $a\in A$ ونقطة مثل $b\in B$ وعليه توجد مجموعة مترابطة مثل C تحتوي على كل من a , b . جزئية من E

حسب المبرهنة (2) تكون $C\subseteq A$ او $C\subseteq B$

وهذا تناقض لان $b\in B$, $A\cap B=\phi$

∴ E مترابطة.

ملاحظة: ~~تقاطع~~ اتحاد عائلة $\{C_\lambda\}$ من مجموعات مترابطة ذات تقاطع غير خالي تكون مجموعة مترابطة؟

نفرض ان $\{C_\lambda\}$ عائلة من مجموعات مترابطة حيث $E=\bigcup C_\lambda$ ونفرض ان $\bigcap_\lambda C_\lambda\neq\phi$ نثبت ان E مجموعة مترابطة. اذا لم تكن E مترابطة فيوجد لها تجزئة ولتكن $E=A|B$

وبما ان $\bigcap_\lambda C_\lambda\neq\phi$ فتوجد $x\in\bigcap_\lambda C_\lambda$

الآن $x\in A$ او $x\in B$ لانه $A\cap B=\phi$

نفرض ان $x\in A$ وعندئذ نقول بان $x\in C_\lambda$ لكل λ

فان $C_\lambda\cap A\neq\phi$ لكل λ وبموجب المبرهنة (2)

تكون $C_\lambda\subseteq A$ او $C_\lambda\subseteq B$ وبما ان $A\cap B=\phi$

فان كل $C_\lambda\subseteq A$ وعليه $E\subseteq A$

وبما ان $A\subseteq E$ $\Leftarrow$ $E=A=A\cup\phi$

لكن $E=A|B$ $\Leftarrow$ $B=\phi$ وهذا تناقض

وبنفس الطريقة اذا فرضنا ان $x\in B$ نحصل

وهذا ايضا تناقض

بل $A=\phi$

$\therefore$ E مترابطة .

مبرهنة (3): يكون الفضاء التبولوجي (X,T) مترابطا اذا وفقط اذا كانت X ، ϕ هما المجموعتان الوحيدتان المفتوحتان والمغلقتان في آن واحد .

البرهان: نفرض ان X مترابط ونفرض ايضا ان ϕ ، X مفتوحتان ومغلقتان في آن واحد .

ونفرض ان $\phi \neq A \subsetneq X$ مجموعة مغلقة ومفتوحة في آن واحد فنحصل على انه $B=A^c=X \setminus A$ مجموعة مغلقة ومفتوحة في آن واحد

وعليه فان $A\neq\phi$ ، $B\neq\phi$ ، $A\cap B=\phi$ ، $A\cup B=X$

و $(A ، B)$ مفتوحتان ومغلقتان في آن واحد .

$\therefore$ $X=A|B$ حسب مبرهنة (1) .

وهذا تناقض مع الفرض

$\therefore$ ϕ ، X هما المجموعتان المغلقتان والمفتوحتان في آن واحد والوحيدتان .

$\Leftarrow$ نفرض ان ϕ ، X هما المجموعتان الوحيدتان المفتوحتان والمغلقتان في آن واحد .

اذا لم يكن X مترابطا فيوجد له تفريق وليكن $X=A|B$

حسب المبرهنة ① نحصل على ان A ، B مجموعتان مفتوحتان ومغلقتان في آن واحد وهذا تناقض مع الفرض

$\therefore$ (X,T) مترابط .

المحاضرة الخامسة

الفصل الخامس : الاستمرارية في الفضاء التبولوجي :

تعريف : ليكن كل من (X,τ) ، (X^*,τ^*) فضاءين تبولوجيين يقال ان الدالة $f : X \longrightarrow X^*$ مستمرة عند النقطة $x_0 \in X$ اذا وفقط اذا تحقق الشرط التالي :
لكل مجموعة مفتوحة G^* في X^* تحتوي على $f(x_0)$ توجد مجموعة مفتوحة G في X تحتوي على x_0 .
بحيث ان $f(G) \subseteq G^*$

$$\forall f(x_0) \in G^* \ \exists \ x_0 \in G \ \ s.t \ \ f(G) \subseteq G^*$$

ملاحظة : الدالة f تكون مستمرة اذا كانت مستمرة عند كل نقطة من نقاط X .

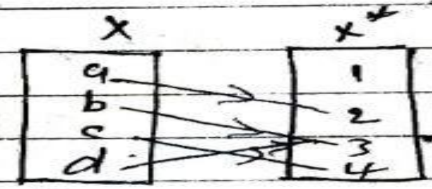
مثال : لتكن $X = \{a,b,c,d\}$

$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}, X\}$

$X^* = \{1,2,3,4\}$

$\tau^* = \{\{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{2,3,4\}, \emptyset, X^*\}$

ولتكن $f : X \longrightarrow X^*$
معرفة وفق المخطط الآتي



هل ان الدالة f مستمرة ؟

$$\forall f(x_0) \in G^* \ \exists \ x_0 \in G : f(G) \subseteq G^*$$

① $a \in X$ المجاميع المفتوحة التي تحتوي على a هي
$\{a\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}, X$

