جامعة الموصل
كلية التربية للعلوم الصرفة
قسم الفيزياء

# Complex Functions الدوال المعقدة
## المرحلة الثالثة

مدرس المادة

م.م. اكرام محمد عبدالله

# المحاضرة الأولى
# الفصل الأول / العدد المركب Complex Number

## أنظمة الاعداد Number Systems

قبل ابتكار نظام الأرقام المركبة، كانت هناك عدة أنظمة أرقام أخرى سبقته، وهي:

1. نظام الأعداد الصحيحة

يساعد نظام الأعداد هذا في اجراء عملية العد وحل المعادلات ذات الشكل التالي:

$$x + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -c$$

2. نظام الاعداد الكسرية

يمنحنا نظام الأرقام هذا القدرة على حل المعادلات ذات الشكل التالي:

$$bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{c}{b}, \quad b \neq 0$$

3. نظام الاعداد الحقيقية

يمنحنا نظام الأرقام هذا القدرة على حل المعادلات ذات الشكل التالي:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, a \neq 0$$

لكن جميع أنظمة الأعداد السابقة تقف عاجزة دون حل المعادلة البسيطة التالية:

$$x^2 + 1 = 0$$

**من هذه الحقيقة ،تاتي الحاجة الى نظام اعداد جديد قادر على حل مثل هذه المعادلة، وقد اطلق على نظام الاعداد هذا نظام الاعداد المركبة**

نظام الاعداد الطبيعية N

نظام الاعداد الصحيحة Z

نظام الاعداد الكسرية Q

نظام الاعداد الحقيقية R

نظام الاعداد المعقدة C

# العدد المركب Complex Number

يمكن تعريف الرقم المركب على أنه أزواج مرتبة $Z = (x, y)$ ، حيث x & y هي أرقام حقيقية ويمكن تشكيلها على النحو التالي:

$$Z = (x, y), \quad i = \sqrt{-1}, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -\sqrt{-1}, \quad i^4 = 1, \quad \ldots$$

حيث $x$ يسمى الجزء الحقيقي و$y$ الجزء التخيلي:

$$x = Re(Z), \quad y = Im(Z)$$

**امثلة توضيحية:**

# المحاضرة الثانية

## خصائص العدد المرافق

اذا كانت $Z = x + iy$ فإن:

1. $Z = 0 \Rightarrow \bar{Z} = 0$

2. $\bar{Z} = \overline{(x + iy)} = x - iy$

3. $\bar{\bar{Z}} = Z$

4. $\bar{i} = -i$ and $-\bar{i} = i$

5. $\bar{Z} = -Z$ If Z is pure imaginary

6. $\bar{Z} = Z$ If Z is pure real

7. $Z\bar{Z} = x^2 + y^2$

8. $Z + \bar{Z} = 2Re(Z) = 2x$

9. $Z - \bar{Z} = 2iIm(Z) = 2yi$

# قوانين التبادل والمساواة

1. $Z_1 + Z_2 = Z_2 + Z_1$

2. $Z_1 \times Z_2 = Z_2 \times Z_1$

3. $(Z_1 + Z_2) + Z_3 = Z_1 + (Z_2 + Z_3)$

4. $(Z_1 \times Z_2) \times Z_3 = Z_1 \times (Z_2 \times Z_3)$

5. $Z \times Z^{-1} = 1, \; Z^{-1} = \frac{1}{Z}$

# Examples امثلة

مثال 1.8 : اذا كان $Z = x + iy$، حل المعادلة التالية $Z^2 + Z + 1 = 0$

توجد طريقتان لحل المعادلة المركبة

الطريقة الأولى: وهي الطريقة الشائعة في حل المعادلات المركبة، والتي تتطلب التعويض بدل $Z$ بـ $(x + iy)$ وإيجاد قيم $x \& y$، أي:

$$(x + iy)^2 + (x + iy) + 1 = 0$$

$$(x^2 - y^2 + x + 1) + i(2xy + y) = 0$$

استنادا الى خصائص المساواة، فأن:

$$x^2 - y^2 + x + 1 = 0 \quad \dots\dots(1)$$

$$2xy + y = 0 \quad \dots\dots(2)$$

بأعاده ترتيب المعادلة (2) فأننا نحصل على

$$y(2x+1)=0$$

$$\Rightarrow \text{اما } y=0 \text{ او } x=-\frac{1}{2}$$

اننا نهمل قيمة $y=0$ لأنها تجعل العدد $Z$ عددا حقيقياً، وبتعويض $x=-\frac{1}{2}$ في معادلة رقم (1) فأننا نحصل على

$$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore$ الحل هو $\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

