جامعة الموصل

كلية التربية للعلوم الصرفة

قسم الرياضيات

المرحلة الأولى

مادة الجبر الخطي

مدرسو المادة:

الدكتور نصير صباح عبدالله

الأستاذ الدكتور عمار صديق محمود

المدرس حنان سالم محمد

الفصل الاول: المصفوفات والعمليات على المصفوفات (Matrices and Matrices Operations)

تعريف: المصفوفة ترتيب مستطيلي الشكل من اعداد حقيقية او معقدة. يطلق على هذه الاعداد في هذا الترتيب عناصر المصفوفة (Entries) وقد تكون عناصر المصفوفة مقادير غير عددية (متغيرات ، دوال).

ان المصفوفة A التي لها m من السطور و n من الاعمدة تكون بالشكل الاتي:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

ويمكن كتابة المصفوفة A بعدة اشكال منها $A = [a_{ij}]$ و $A = (a_{ij})$. ويقال ان المصفوفة ذات سعة $m \times n$ حيث يعني الدليل السفلي الاول i في العنصر a_{ij} رقم السطر او الصف والدليل الثاني j رقم العمود الذي يقع فيهما ذلك العنصر.

امثلة متنوعة عن المصفوفات:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}_{3\times 3}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 3}, \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2}, [0 \quad -8 \quad 0]_{1\times 3}, \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

ملاحظة: ليس للمصفوفة قيمة عددية.

العمليات على المصفوفات:

1. **التساوي:** تكون المصفوفتان $A = [a_{ij}]\ ,\ B = [b_{ij}]$ متساويتان اذا كانت سعتاهما متساويتين وان $a_{ij} = b_{ij}$ لكل i, j. اي انهما ذات نفس السعة وان عناصرهما في جميع المواقع المتناظرة متساوية.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2} \neq B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$\mathrm{C} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2} = D = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

2. **جمع مصفوفتين:** تمتثل اي مصفوفتين $A = [a_{ij}]\ ,\ B = [b_{ij}]$ لعملية الجمع اذا كانت سعتاهما متساويتين وتتم عملية الجمع كالاتي:

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] = \mathrm{C}$$

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}_{2\times 2}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

3. **ضرب مصفوفة بعدد:** اذا كان k عددا وكانت $A = [a_{ij}]$ مصفوفة سعة $m \times n$ فان الضرب بالعدد k هو $kA = [ka_{ij}]$ هو مصفوفة سعة $m \times n$ ايضا. اي نضرب العدد k بكل عنصر من عناصر المصفوفة A.

$$-A = -1A = -1\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

ملاحظة: تتم عملية طرح اي مصفوفتين بنفس طريقة عملية جمع مصفوفتين.

4. ضرب مصفوفتين: تمتثل المصفوفتان $A=[a_{ij}]$ سعة $m\times n$ و $B=[b_{ij}]$ سعة $p\times q$ لعملية الضرب AB اذا كان عدد اعمدة A مساويا لعدد اسطر B. اي ان $n=p$. ويكون ناتج الضرب هو المصفوفة C من السعة $m\times q$ كالاتي:

$$C=[c_{ij}]=\left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}\right], i=1,\dots,m \quad , \quad j=1,\dots,q$$

واضح انه لايجاد اي عنصر c_{ij} من عناصر مصفوفة الضرب، نضرب عناصر السطر في الموقع i من المصفوفة A بعناصر العمود في الموقع j من المصفوفة B ثم نجمع المضروبات.

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}_{2\times2}, B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 0\end{bmatrix}_{2\times3}$$

بما ان عدد اعمدة A = عدد اسطر B. اذن

$$AB=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\text{س}1\times\text{ع}1 & \text{س}1\times\text{ع}2 & \text{س}1\times\text{ع}3\\ \text{س}2\times\text{ع}1 & \text{س}2\times\text{ع}2 & \text{س}2\times\text{ع}3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\times2+2\times3 & -1\times0+2\times-1 & -1\times1+2\times0\\ 3\times2+0\times3 & 3\times0+0\times-1 & 3\times1+0\times0\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}4 & -2 & -1\\ 6 & 0 & 3\end{bmatrix}_{2\times3}$$

هل يمكن ايجاد BA؟ لماذا؟ **Check**

بعض الخواص الجبرية للمصفوفات:

مبرهنة: اذا كانت سعات المصفوفات A , B , C تلائم العمليات ازاءها فان الخواص الاتية على المصفوفات صحيحة.

