محاضرات التحليل العددي

Numerical analysis

التدريسين

د.صهيب عبدالجبار عبدالباقي

د.محمد عبدالرزاق محمد

م.اغصان محمود

الفصل الأول

المحاضرة الأولى1:

الأخطاء

يشمل التحليل العددي على تطوير واستنتاج طرق خاصة لكل المعادلات التفاضلية والتكاملية ولحساب النتائج العددية المطلوبة عند توفر قيم عددية أولية تسمى القيم المعطاة بالمعلومات الداخلة بينما تسمى النتائج المطلوبة بالمعلومات الخارجة في حين تسمى المعالجة بطريقة الحسابات(الخوارزميات).

المعلومات الداخلة ← طرق الحسابات ← المعلومات الخارجة

أنواع الأخطاء:

يوجد خمسة أنواع من الأخطاء:

1. أخطاء صياغة(Formulation Errors).:وهو الخطأ الناتج من إهمال بعض العوامل والمؤثرات إذا كانت تبسط النموذج وفي نفس الوقت لا تؤثر على المظهر الأساسي للمشكلة وهذا النوع من النماذج يسمى أخطاء صياغة مثل القوة $F = \frac{d}{dt}(mv), m\frac{m_0}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$ حيث F القوة، m الكتلة v السرعة، c سرعة الضوء ولما كانت قيمة v صغيرة بالنسبة إلى c يمكن أن نبسط النموذج إلى $F = \frac{d}{dt}(m_0 v)$
2. أخطاء موروثة(Inherent Errors): وهو الخطأ الناتج من قيم البيانات الداخلة والناتجة عن عدم دقة القياس مثل قراءات بعض الأجهزة في تجربة أو على بيانات مثل الأعداد غير النسبية $\pi, e, \sqrt{2}$ حيث لا يمكن تمثيلها بشكل مضبوط بل بشكل تقريبي.
3. أخطاء التدوير والقطع(Rounding and Chopping):يستخدم هذا النوع من الأخطاء في الأعداد مثلا نقول أن عدد طلاب كلية التربية لهذه السنة هو 5000 طالب فقط لتقريب عدد الطلاب الحقيقي للذي هو 4966 طالب أو لتدوير الأعداد مثلا 0.08547 و 0.28536 إلى ثلاثة مرلتب

عشـرية على التوالي هو 0.086 و 0.285 وخطأ التدوير ينتج من حاصـل الفرق بين العددين قبل التدوير وبعده.

أما خطأ القطع ينتج من قطع الرقم من المرتبة التي نريدها ففي المثالين الســابقين يكون ناتج القطع إلى ثلاثة مراتب هو 0.085 و 0.285.

4. أخطاء البتر(Truncation Error):وهو الخطأ الناشــئ عن اســتبدال عملية منتهية بعملية لانهائية ويستخدم هذا النوع من الأخطاء مع الدوال مثلا:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots..$$

فعند حل مسائل من هذا النوع نضطر إلى قطع المتسلسلة عند حد يتناسب مع الحل.

5. أخطاء التراكم(Accumulated Error):وهو الخطأ للناتج من تكرار لمجموعة من العمليات الحسابية.

حساب الأخطاء(طرق معالجة الأخطاء):

1.الخطأ المطلق(Absolute Error):يعرف الخطأ في القيمة التقريبية كالأتي

$$e_x = |x - x^*|$$

2.الخطأ النســبي(Relative Error):يعرف الخطأ النســبي بحاصــل قســمة الخطأ على القيمة المضبوطة

$$\delta_x = \frac{e_x}{x}$$

حيث:

x القيمة المضبوطة و x^* القيمة التقريبية

مثال(1):- لتكن 0.0007 هي عبارة عن قيمة تقريبية والقيمة المضـــبوطة هي 0.0008 .جد الخطأ المطلق والخطأ النسبي.

Solution:-

$$e_x = |x - x^*| = |0.0008 - 0.0007| = 0.0001$$

$$\delta_x = \frac{e_x}{x} = \frac{0.0001}{0.0008} = 0.125$$

ســؤال:- اكتب برنامج بلغة الماتلاب لحســاب الخطأ المطلق والخطأ النســبي $ax^2 + bx + c = 0$

```
x=input('x=');
a=input('a=');
b=input('b=');
c=input('c=');
```

$$\boldsymbol{x_1 = (-b + sqrt(b\char`^2 - 4 * a * c)/(2 * a)};$$
$$\boldsymbol{x_2 = (-b - sqrt(b\char`^2 - 4 * a * c))/(2 * a)};$$
$$\boldsymbol{e_{x_1} = abs(x_1 - x)}$$
$$\boldsymbol{e_{x_2} = abs(x_2 - x)};$$
$$\boldsymbol{s_{x_1} = e_{x_1}/x};$$
$$\boldsymbol{\delta_{x_2} = e_{x_2}/x};$$

```
disp(ex1);
disp(ex2);
disp(sx1);
disp(sx2);
```

ملاحظة : في لغة ماتلاب يجب أن يكتب البرنامج بالحروف الصغيرة.

المحاضرة الثانية 2:

الفصل الثاني

حل المعادلات الغير الخطية

Solution of non-linear Equation

المقصود بالمعادلة اللاخطية هي أي معادلة تحتوي على قوى مختلفة لـــ (x) أو دوال متسامية(مثلثيه أو لوغارتمية أو اسية).

فعندما يراد إيجاد جذور المعادلة التالية $x^2 + 5x - 2 = 0$ نلاحظ بأنها معادلة غير خطية يمكن استخدام طريقة الدستور لإيجاد جذري المعادلة . في حين لو حاولنا إيجاد جذر المعادلة $x\,ln(x) + 5 = 0$ نلاحظ انه لا توجد طريقة أو قانون لإيجاد مثل هذه المعادلات. لذاك يتم اللجوء إلى استخدام الطرق العددية التقريبية لإيجاد الجذور.