<u>الطريقة الثانية</u>: والتي تتطلب استعمال الطريقة الاعتيادية في حل المعادلات لإيجاد حل المعادلة المركبة، اي

$$Z^2+Z+1=0$$

$$\Rightarrow \quad a=1, \qquad b=1, \qquad c=1$$

$$\therefore Z=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore$ الحل هو $\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

# المحاضرة الثالثة

## القيمة المطلقة للعدد المركب

إن المعامل أو القيمة المطلقة للرقم المركب $Z = x + iy$ هو رقم حقيقي غير سالب يرمز له بالرمز $|Z|$ وتعطى بالمعادلة:

$$|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

**The Properties of the Absolute Value** خصائص القيمة المطلقة للعدد المركب

1. $|Z| = \sqrt{Z\bar{Z}}$
2. $|Z| = |\bar{Z}|$
3. $|Z_1 - Z_2| = |Z_2 - Z_1|$
4. $|Z_1 . Z_2| = |Z_2 . Z_1|$
5. $\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$
6. $|Z_1 + Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2|$
7. $|Z_1 - Z_2| \geq \left||Z_1| - |Z_2|\right|$

# التمثيل الهندسي للعدد المركب

يمكن تمثيل العدد المركب بطريقتين، هما:

1 .يتم ترتيب الأعداد المركبة أزواجًا من الأرقام الحقيقية، بحيث يمكن تمثيلها بنقاط في المستوى.

2. يمكن تمثيل العدد المركب $Z = x + iy = (x, y)$ بواسطة متجه موضع في المستوى $xy$ الذي يكون ذيله في نقطة الأصل ويكون رأسه عند النقطة $(x, y)$.

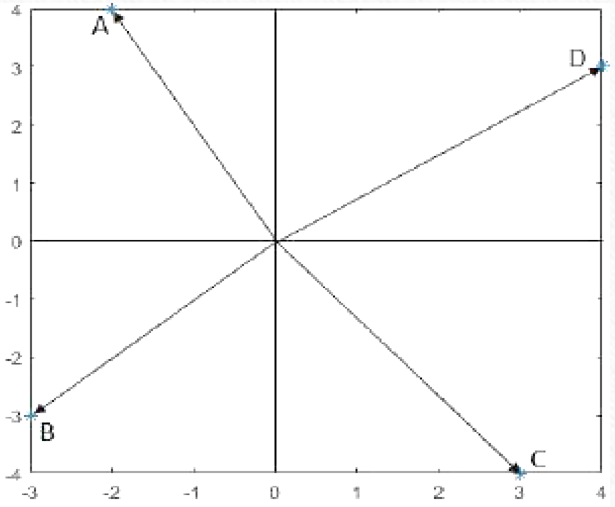
مثال 1.12 : مثل الاعداد التالية هندسيا.

A) $-2 + i4 = (-2,4)$

B) $-3 - i3 = (-3,-3)$

C) $3 - i4 = (3,-4)$

D) $4 + i3 = (4,3)$




يسمى المستوى الذي يحتوي على الأرقام المعقدة بالمستوى المعقد، Z- plane، Aragand diagram

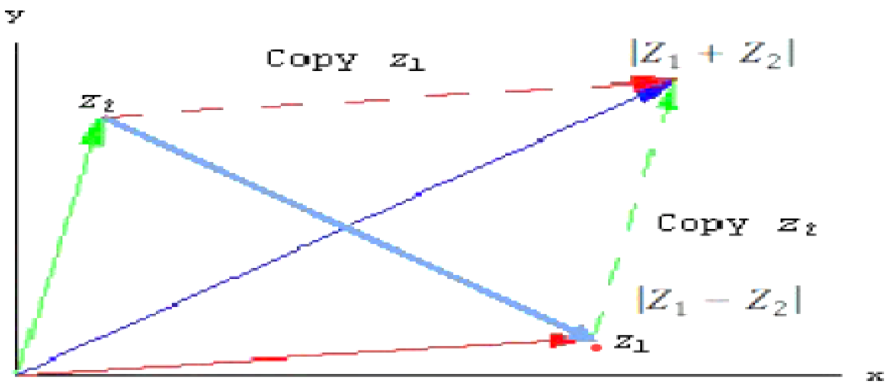
يمكن تمثيل عملية الجمع والطرح للأعداد المركبة هندسيا وكما يلي:

$$|Z_1 + Z_2| \le |Z_1| + |Z_2|$$

$$|Z_1 - Z_2| \ge ||Z_1| - |Z_2||$$

حيث يمثل $|Z|$ متجه الازاحة من نقطة الأصل الى النقطة $Z$.