أ. قانون التجميع الجمعي $A+(B+C)=(A+B)+C$

ب. قانون الابدال الجمعي $A+B=B+A$

ج. قانون التوزيع العددي $k(A+B)=kA+kB$ حيث k أي عدد

د. قانون التجميع الضربي $A(BC)=(AB)C$

ه. قانون التوزيع $A(B+C)=AB+AC$

لاثبات اي خاصية من هذه الخواص يجب ان نثبت:

1. سعة مصفوفة الطرف الايمن تساوي سعة مصفوفة الطرف الايسر.
2. ان العناصر في المواقع المتناظرة من مصفوفتي الطرفين تكون متساوية.

مثال: اذا علمت ان $C=\begin{bmatrix}0 & 2\\ -3 & 1\end{bmatrix}_{2\times2}$, $B=\begin{bmatrix}4 & 1\\ -3 & 2\end{bmatrix}_{2\times2}$, $A=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 1 & -2\\ 0 & -1\end{bmatrix}_{3\times2}$

حقق صحة قانون التجميع الضربي وقانون التوزيع.

قانون التجميع الضربي: $A(BC)=(AB)C$

$$A(BC)=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 1 & -2\\ 0 & -1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}4 & 1\\ -3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2\\ -3 & 1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 1 & -2\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 9\\ -6 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & -35\\ 9 & 17\\ 6 & 4\end{bmatrix}$$

$$(AB)C=\left(\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 1 & -2\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 1\\ -3 & 2\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}0 & 2\\ -3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-18 & 1\\ 10 & -3\\ 3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2\\ -3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & -35\\ 9 & 17\\ 6 & 4\end{bmatrix}$$

اذن المصفوفات A, B, C اعلاه تحقق قانون التجميع الضربي. اي ان $A(BC)=(AB)C$.

تحقيق قانون التوزيع؟ **Check**

الفصل الاول: مصفوفات خاصة Special Matrices

1. المصفوفة الصفرية Zero\Null matrix : هي المصفوفة التي يكون جميع عناصرها اصفار، وكذلك تسمى مصفوفة المحايد الجمعي. ويرمز له بالرمز 0. سعتها تؤخذ حسب سياق العمليات.

$$0=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}_{3\times2}\quad ,\begin{bmatrix}2&-2&1\\-3&4&-1\end{bmatrix}_{2\times3}+\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}_{2\times3}=\begin{bmatrix}2&-2&1\\-3&4&-1\end{bmatrix}_{2\times3}$$

2. المصفوفة المربعة Square matrix : هي المصفوفة التي يكون فيها عدد الاسطر يساوي عدد الاعمدة. اي انه يقال للمصفوفة $A=(a_{ij})$ سعة $m\times n$ بانها مربعة ذات سعة n عندما يكون $m=n$.

$$A=\begin{bmatrix}2&-1&0\\4&1&-2\\0&3&7\end{bmatrix}_{3\times3}$$

ملاحظة: للمصفوفة المربعة A سعة $n\times n$ قطران، القطر الرئيسي والقطر الثانوي. القطر الرئيسي تكون عناصره

$$a_{11},\ a_{22},\ a_{33},\ \cdots,\ a_{nn}$$

3. مصفوفة السطر Row matrix: هي مصفوفة ذات سعة $1\times n$.

$$A=[-2\quad 3\quad 0\quad 5\quad -1]_{1\times5}$$

4. مصفوفة العمود Column matrix: هي مصفوفة ذات سعة $n\times 1$.

$$A=\begin{bmatrix}1\\2\\-4\\-1\\3\end{bmatrix}_{5\times1}$$

5. المصفوفة المثلثية العليا Upper triangular matrix: هي مصفوفة مربعة $A=(a_{ij})$ سعة n تسمى مثلثية عليا اذا كانت جميع عناصرها الواقعة تحت القطر الرئيسي اصفار. اي انه اذا كان $a_{ij}=0$ لكل $i>j$.

$$A=\begin{bmatrix}2&2&-1\\0&-3&-2\\0&0&3\end{bmatrix}_{3\times3}$$

6. المصفوفة المثلثية السفلى Lower triangular matrix: هي مصفوفة مربعة $A=(a_{ij})$ سعة n تسمى مثلثية سفلى اذا كانت جميع عناصرها الواقعة فوق القطر الرئيسي اصفار. اي انه اذا كان $a_{ij}=0$ لكل $i<j$.