$f(a) = 2$ المجاميع المفتوحة التي تحتوي على 2 هي
$\{2\}, \{1,2\}, \{2,3,4\}, X^*$

$\therefore f(\{a\}) = \{2\} \in G^*$

$f(\{a,b\}) = \{2,3\} \in G^* = \{2,3,4\}$

$f(\{a,b,c\}) = \{2,3,4\} \in G^*$

$f(X) = \{2,3,4\} \in G^*$

$\therefore f(G) \subseteq G^*$

$\therefore$ f مستمرة عند a

② $b \in X$: اذا مجموعة المجموعات التي تحتوي على b هي

$\{a,b\}, \{a,b,c\}, X$

$f(b)=3$: اذا مجموعة G^* المجموعات التي تحتوي على 3 هي

$\{2,3,4\}, X^*$

$f(\{a,b\}) = \{2,3\} \subseteq \{2,3,4\}$

$f(\{a,b,c\}) = \{2,3,4\} \subseteq \{2,3,4\}$

$f(X) = \{2,3,4\} \in G^*$

$\therefore$ f مستمرة عند b

③ $c \in X$: [G تحتوي c] $\{a,b,c\}, X$

$f(c)=4$: [G^* تحتوي 4] $\{2,3,4\}, X^*$

$f(\{a,b,c\}) = \{2,3,4\} \in G^*$

$f(X) = \{2,3,4\} \in G^*$

$\therefore$ f مستمرة عند c

④ $d \in X$: (G تحتوي على d) X

$f(d)=3$: (G^* تحتوي على 3) $\{2,3,4\}, X^*$

$f(x) = \{2,3,4\} \in G^*$

$\therefore$ f دالة مستمرة عند a

$\therefore$ f دالة مستمرة .

مثال: ليكن (X,τ) , (X^*,τ^*) ولتكن $f: X \longrightarrow X^*$ دالة ثابتة عندئذٍ f مستمرة ؟

الحل:

الدالة الثابتة $f(x) = k \;\forall x \in X$.

لتكن G^* اي مجموعة مفتوحة تحتوي على $f(x) = k$.

لكل $x \in G$ فان $f(G) = \{k\}$.

$\therefore f(G) \subseteq G^*$

لكل $x \in X$ ولكل مجموعة مفتوحة G^* تحتوي على $f(x)$ توجد مجموعة مفتوحة G تحتوي على x بحيث انه $f(G) \subseteq G^*$.

$\therefore$ f دالة مستمرة .

مبرهنة (مهم) : لتكن (X,τ) , (X^*,τ^*) اي فضائين تبولوجيين ولتكن $f: X \longrightarrow X^*$ دالة عندئذٍ كل الشروط التالية تكافئ استمرارية f على X .

① الصورة العكسية لكل مجموعة مفتوحة في X^* تكون مفتوحة في X .

② الصورة العكسية لكل مجموعة مغلقة في X^* تكون مغلقة في X

③ لكل مجموعة جزئية E من X يكون $f(\bar{E}) \subseteq \overline{f(E)}$

① سوف نثبت ان الاستمرارية تكافئ

برهان ①: لتكن $f: X \to X^*$ مستمرة على X ولتكن G^* مجموعة مفتوحة في X^* سوف نثبت ان المجموعة $f^{-1}(G^*)$ مفتوحة

لتكن $x \in f^{-1}(G^*)$.

بما ان f مستمرة عند x فعليه توجد مجموعة مفتوحة G تحتوي على x بحيث انه

$$f(G) \subseteq G^*$$

$$x \in G \subseteq f^{-1}(G^*)$$

∴ لكل عنصر x في $f^{-1}(G^*)$ توجد مجموعة مفتوحة G تحتوي على x وبحيث انه

$$G \subseteq f^{-1}(G^*)$$

∴ $f^{-1}(G^*)$ مجموعة مفتوحة .

العكس: نفرض ان الصورة العكسية لكل مجموعة مفتوحة في X^* تكون مفتوحة في X سوف نثبت ان f مستمرة عند كل نقطة في $x \in X$.

لتكن G^* مجموعة مفتوحة في X^* تحتوي على $f(x)$

اي انه $f(x) \in G^*$ وعليه $x \in f^{-1}(G^*)$

وبما ان G^* مجموعة مفتوحة فان $f^{-1}(G^*)$ مفتوحة (بالفرض) .

وعليه توجد مجموعة مفتوحة G وتحتوي على x وبحيث انه

$$G \subseteq f^{-1}(G^*)$$

وعليه

$$f(G) \subseteq G^*$$

∴ f مستمرة .