بشكل عام يمكن كتابة المعادلة التي تحتوي على متغير واحد بالشكل

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

في هذا الفصل سنستعرض عددا من الطرق العددية التي تهدف إلى إيجاد قيمة تقريبية لجذر معين للمعادلة (1) أي إلى قيمة x^* بحيث تكون $f(x^*)$ قريبة من الصـــفر. إن جميع هذه الطرق العددية تحتاج إلى قيمة تقريبية لجذر القيمة العددية ،وسوف ندرس في هذا الفصل عدد من الطرق العددية لإيجاد جذر المعادلة.

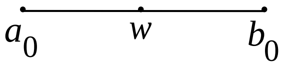
1. طريقة تنصيف الفترة:–

Bisection Method:-

وهي إحدى طرق إيجاد الجذور والتي تعتمد على وجود جذر للمعادلة في الفترة (a,b) أي إن $f(a).f(b)\langle 0$.

خطوات الحل لهذه الطريقة يمكن تلخيصها بما يلي:

1. اختيار الفترة $[a,b]$ و ε و (f مستمرة في الفترة $[a_0,b_0]$) لقيم $f(a_0)\times f(b_0)<0$
2. $w=\frac{a_i+b_i}{2}$



3. إذا كان $f(a_i)\times f(w)=0$ فان w هو جذر المعادلة.
4. إذا كان $f(a_i)\times f(w)<0$ فان $a_{i+1}=a_i$ و $b_i+1=w$.
5. إذا كان $f(a_i)\times f(w)\rangle 0$ فان $a_{i+1}=w$ و $b_i+1=b_i$.

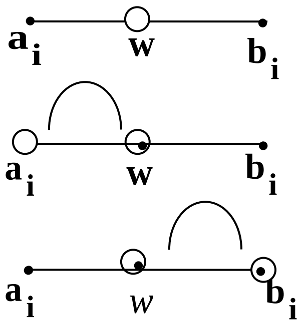
وبتكرار الطريقة أعلاه نحصل على متتابعة $[a,b]$ التي تحتوي على جذر المعادلة وتكون أطوالها اصغر كلما زادت قيمةi وعلى هذا الأساس أذا كان المطلوب إيجاد قيمة مقربة للجذر لا يتجاوز الخطأ فيها عنε ، نتوقف في حالة $\varepsilon\le|b_i-a_i|$.

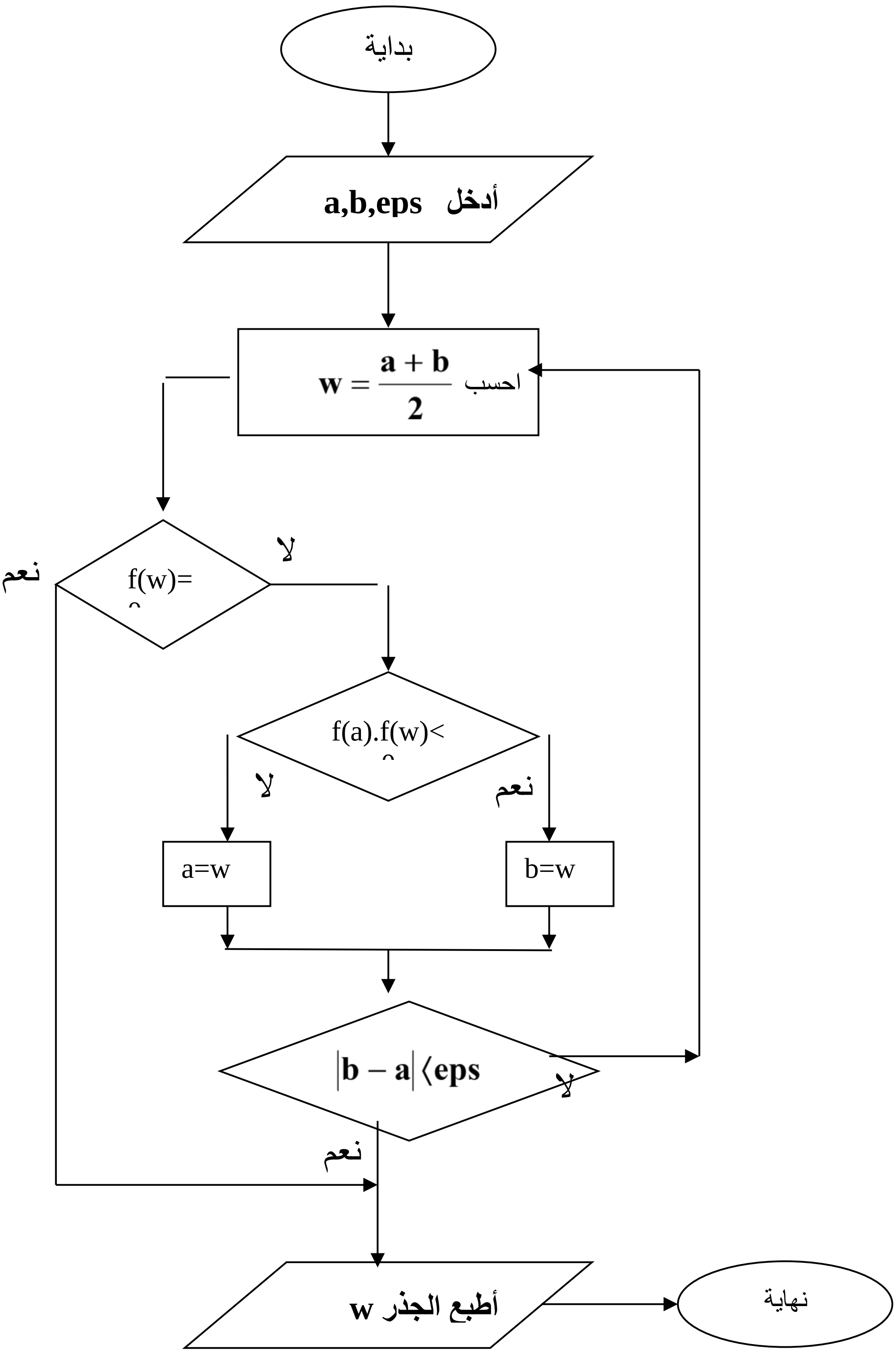
ملاحظة:

$\mathbf{f(a_i).f(w)=0}$ **w the root**

$\mathbf{f(a_i).f(w)\langle 0 \quad a_{i+1}=a_i, b_{i+1}=w}$

$\mathbf{f(a_i).f(w)\rangle 0 \quad a_{i+1}=w, b_{i+1}=b_i}$





المخطط الانسيابي لطريقة تنصيف الفترة

إعداد:
د.صهيب عبدالجبار عبدالباقي د.محمد عبدالرزاق م.اغصان محمود

مثال:– جد جذر المعادلة $f(x) = $ xlnx-1 بطريقة تنصيف الفترة [1,2] و $\varepsilon = 0.05$

التكرار الأول:

$$f(1) = 1\,ln(1) - 1, (ln(1) = 0)$$
$$f(2) = 2\,ln(2) - 1 = 0.386294361$$
$$f(1) \times f(2) < 0 \Rightarrow -1 \times 0.386294361 = -0.386294361 < 0$$
$$w_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{1+2}{2} = 1.5$$
$$f(a_0) \times f(w_0)$$
$$f(1) = -1, f(1.5) = f(1.5) = 1.5\,ln\,1.5 - 1 = -0.391802337$$
$$f(1) \times f(1.5) > 0 \Rightarrow f(a_0) \times f(w_0) > 0 \Rightarrow -1 \times -0.391802337 = 0.391802337 > 0$$
$$a_{i+1} = w_0, b_{i+1} = b_0, (i = 0)$$
$$a_1 = w_0 = 1.5, b_1 = b_0 = 2$$
$$|b_1 - a_1| = |2 - 1.5| = 0.5 > \varepsilon$$

التكرار الثاني:

$$w_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{1.5+2}{2} = 1.75$$
$$f(a_1) \times f(w_1) > 0 \Rightarrow f(1.5) = -0.391802337$$
$$f(1.75) = 1.75\,ln\,1.75 - 1 = -0.020672371$$
$$f(1.5) \times (1.75) > 0 \Rightarrow (-0.391802337) \times (-0.020672371) = 0.008099483 > 0$$
$$a_{i+1} = w_1, b_{i+1} = b_1, (i = 1)$$
$$a_2 = w_1 = 1.75, b_2 = b_1 = 2$$
$$|b_2 - a_2| = |2 - 1.75| = 0.25 > \varepsilon$$

التكرار الثالث:

$$w_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{1.75+2}{2} = 1.875$$
$$f(1.75) = -0.020672371$$
$$f(1.875) = 0.178641236$$
$$f(1.75) \times (1.875) < 0$$
$$a_3 = a_2 = 1.75, b_3 = w_2$$
$$a_3 = 1.75, b_3 = 1.875$$
$$|b_3 - a_3| = |1.875 - 1.75| = 0.125 > \varepsilon$$

التكرار الرابع:

$$w_3 = \frac{a_3 + b_3}{2} = \frac{1.75+1.875}{2} = 1.8125$$
$$f(1.75) = -0.020672371$$
$$f(1.8125) = 0.077906632$$
$$f(1.75) \times f(1.8125) < 0 \Rightarrow = -0.001610514 < 0$$
$$|b_3 - a_3| = |1.875 - 1.75| = 0.125 > \varepsilon$$

⇐ نستمر في العمليات التكرارية حتى نصل إلى تكرار تكون فيه $\varepsilon \le |b_i - a_i|$ ثم نتوقف.

التكرار التاسع:

$$a_8 = w_7, b_8 = b_7$$
$$a_8 = 1.76171875, b_8 = 1.765625$$
$$w_8 = \frac{a_8 + b_8}{2} = \frac{1.76171875 + 1.765625}{2} = 1.763671875$$
$$f(a_8) \times (w_8) = (-0.002356474) \cdot (0.000703768) = -0.000001658 < 0$$
$$|b_8 - a_8| = |1.765625 - 1.76171875| = 0.00390625 < \varepsilon$$

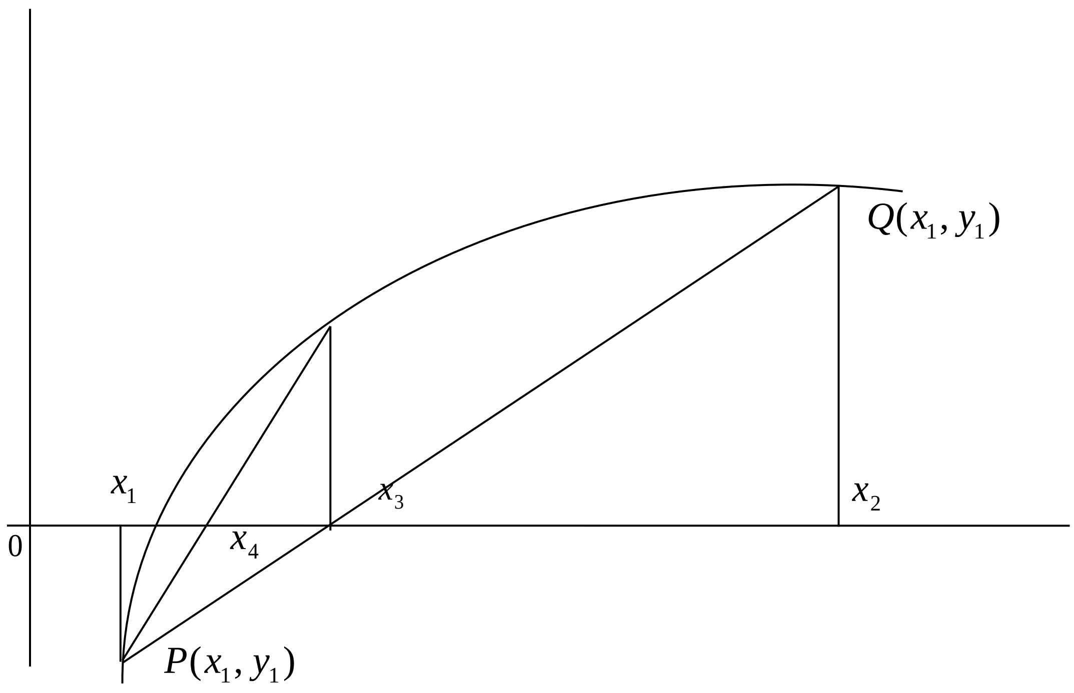
إلى هنا نتوقف لان $\varepsilon \le |b_i - a_i|$.