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\4&-1&0\\-5&-3&2\end{bmatrix}_{3\times3}$$

7. المصفوفة القطرية Diagonal matrix: هي مصفوفة مربعة $A=(a_{ij})$ سعة n اذا كانت عناصرها غير الصفرية هي فقط a_{ii} حيث $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ وبقية العناصر في تلك المصفوفة اصفار. اي ان $a_{ij}=0$ عندما $i\neq j$. وتكتب بالشكل $diag(a_{11},\ a_{22},\ \cdots,a_{nn})$.

$$A=\begin{bmatrix}5&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}_{4\times4}\qquad or\qquad A=diag(5,\ -1,\ 2,\ -1)$$

8. المصفوفة القياسية Scalar matrix: هي مصفوفة قطرية $diag(a_{11},\ a_{22},\ \cdots,a_{nn})$ ذات العناصر المتساوية.

$$A=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{bmatrix}_{3\times3}=diag(4,\ 4,\ 4)$$

9. مصفوفة المحايد الضربي Identity matrix: هي مصفوفة قطرية قياسية $diag(1,\ 1,\ \cdots,1)$ ذات العناصر المساوية لواحد ويرمز لها بالرمز I_n حيث ان الدليل n يشير الى سعة المصفوفة المربعة. من خواصها

$$I_n^p = I_n \,.\, I_n \,.\, \cdots .\, I_n = I_n$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3} = diag(1,\ 1,\ 1)$$

$$A \,.\, I_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -5 & 1 & 6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -5 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

10. المصفوفتان المتبادلتان (قابلتان للابدال الضربي) Commutative for multiplication: اذا كانت $A,\ B$ مصفوفتين مربعتين بحيث ان $AB = BA$ فيقال انهما متبادلتان. اما اذا كانت $AB = -BA$ فيقال انهما متبادلتان عكسيا (Skew-Commutative).

$$AB = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

واضح ان $AB = BA$ وعليه فان المصفوفتان $A,\ B$ متبادلتان.

مثال: اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ، هل ان االمصفوفتان $A,\ B$ متبادلتان؟ لماذا؟ **Check**

11. المصفوفة الدورية Periodic matrix: يقال للمصفوفة A بانها دورية اذا حققت العلاقة $A^{k+1} = A$ حيث ان k اصغر عدد صحيح موجب. ويقال بان دورة المصفوفة A هي k. اذا كان $k = 1$ أي ان $A^2 = A$ يقال بان المصفوفة A متساوية القوى او متحايدة (Idempotent matrix).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \,,\quad A^2 = AA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^2A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I\,, \qquad A^5 = A^4A = IA = A$$

اذن A مصفوفة دورية وان دورة A هي 4.

مثال: اذا كانت $B = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -5 \\ -2 & 4 & 5 \\ 2 & -4 & -5 \end{bmatrix}$ جد k بحيث ان $B^{k+1} = B$؟ **Check**

12. المصفوفة معدومة القوى Nilpotent matrix: يقال للمصفوفة A بانها معدومة القوى اذا حققت العلاقة $A^p = 0$ حيث ان p اصغر عدد صحيح موجب. ويقال بان A معدومة القوى من الدرجة p.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

اذن A مصفوفة معدومة القوى من الدرجة 3.

12. منقول مصفوفة Transpose of a matrix: لتكن $A=(a_{ij})$ مصفوفة سعة $m\times n$ ، اذا وضعت صفوف المصفوفة بشكل اعمدة بالترتيب، اي ان السطر الاول اخذ موضع العمود الاول وهكذا فان المصفوفة الناتجة من هذه العمليات تسمى منقول المصفوفة ويرمز لها بالرمز $A^t=(a_{ji})$ وتكون ذات سعة $n\times m$. اي ان العنصر a_{ij} في A هو العنصر a_{ji} في A^t.