ان ② و ③ . في الكتاب (رزاري مفتوح)

مثال : لتكن $X = \{a, b, c, d\}$

$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c,d\}, X\}$

ولتكن $f : X \longrightarrow X$

معرفة كالآتي

$f(a) = b$
$f(b) = d$
$f(c) = b$
$f(d) = c$

هل ان f دالة مستمرة عند c , d ؟

$* \; c \in X \;,\; f(c) = b \;;\; b \in G \;:\; \{b,c,d\}, X, \{b\}, \{a,b\}$

$\underbrace{f^{-1}\{b\}}_{\text{مفتوح}} = \underbrace{\{a, c\}}_{\text{غير مفتوح}}$

∴ ليست مستمرة عند c

$* \; d \in X \;,\; f(d) = c \;;\; c \in G \;,\; \{b,c,d\}, X$

$\underbrace{f^{-1}\{b,c,d\}}_{\text{مفتوح}} = \underbrace{X}_{\text{مفتوح}}$

∴ f مستمرة عند d

$\underbrace{f^{-1}(X)}_{\text{مفتوح}} = \underbrace{X}_{\text{مفتوح}}$

نتيجة (٦-٢): اذا كانت $f: X \to Y$ ، $g: Y \to Z$

دالتين مستمرتين فان الدالة المركبة $f \circ g: X \to Z$

دالة مستمرة ايضاً.

البرهان: لتكن G مجموعة مفتوحة في Z حسب مبرهنة (٦-١)

تكون $g^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة في Y لان g مستمرة

الان f دالة مستمرة وحسب المبرهنة (٦-١) تكون

$f^{-1}(g^{-1}(G))$ تكون مجموعة مفتوحة في X اي ان

$$(f \circ g)^{-1}(G) = f^{-1}(g^{-1}(G))$$

هي مفتوحة في X.

∴ $f \circ g$ دالة مستمرة على X.

صفات تنقل بالاستمرارية: (صفات تبولوجية)

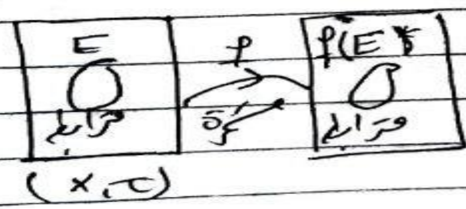
هنالك صفات تنقل بفعل الدالة المستمرة (الترابط والتراص)

مبرهنة (٦-٢): الترابط ينقل بفعل الاستمرارية:

او: اذا كانت f دالة مستمرة من الفضاء التبولوجي

(X,τ) الى الفضاء (X^*,τ^*) فعندئذ صورة كل مجموعة

مترابطة في X تكون مجموعة مترابطة في X^*.



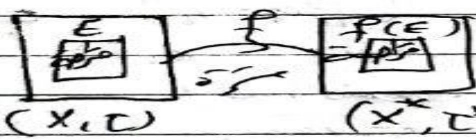
البرهان: نفرض ان E مترابطة.
اذا لم تكن $E^* = f(E)$ مجموعة مترابطة فانه يوجد لها تفريق
ولتكن $E^* = A^* / B^*$ لمجموعتين A^* , B^* مجموعتان غير خاليتان
منفصلتين كل منهما مجموعة مغلقة ومفتوحة في آن
واحد في E^*.
تأمل المجموعتين

$$A = f^{-1}(A^*) \cap E$$

$$B = f^{-1}(B^*) \cap E$$

A مفتوحة ومغلقة في E لان f مستمرة A^* مفتوحة
ومغلقة في E^* (مبرهنة ٦-١)
B مفتوحة ومغلقة في E لان f مستمرة ولان B^*
مفتوحة ومغلقة في E^*.
$\therefore$ A , B يشكلان تفريقاً للمجموعة E وعليه فان
E غير مترابطة وهذا يناقض مع الفرض
$\therefore$ $f(E)$ مترابطة.

مبرهنة (٦-٣): التراص ينتقل بفعل الاستمرارية:



البرهان: نفرض ان f دالة مستمرة
من الفضاء التبولوجي (X,T)
الى الفضاء (X^*,T^*).
ونفرض ان E مجموعة متراصة في X.
يجب ان نبرهن ان $f(E)$ مجموعة متراصة في X^*.

ليكن $\{G^*_\lambda\}$ غطاءاً مفتوحاً لـ $f(E)$ ايمان

$$f(E) \subseteq \cup_\lambda G^*_\lambda$$

$$\therefore E \subseteq f^{-1}(f(E)) \subseteq f^{-1}(\cup_\lambda G^*_\lambda) = \cup_\lambda f^{-1}(G^*_\lambda)$$

$\therefore E \subseteq \bigcup_{\lambda} f^{-1}(G^*_{\lambda})$

فان $\{f^{-1}(G^*_{\lambda})\}$ غطاءاً مفتوحاً لـ E

وذلك لأن f مستمرة , حسب المبرهنة (1)

بما ان E متراصة فيوجد غطاء جزئي منتهي

من الغطاء المذكور اي ان :

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(G^*_i)$$

$$\therefore f(E) \subseteq f\left(\bigcup_{i=1}^{n} (f^{-1}(G^*_i))\right) = \bigcup_{i=1}^{n} (f f^{-1}(G^*_i))$$

$$= \bigcup_{i=1}^{n} G^*_i$$

حصلنا على غطاء جزئي منتهي من الغطاء المذكور

للمجموعة $f(E)$ اي ان $f(E)$ متراصة.