المحاضرة الثالثة 3:

2.طريقة الموضع الكاذب:–

Method of false Position:-

تعتبر هذه الطريقة من الطرق القديمة لحساب جذر المعادلة$f(x) = 0$ في هذه الطريقة نجد عددين x_1, x_2 بحيث يقع الجذر المطلوب بينهما أي أن مخطط للدالة $y = f(x)$ يقطع المحور x بين x_1, x_2وان قيمتي $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$ مختلفتين في الإشارة . بما أن بالإمكان تقريب أي قطعة صغيرة من منحني أملس بخط مستقيم لذا سوف نفترض أن قطعة المستقيم بين النقطتين(x_1, y_1) و (x_2, y_2) بمثابة تقريب للدالة f في الفترة$[x_1, x_2]$ وبالتالي تعتبر نقطة تقاطع المستقيم هذا مع المحور x قيمة تقريبية لجذر المعادلة$f(x) = 0$ هذه هي القاعدة الأساسية التي تعتمد عليها طريقة الموضع الكاذب ، ونشتق الصيغة العامة لحساب القيمة التقريبية للجذر كما في الشكل الأتي :



إعداد:
د.صهيب عبدالجبار عبدالباقي د.محمد عبدالرزاق م.اغصان محمود

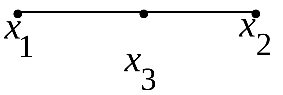
نفرض قطعة مستقيم الواصل بين $P(x_1,x_2), Q(x_1,x_2)$ تقطع المحور x بالنقطة x_3 وعليه يكون:

$$\overline{QP}=\frac{y-y_2}{x-x_2}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$y=0$$

$$\frac{0-y_2}{x-x_2}=\frac{y_2-y_1}{(x_2-x_1)}\Rightarrow x=x_2-\frac{y_2(x_2-x_1)}{(y_2-y_1)}$$

غير x بـ x_3 إن قيمة x_3 لا تعتبر تخمينا جيدا للجذر ،وذلك لان الدالة f ليست بالضبط الخط المستقيم بين P و Q ولذلك يجب إيجاد تخمين جيد أو تقريب أفضل لجذر المعادلة ويتم هذا بإعادة الأسلوب أعلاه بعد تعيين القيمتين الجديدتين حول الجذر فنقوم أولا بحساب $y_3=$ $f(x_3)$ وبيان اختلاف إشارتهما مع y_1,y_2 فإذا كان $y_1-y_2<0$ فان الجذر يقع بين x_1,x_3 وبخلاف ذلك فان الجذر يقع بين x_2,x_3.



وبهذا يمكن كتابة الصيغة العامة بطريقة الموضع الكاذب بالشكل الأتي :

$$x_{i+1}=x_i-\frac{y_i(x_i-x_{i-1})}{(y_i-y_{i-1})}$$

$\downarrow$

نعتبرها w

$$x_{i+1}=\frac{x_i[y_i-y_{i-1}]-y_i(x_i-x_{i-1})}{y_i-y_{i-1}}=\frac{x_iy_i-x_iy_{i-1}-x_iy_i+x_{i-1}y_i}{y_i-y_{i-1}}$$

$$x_{i+1}=\frac{x_{i-1}y_i-x_iy_{i-1}}{y_i-y_{i-1}}$$

علما انه يجب إن يتم اختيار اختلاف الإشارة بين y_{i-1} و y_i في كل خطوة واختيار قيمتين جديدتين حول الجذر وهذا يكرر استخدام الصيغة هذه ويتوقف عندما يكون اقل من ε.

$$|x_{i+1}-x_i|\le\varepsilon, i=2,3,\ldots\ldots\ldots$$

خوارزمية الموضع الكاذب:ـ

1- إدخال a,b,ε .