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 2 & 4\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}_{2\times3} \quad \Rightarrow \quad A^t=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 2 & 0\\ 4 & -1\end{bmatrix}_{3\times2}$$

13. المصفوفة المتناظرة Symmetric matrix: يقال لمصفوفة مربعة $A=(a_{ij})$ بانها متناظرة اذا كان $A^t=A$ اي ان $a_{ij}=a_{ji}$. ويقال بانها متناظرة عكسيا (Skew-Symmetric) اذا كان $A^t=-A$ اي ان $a_{ij}=-a_{ji}$.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 5\end{bmatrix}_{3\times3} \Rightarrow A^t=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 5\end{bmatrix}_{3\times3}=A$$

$$B=\begin{bmatrix}0 & -3\\ 3 & 0\end{bmatrix}_{2\times2} \Rightarrow B^t=\begin{bmatrix}0 & 3\\ -3 & 0\end{bmatrix}_{2\times2}=-\begin{bmatrix}0 & -3\\ 3 & 0\end{bmatrix}_{2\times2}=-B$$

واضح ان المصفوفة A متناظرة، اما المصفوفة B فهي متناظرة عكسيا.

14. المصفوفة المتعامدة Orthogonal matrix: يقال لمصفوفة مربعة $A=(a_{ij})$ بانها متعامدة اذا تحققت العلاقة $AA^t=A^tA=I$.

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}_{3\times3} \Rightarrow A^t=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0\end{bmatrix}_{3\times3}$$

$$AA^t=\begin{bmatrix}0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=I$$

$$A^tA=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=I$$

اذن A مصفوفة متعامدة.

مبرهنة: لتكن A مصفوفة سعة $m\times n$ و B مصفوفة سعة $n\times p$ فان $(AB)^t=B^tA^t$.

البرهان: نفرض ان سعة A هي $m\times n$ وسعة B هي $n\times p$. اذن سعة A^t هي $n\times m$ وسعة B^t هي $p\times n$.
وعليه فان سعة B^tA^t هي $p\times m$.
بما ان سعة AB هي $m\times p$ اذن سعة $(AB)^t$ هي $p\times m$.
ولهذا فان سعة الطرفين متساوية.
نفرض ان $B=(b_{ij})$ ، $A=(a_{ij})$
اذن $B^t=(b_{ji})$ ، $A^t=(a_{ji})$

$$(AB)^t=\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}b_{kj})^t=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}b_{ki}=\sum_{k=1}^{n}b_{ki}a_{jk}=B^tA^t$$

مبرهنة: لتكن A, B مصفوفات ذات سعة متساوية فان
1. $(A+B)^t = A^t + B^t$.
2. $(A^t)^t = A$.
3. $(kA)^t = kA^t$.

البرهان: 1. نفرض ان سعة $A, \quad B$ هي $m \times n$. اذن سعة $A^t, \quad B^t$ هي $n \times m$ وسعة $A^t + \ B^t$ هي $n \times m$.
بما ان سعة $A + B$ هي $m \times n$ اذن سعة $(A+B)^t$ هي $n \times m$. ولهذا فان سعة الطرفين متساوية.
نفرض ان $A = (a_{ij}), \quad B = (b_{ij})$. اذن$A^t = (a_{ji}), \quad B^t = (b_{ji})$.

$$(A+B)^t = (a_{ij} + b_{ij})^t = (a_{ji} + b_{ji}) = A^t + B^t$$

2. نفرض ان سعة A هي $m \times n$. اذن سعة A^t هي $n \times m$ وسعة$(A^t)^t$ هي $m \times n$. ولهذا فان سعة الطرفين متساوية.

$$(A^t)^t = ((a_{ij})^t)^t = (a_{ji})^{\ t} = (a_{ij}) \ = A$$

3. بنفس طريقة برهان 1, 2.

العمليات السطرية الاولية على مصفوفة:
1. ضرب عناصر اي سطر بعدد غير صفري.
2. تبادل موضعي اي سطرين.
3. اضافة مضروب اي سطر بقياسي (بعدد) الى سطر اخر.