2- احسب $f(a),f(b)$

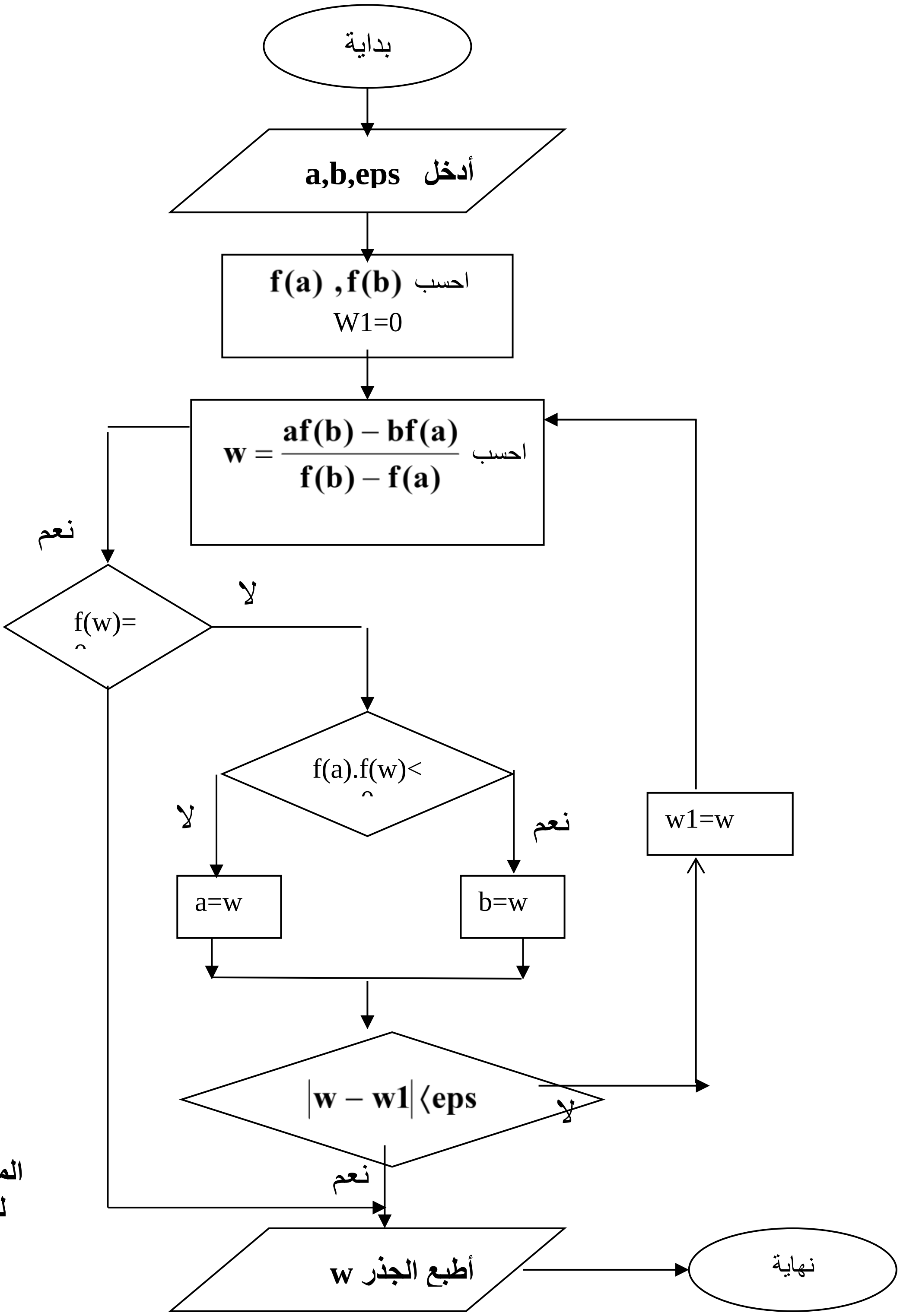
3- احسب $w_i=\frac{a_if(b_i)-b_if(a_i)}{f(b_i)-f(a_i)},(i=0)$

4- احسب $f(w) \Leftarrow f(w_i) \times f(a_i) = 0$ نتوقف.

5- احسب $f(a_i) \times f(w_i) > 0 \Leftarrow b_{i+1} = b_i, a_{i+1} = w_i$.

6- احسب $f(a_i) \times f(w_i) < 0 \Leftarrow b_{i+1} = w_i, a_{i+1} = a_i$.

7- نتوقف في حالة $|w_{i+1} - w_i| \le \varepsilon$.



المخطط الانسيابي لطريقة الموقع الكاذب

إعداد:

د.صهيب عبدالجبار عبدالباقي د.محمد عبدالرزاق م.اغصان محمود

مثال (1): جد المعادلة غير الخطية $x\ln x\text{-}1 = 0$ باستخدام طريقة الموضع الكاذب في الفترة $\varepsilon = 0.0001, [1,2]$.

التكرار الأول:

$$w_0 = \frac{a_0 f(b_0) - b_0 f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)} = \frac{(1)(0.3862) - (2)(-1)}{0.3862 + 1} = \frac{2.3862}{1.3862} = 1.7213$$
$$w_0 = 1.7213$$
$$f(a_0) \times f(w) \Rightarrow f(a_0) = -1, f(w) = -0.0651$$
$$f(a_0) \times f(w) > 0$$
$$a_{i+1} = a_{0+1} = a_1 = w_0 = 1.7213$$
$$b_{i+1} = b_{0+1} = b_1 = b_0 = 2$$
$$w_0 = 1.7213, b_0 = 2$$
$$|w_0 - w| = |1.7213| = 1.7213 > \varepsilon (w = 0)$$

التكرار الثاني:

$$w_1 = \frac{1.7213 f(2) - 2 f(1.7213)}{f(2) - f(1.7213)}$$
$$f(2) = 0.3862, f(1.7213) = -0.0651$$
$$w_1 = \frac{0.6647 + 0.1302}{0.3862 + 0.0651} = \frac{0.7949}{0.4513} = 1.7613$$
$$f(a_1) \times f(w_1)$$
$$f(1.7213) \times f(1.7613) = -0.0651 \times -0.0030 = 0.00019 > 0$$
$$|w_1 - w_0| = |1.7613 - 1.7213| = 0.04 > \varepsilon$$

التكرار الثالث:

$$b_2 = 2, a_2 = 1.7613$$
$$w_2 = \frac{a_2 f(b_2) - b_2 f(a_2)}{f(b_2) - f(a_2)} = \frac{1.7613 f(2) - 2 f(1.7613)}{f(2) - f(1.7613)}$$
$$f(2) = 2 \ln 2 - 1 = 0.3862$$
$$f(1.7213) = 1.7613 \ln 1.7613 - 1 = -0.003$$

$$w_2 = \frac{1.7613 \times 0.3862 - 2 \times 0.0030}{0.3862 + 0.0030} = \frac{0.6802 + 0.006}{0.3892} = \frac{0.6862}{0.3892}$$
$$= 17631$$
$$f(a_2) \times f(w_2) \Rightarrow f(1.7613) \times f(1.7631) = -0.0030 \times -0.0001 > 0$$
$$a_3 = 1.7631, b_3 = 2$$
$$|w_2 - w_1| = |1.7631 - 1.7613| = 0.0018 > \varepsilon$$

التكرار الرابع:

$$w_3 = \frac{1.7631f(2) - 2f(1.7631)}{f(2) - f(1.7631)}$$
$f(1.7631) = -0.0001, f(2) = 0.3862$
$$w_3 = \frac{1.7631 \times 0.3862 + 2 \times 0.0001}{0.3862 + 0.0001} = \frac{0.6811}{0.3862} = 1.7631$$
$f(a_3) \times f(w_3) \Rightarrow f(1.7631) \div f(1.7631) = -0.0001 \times -0.0001 > 0$
$a_4 = 1.7631, b_4 = 2$
$|w_3 - w_2| = |1.7631 - 1.7631| = 0$

$\because \varepsilon > 0 \Rightarrow \therefore$ سوف نتوقف عن عملية التكرار.