المصفوفة الاولية Elementary matrix: هي مصفوفة مربعة سعة يمكن تكوينها من المصفوفة المحايدة بواسطة عملية واحدة من العمليات السطرية الاولية.

مثال: اذكر العملية السطرية الاولية التي تم اجراءها على المصفوفات المحايدة لتحويلها الى مصفوفات اولية.

$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ ضرب السطر الثاني للمصفوفة I_2 بـ -3 $(-3\ R_2 \to R_2)$.

$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ضرب السطر الاول للمصفوفة I_3 بـ 2 واضافته الى السطر الثالث $(2R_1 + R_3 \to R_3)$.

$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ استبدال السطر الثاني والرابع من المصفوفة I_4 $(R_2 \to R_4, \quad R_4 \to R_2)$.

ملاحظة: عند ضرب مصفوفة A من اليسار بمصفوفة اولية E يكون تاثير هذه العملية معادلا لاجراء عملية سطرية اولية على A.

مثال: $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

واضح ان المصفوفة E ناتجة من$-2R_3 + R_1 \to R_1$

$$EA = \begin{bmatrix} -1 & -9 & -2 & -7 \\ 2 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

نلاحظ انه لو اجرينا هذه العملية السطرية الاولية $(-2R_3 + R_1 \to R_1)$ على المصفوفة A لكان الناتج نفس ناتج EA.

ملاحظة: عرفنا انه اذا اجريت عملية سطرية اولية على مصفوفة محايدة I تنتج مصفوفة اولية E. عندئذ توجد عملية سطرية اولية اخرى لو اجريت على E لكان الناتج نفس المصفوفة المحايدة I ، هذه العمليات التي ترجع E الى I تسمى عمليات عكسية.

الفصل الاول: الصيغة المدرجة-السطرية المختزلة Reduced row-Echelon form

تعريف: يقال لمصفوفة بانها تحقق الصيغة المدرجة-السطرية المختزلة Reduced row-Echelon form اذا تحققت الشروط الاتية:

1. اذا لم تكن جميع عناصر سطر اصفارا فان اول عنصر غير صفري هو 1 (يطلق عليه الدليل 1).
2. اذا وجدت سطور كل عناصرها اصفار فان هذه السطور كافة تقع في الجهة السفلى من المصفوفة.
3. في اي سطرين متتاليين ليست جميع عناصر كل منهما اصفارا فان الدليل 1 للسطر الاسفل يكون ابعد الى اليمين من الدليل 1 للسطر الاعلى منه.
4. كل عمود يحوي الدليل 1 تكون عناصره الاخرى اصفارا.

ملاحظة: المصفوفة التي تحقق الشروط 1،2،3 يقال بانها تحقق الصيغة المدرجة السطرية Row-Echelon form.

امثلة متنوعة:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ الصيغة المدرجة-السطرية المختزلة

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ الصيغة المدرجة-السطرية

ملاحظة: في المصفوفة بالصيغة المدرجة-السطرية المختزلة تكون جميع العناصر الواقعة فوق وتحت كل دليل 1 اصفارا. اما في المصفوفة بالصيغة المدرجة-السطرية تكون جميع العناصر الواقعة تحت كل دليل 1 اصفارا.

تعريف: اذا امكن الحصول على احدى مصفوفتين من ثانية بواسطة سلسلة منتهية من عمليات سطرية اولية فيقال انهما متكافئتان سطريا (Row equivalent).

معكوس المصفوفة Inverse of a matrix

تعريف: اذا كانت A مصفوفة مربعة وكانت B مصفوفة تحقق العلاقات $AB = I = BA$ حيث I المصفوفة المحايدة، عندئذ يقال للمصفوفة A بانها قابلة للانعكاس (Invertible) ويطلق على المصفوفة B معكوس (Inverse) ويرمز للمعكوس بالرمز A^{-1}.

مبرهنة: كل مصفوفة اولية تكون قابلة للانعكاس كما ان هذا المعكوس هو مصفوفة اولية.

البرهان: نفرض ان E مصفوفة اولية.

اذن E ناتجة من اجراء عملية سطرية اولية واحدة على المصفوفة المحايدة I.

نفرض ان E_0 المصفوفة الناتجة من عكس هذه العملية السطرية على I.

بما ان عكس عملية سطرية يزيل مفعول تلك العملية السطرية.

اذن نحصل على $EE_0 = I, \quad E_0E = I$. اي ان E قابلة للانعكاس.

ولهذا فان المصفوفة الاولية E_0 هي معكوس E.

مثال: $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ باجراء $-2R_1 + R_3 \to R_3$ نحصل على $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ثم باجراء $2R_1 + R_3 \to R_3$ على I نحصل على $E_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

من الواضح ان $EE_0 = I, \quad E_0E = I$.

اي ان E_0 هي معكوس E.

ملاحظة: يمكن ايجاد معكوس المصفوفة A عن طريق كتابة المصفوفة المحايدة I والمصفوفة A بالشكل $[A:I]$ ثم اجراء سلسلة من العمليات السطرية الاولية الى ان نحصل على الشكل $[I:B]$ عندئذ يكون $B = A^{-1}$.

ملاحظة: اذا كانت جميع عناصر سطر في مصفوفة اليسار اصفارا فان المصفوفة A غير قابلة للانعكاس.

مثال: جد معكوس المصفوفة A ان امكن $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

$$[A|I] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], -R_1 + R_3 \to R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right], \ R_2 + R_1 \to R_1, \ -2R_2 + R_3 \to R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right], -1/2R_3 \to R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1 & -1/2 \end{array}\right], -R_3 + R_1 \to R_1, \ -R_3 + R_2 \to R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1 & -1/2 \end{array}\right] \Rightarrow [I|B] \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

مثال: جد معكوس المصفوفة A ان امكن $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

$$[A|I] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \ R_1 \to R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], -2R_1 + R_2 \to R_2, \ R_1 + R_3 \to R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right], \ -R_2 \to R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right], -2R_2 + R_1 \to R_1, \ -2R_2 + R_3 \to R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right], \ 1/7R_3 \to R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/7 & -3/7 & 1/7 \end{array}\right], -3R_3 + R_1 \to R_1, \ 2R_3 + R_2 \to R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 8/7 & -12/7 & -3/7 \\ 0 & 1 & 0 & -3/7 & 8/7 & 2/7 \\ 0 & 0 & 1 & 2/7 & -3/7 & 1/7 \end{array}\right] \Rightarrow [I|B] \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 8/7 & -12/7 & -3/7 \\ -3/7 & 8/7 & 2/7 \\ 2/7 & -3/7 & 1/7 \end{bmatrix}$$

الفصل الاول: حلول منظومات المعادلات الخطية Solutions of systems of linear equations

تعريف: تتكون منظومة المعادلات الخطية من m المعادلات ولها n من المجاهيل حيث يمكن كتابتها بالشكل

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

حيث ان a_{ij} ثوابت وان b_i الحد المطلق للمعادلات.

وتسمى مجموعة من الاعداد $s_1, s_2, \cdots, s_n$ حلا للمنظومة اعلاه اذا كانت $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \cdots, x_n = s_n$ هو حل لكل معادلة من المنظومة.

مثلا المنظومة

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 9x_3 &= -4 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 &= -1 \end{aligned}$$

لها الحل $x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -1$ لان هذه القيم تحقق المعادلتين.

بينما $x_1 = 1, \quad x_2 = 8, \quad x_3 = 1$ ليست حلا للمنظومة لانها تحقق المعادلة الثانية فقط.

ليست كل منظومات المعادلات الخطية لها حل. مثلا المنظومة

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ 3x_1 + 3x_2 &= 12 \end{aligned}$$

ليس لها حل لان احداهما تناقض الاخرى.

ملاحظة: المنظومة الخطية التي ليس لها حل تسمى منظومة غير قويمة. اما اذا وجد لها حل واحد على الاقل فتسمى منظومة قويمة. منظومة المعادلات الخطية تكون قويمة (لها حل) اذا وفقط اذا كانت مصفوفة المعاملات قابلة للانعكاس.

بصورة عامة منظومات المعادلات الخطية اما ان يكون لها حل وحيد او عدد غير منته من الحلول او لايوجد لها اي حل.

اذا كانت الحدود الخالية من المجاهيل (الحدود المطلقة) من منظومة المعادلات الخطية هي اصفار فتسمى منظومة المعادلات الخطية المتجانسة.