إعداد:
د.صهيب عبدالجبار عبدالباقي د.محمد عبدالرزاق م.اغصان محمود

المحاضرة الرابعة 4:

3-طريقة القاطع:-

Secant Method:-

إن طريقة للقاطع قيمة تقريبية لجذر المعادلة $f(x) = 0$ تشـــبه إلى حد بعيد طريقة الموضـع الكاذب، لتطبيق الطريقة نقوم أولا بإيجاد تقريبين للجذر x_1, x_2 ليس من الضـروري إن يكون على جهة الجذر المطلوب كما في طريقة الموضـــع الكاذب، ولكي نحســـب القيمة للتقريبية للجديدة للجذر نجد معادلة للمســـتقيم للمار بالنقطتين $(x_2, f(x_2)), (x_1, f(x_1))$ فتكون القيمة للتالية للجذر x_3 عبارة عن تقاطع المســـتقيم مع للمحور x،وبنفس للطريقة نحســـب قيمة x_4 عن تقاطع للمســـتقيم للمار بالنقطتين $(x_3, f(x_3)), (x_2, f(x_2))$ مع المحور x. وبتكرار العملية نحصل على المتتابعة (x_n) من الصيغة العامة بطريقة القاطع وهي:

$$x_{n+2} = x_{n+1} - \frac{f(x_{n+1})(x_{n+1} - x_n)}{f(x_{n+1}) - f(x_n)}$$

يجب إن يكون اختيار التخمينين الأولين x_1, x_2 بحيث إن ميل المســـتقيم المار بالنقطتين $(x_2, f(x_2)), (x_1, f(x_1))$ ليســت قريبة من الصــفر بعبارة أخرى يجب أن لا تكون مشـتقة الدالة f قرب النقطتين قريبة من الصـــفر لأنه قد نحصـــل على متتابعة (x_n) متقاربة ببطء أو متباعدة.

خوارزمية طريقة القاطع:

1- إدخال x_0, x_1, ε.

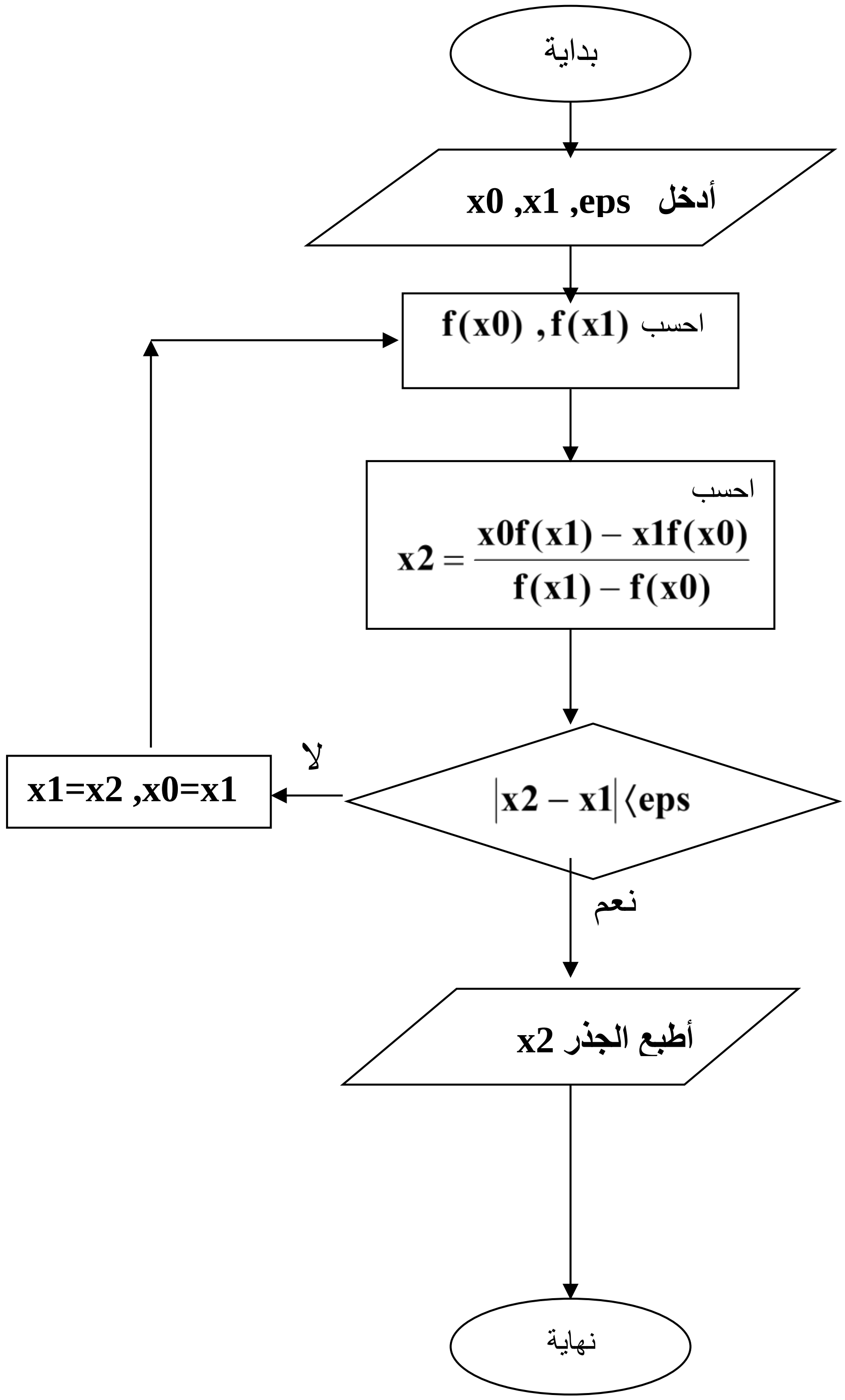
2- احسب $f(x_0)$.