ملاحظة: اذا كانت عدد المجاهيل تساوي عدد المعادلات فمنظومة المعادلات الخطية المتجانسة لها حل وحيد وهو الحل الصفري، اما اذا كان عدد المجاهيل اكثر من عدد المعادلات فالمنظومة لها عدد غير منته من الحلول.
يمكن تحويل منظومة المعادلات الخطية الى صيغة مصفوفة بالشكل

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \vdots & b_m \end{bmatrix}$$

تسمى هذه المصفوفة بالمصفوفة الممتدة (Augmented matrix) لمنظومة المعادلات الخطية. اذا عبرنا عن المنظومة بالصيغة $AX = B$. فان المصفوفة الممتدة يمكن التعبير عنها بالشكل $[A \vdots B]$.

تعريف: لتكن $AX = B$ منظومة المعادلات الخطية. فان طريقة حل هذه المنظومة على اساس تحويل مصفوفتها الممتدة $[A \vdots B]$ الى الصيغة المدرجة السطرية المختزلة $[C \vdots D]$ تسمى طريقة حذف كاوس-جوردن (Gauss-Jordan elimination). اما تحويل مصفوفتها الممتدة الى الصيغة المدرجة السطرية تسمى طريقة حذف كاوس (Gauss elimination). علما ان طريقة تحويل المصفوفة الممتدة الى الصيغة المدرجة السطرية او السطرية المختزلة تتم باستخدام العمليات السطرية الاولية.

مثال: حل منظومة المعادلات الخطية التالية بطريقة حذف كاوس-جوردن

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$[A|B] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right] \quad , \; -2R_1 + R_2 \to R_2, \; -3R_1 + R_3 \to R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 3\\ 0 & -5 & 5 & -4\\ 0 & -7 & 1 & -8\end{array}\right], -1/5R_2 \rightarrow R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -1 & 4/5\\ 0 & -7 & 1 & -8\end{array}\right], -2R_2 + R_1 \rightarrow R_1,\ \ 7R_2 + R_3 \rightarrow R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 7/5\\ 0 & 1 & -1 & 4/5\\ 0 & 0 & -6 & -12/5\end{array}\right], -1/6R_3 \rightarrow R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 7/5\\ 0 & 1 & -1 & 4/5\\ 0 & 0 & 1 & 2/5\end{array}\right], -R_3 + R_1 \rightarrow R_1,\ \ R_3 + R_2 \rightarrow R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 5/5\\ 0 & 1 & 0 & 6/5\\ 0 & 0 & 1 & 2/5\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} x_1 \qquad &= 5/5\\ x_2 \quad &= 6/5\\ x_3 &= 2/5\end{aligned}$$

واضح ان الحل لمنظومة المعادلات الخطية هو $x_1 = 5/5\ ,\quad x_2 = 6/5\ ,\quad x_3 = 2/5$.

مثال: حل منظومة المعادلات الخطية التالية بطريقة حذف كاوس

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 2\\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 7\\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0\end{aligned}$$

$$[A|B] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 2\\ 2 & -1 & -1 & 7\\ 4 & -2 & 1 & 0\end{array}\right],\ -2R_1 + R_2 \rightarrow R_2,\ \ -4R_1 + R_3 \rightarrow R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 2\\ 0 & 3 & -3 & 3\\ 0 & 6 & -3 & -8\end{array}\right],\ 1/3R_2 \rightarrow R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 6 & -3 & -8\end{array}\right],\ -6R_2 + R_3 \rightarrow R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 3 & -14\end{array}\right], 1/3R_3 \rightarrow R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -14/3\end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 2\\ x_2 - x_3 &= 1\\ x_3 &= -14/3\end{aligned}$$

من معادلة 3 واضح ان $x_3 = -14/3$.

بتعويض قيمة x_3 في معادلة 2 فان $x_2 = -11/3$.

واخيرا بتعويض قيم x_3, x_2 في معادلة 1 فان $x_1 = -2/3$.

اذن الحل لمنظومة المعادلات الخطية هو $x_1 = -2/3\ ,\quad x_2 = -11/3\ ,\quad x_3 = -14/3$.