3- احسب $f(x_1)$.

4- $x_2 = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$

5- إذا كان $|x_2 - x_1| \le \varepsilon$ نتوقف.

6- $x_1 = x_2, x_0 = x_1$, $f_0 = f_1$ $\Leftarrow$ ارجع إلى الخطوة (3).



المخطط الانسيابي لطريقة القاطع

مثال (1): جد جذر المعادلة غير الخطية $x\ln x-1$ باستخدام طريقة القاطع ، $\varepsilon =$. $0.005, [1,2]$

الحل:

$$f(x_0)=f(1)=1\,ln\,1-1=-1$$
$$f(x_1)=f(2)=2\,ln\,2-1=0.3862$$

التكرار الأول:

$$x_2=\frac{1f(2)-2f(1)}{f(2)-f(1)}=\frac{1\times 0.3862-2\times(-1)}{0.3862+1}=\frac{2.3862}{1.3862}=1.7213$$
$$|x_2-x_1|=|1.7213-2|=|-0.2787|=0.2787>\varepsilon$$

التكرار الثاني:

$$f(x_1)=2\,ln\,2-1=0.3862$$
$$f(x_2)=1.7213\,ln\,1.7213-1=-0.0651$$
$$x_3=\frac{x_1f(x_2)-x_2f(x_1)}{f(x_2)-f(x_1)}=\frac{2\times -0.0651-1.7213\times 0.3862}{-0.0651-0.3862}=\frac{-0.7949}{-0.4513}=1.7613$$

$|x_3-x_2|=|1.7613-1.7213|=0.04>\varepsilon$ التكرار الثالث:

$$f(x_2)=1.7213\,ln\,1.7213-1=-0.0651$$
$$f(x_3)=1.7613\,ln\,1.7613-1=-0.003$$
$$x_4=\frac{1.7213f(1.7613)-1.7613f(1.7213)}{f(1.7613)-f(1.7213)}$$
$$x_4=\frac{1.7213\times -0.0030+1.7613\times 0.0651}{-0.0030+0.0651}$$
$$x_4=\frac{-0.0051+0.1146}{0.0621}=\frac{0.1197}{0.0621}\Rightarrow x_3=1.7642$$
$$|x_4-x_3|=|1.7642-1.7613|=0.0029>\varepsilon$$

التكرار الرابع:

$$f(x_3)=1.7613\,ln\,1.7613-1=-0.0030$$
$$f(x_4)=1.9275\,ln\,1.9275-1=+0.2648$$
$$x_5=\frac{x_3f(x_4)-x_4f(x_3)}{f(x_4)-f(x_3)}=\frac{1.7213\times 0.2648+1.9275\times 0.0030}{0.2648+0.0030}$$
$$=\frac{0.4558+0.00578}{0.2678}=\frac{0.46158}{0.2678}\Rightarrow x_5=1.72359$$
$$|x_5-x_4|=|1.72359-1.7613|=0.003771<\varepsilon$$

∴ نتوقف عن عملية التكرار.

المحاضرة الخامسة 5:

4.طريقة نيوتن:-

Newton-Raphso Method:

أذاكان $x = x_0$ هو جذر تقريبي لأحد جذور المعادلة $f(x) = 0$ فهذا يعني $f(x_0) \neq 0$ أي أن $f(x_0)$ كمية صغيرة جدا لا تساوي صفر.

$\therefore$ x_0 هي قيمة تقريبية لذا فان $x_0 + h$ هي القيمة المضبوطة للجذر بمعنى أن $x = x_0 + h \Leftarrow x - x_0 = h$ أي أن المطلوب هو إيجاد قيمة h باستخدام نظرية تايلر نحصل على:-

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \ldots\ldots\ldots\ldots = 0$$

$\because$ h هي كمية صغيرة فان h^2 هي كمية اصغر من $h(h > h^2 >^3)$ لذا فان إهمال هذه القيمة و الحصول على :

$$f(x_0 + h) \tilde{=} f(x_0) + hf'(x_0) = 0$$

$$f(x_0) + hf'(x_0) = 0$$

$$h = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, f'(x_0) \neq 0$$

$$x - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Rightarrow x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x = x_{i-1}, x_0 = x_i$$

وبصورة عامة

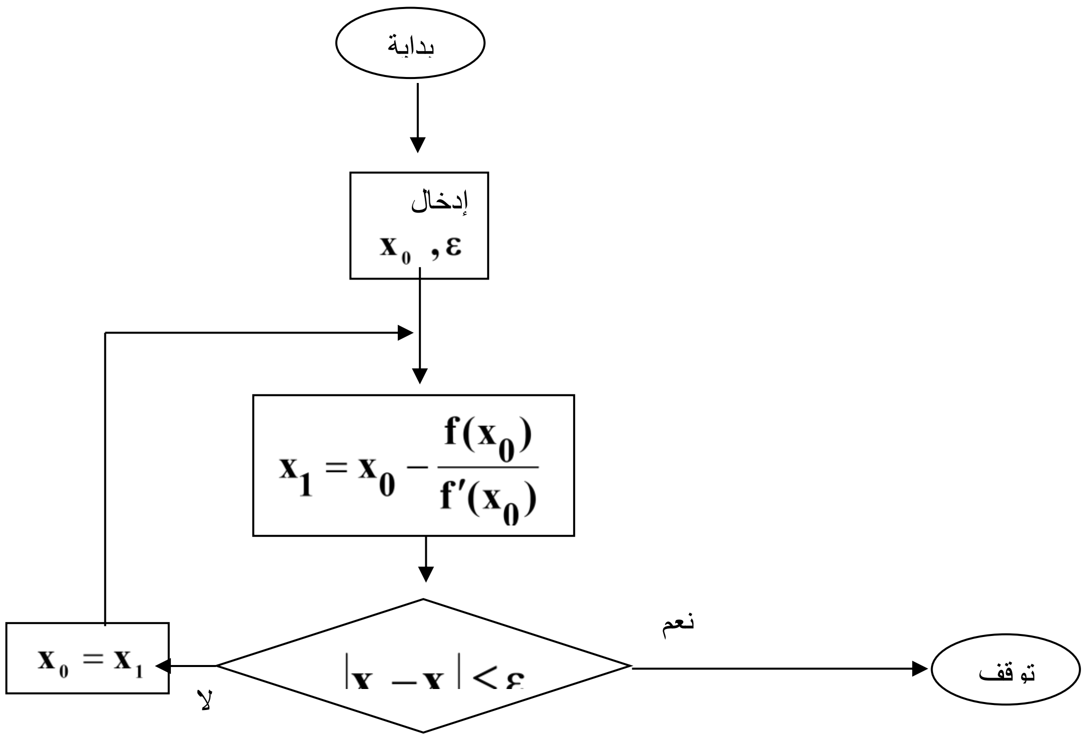
$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

نتوقف عن تكرار العمليات في حالة $|x_{i+1} - x_i|$ كمية صغيرة جدا.

خوارزمية نيوتن:-

1. إدخال قيمة x_0 (نقطة البداية) و ε (قيمة الخطأ).
2. $i = 0$ احسب قيمة x_1 من القانون التالي : $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$
3. إذا كان $|x_{i+1} - x_i| \leq \varepsilon$ نتوقف .
4. أما إذا كان $|x_{i+1} - x_i| > \varepsilon$ اذهب إلى الخطوة (2).

إعداد:
د.صهيب عبدالجبار عبدالباقي د.محمد عبدالرزاق م.اغصان محمود


بداية
إدخال
$x_0 \ , \varepsilon$
$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
$|x_1 - x_0| < \varepsilon$
نعم
لا
$x_0 = x_1$
توقف

مثال (1):– جد جذر المعادلة الغير الخطية التالية $f(x) = x^2 + 2.1x - 1$ بطريقة نيوتن إذا علمت بان $x_0 = 0.5, \varepsilon = 0.0035$.

الحل:

التكرار الأول:–

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$
$$f(x_0) = f(0.5) = (0.5)^2 + 2.1(0.5) - 1 = 0.3$$
$$f'(x_0) = f'(0.5) = 2(0.5) + 2.1 = 3.1$$
$$x_1 = 0.5 - \frac{0.3}{3.1} = 0.4032$$
$$|x_1 - x_0| = |0.4032 - 0.5| = 0.0968 > \varepsilon$$

التكرار الثاني:–

$$f(x_1) = f(0.4032) = 0.0092$$
$$f'(x_1) = f'(0.4032) = 2.9064$$
$$x_2 = 0.4032 - \frac{0.0092}{2.9064} \Rightarrow x_2 = 0.40003$$
$$|x_2 - x_1| = |0.40003 - 0.4032| = 0.0031 < \varepsilon$$

سوف نتوقف عن عملية التكرار لان $|x_2 - x_1|$ اقل من ε .

مثال(2):– جد جذر المعادلة$x^2 - 4\sin x = 0$ إذا علمت أن نقطة البداية هي 3،

sin3=0.1411

cos3= –0.9900

$$\varepsilon = 0.001$$

الحل:التكرار الأول:–

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$
$$f(x_0) = x^2 - 4\sin x \Rightarrow f(3) = (3)^2 - 4\sin 3 = 8.4355$$
$$f'(x_0) = 2(x) - 4\cos x \Rightarrow f'(x) = 2(3) - 4\cos 3 = 9.9600$$
$$x_1 = 3 - \frac{8.4355}{9.9600} \Rightarrow x_1 = 2.1531$$
$$|x_1 - x_0| = |2.1531 - 3| = 0.8469 > \varepsilon$$

التكرار الثاني:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$
$$f(x_1) = x^2 - 4\sin x \Rightarrow f(2.1531) = (2.1531)^2 - 4\sin(2.1531) = 1.2950$$

$$f'(x_1) = 2x - 4\cos x \Rightarrow f'(2.1531) = 2(2.1531) - 4\cos(2.1531) = 6.5060$$

$$x_2 = 2.1531 - \frac{1.2950}{6.5060} \Rightarrow x_2 = 2.1531 - 0.1990 = 1.9541$$

$$|x_2 - x_1| = |1.9541 - 2.1531| = 0.1990 > \varepsilon$$

التكرار الثالث:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

$$f(x_2) = x^2 - 4\sin x \Rightarrow f(1.9541) = 0.1082$$

$$f'(x_2) = 2x - 4\cos x \Rightarrow f(1.9541) = 5.4041$$

$$x_3 = 1.9541 - \frac{0.1082}{5.4041} = 1.9340$$

$$|x_3 - x_2| = |1.9541 - 1.9340| = 0.0201 > \varepsilon$$

التكرار الرابع:

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$$

$$\Rightarrow x_4 = 1.9340 - 5.2891 \Rightarrow x_4 = 1.9338$$

$$|x_4 - x_3| = |1.9338 - 1.9340| = 0.0002 < \varepsilon$$

سوف نتوقف عن عملية التكرار لان $|x_4 - x_3|$ اقل من ε