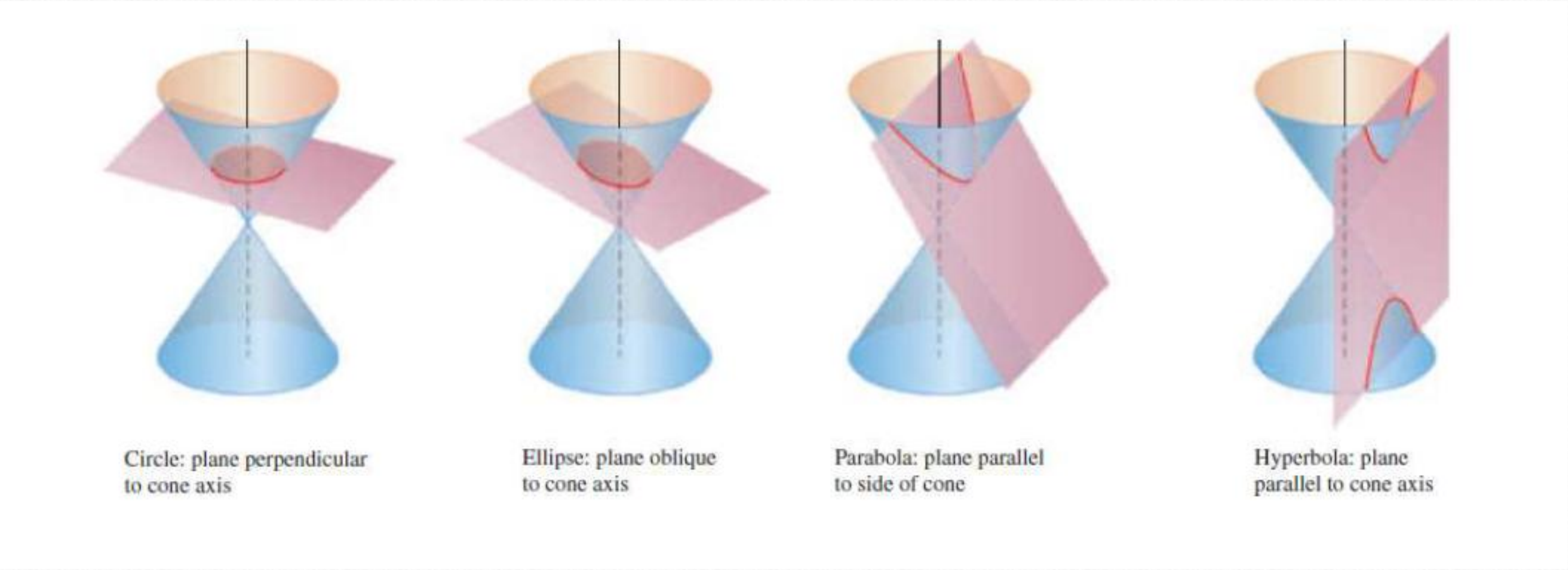
$|Z_1 - Z_2|$ يمثل متجه الازاحة من النقطة $Z_2 = (x_2, y_2)$

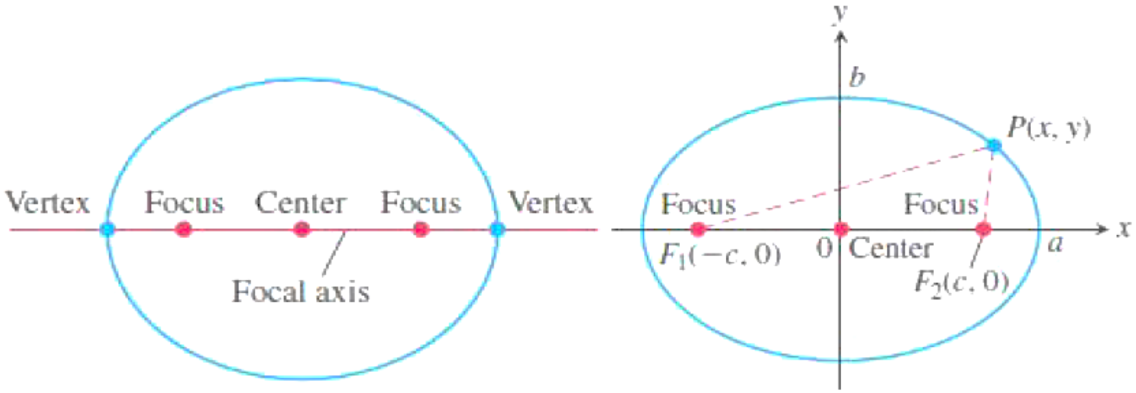



الى النقطة $Z_1 = (x_1, y_1)$، أي:

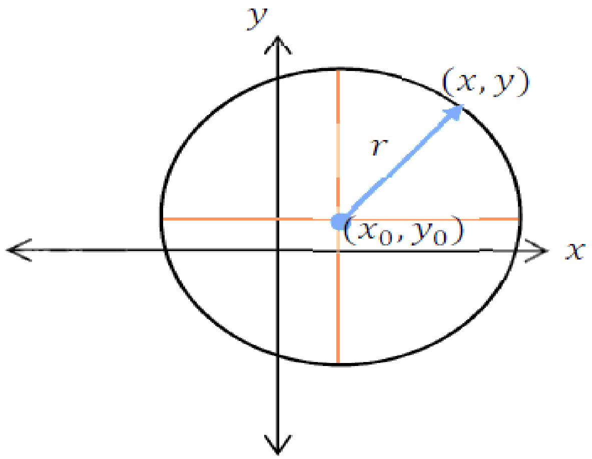
$$\overleftarrow{Z_1 - Z_2}$$

# القطوع المخروطية   Conic Section

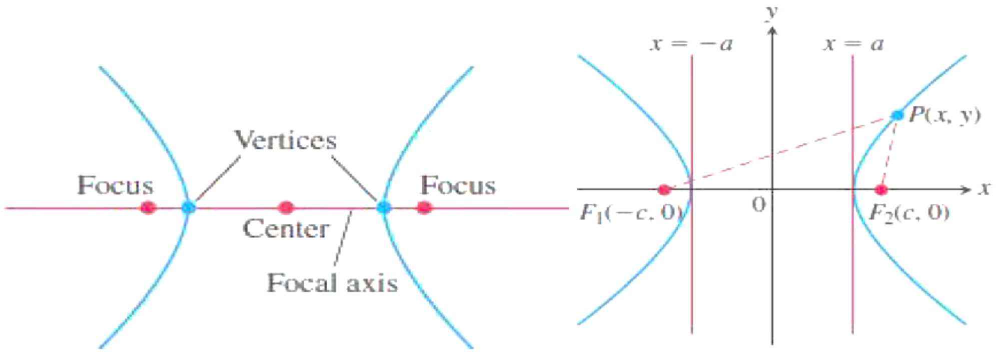




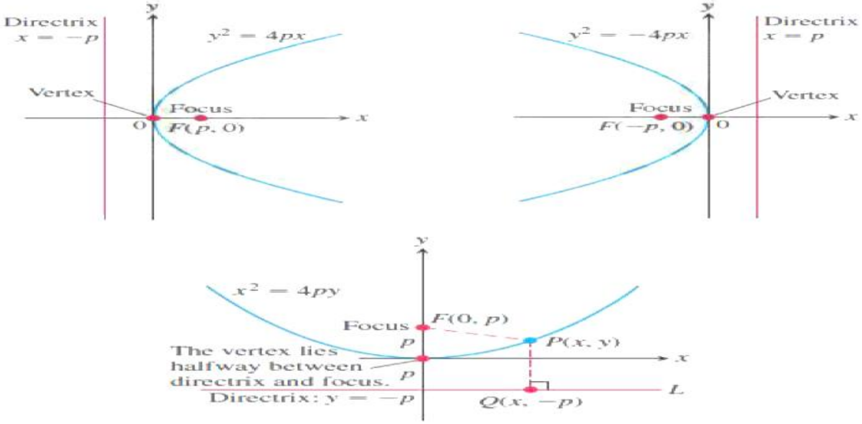

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1,\qquad c=\sqrt{a^2-b^2},\qquad a>b$$




$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$




$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1,\qquad c=\sqrt{a^2+b^2},\qquad y=\frac{a}{b}x$$




$(y-y_0)^2=4p(x-x_0)$ أو $(x-x_0)^2=4p(y-y_0)$

# المحاضرة الرابعة

## التمثيل القطبي للعدد المركب Polar Representation

تعرفنا سابقا ان العدد المعقد يمكن تمثيله هندسيا كمتجه وعليه يمكننا وصفه بشكل فريد من حيث حجمه (الطول $|Z|$ ) واتجاهه (الزاوية التي يصنعها مع المحور x الإيجابي $\theta$) .

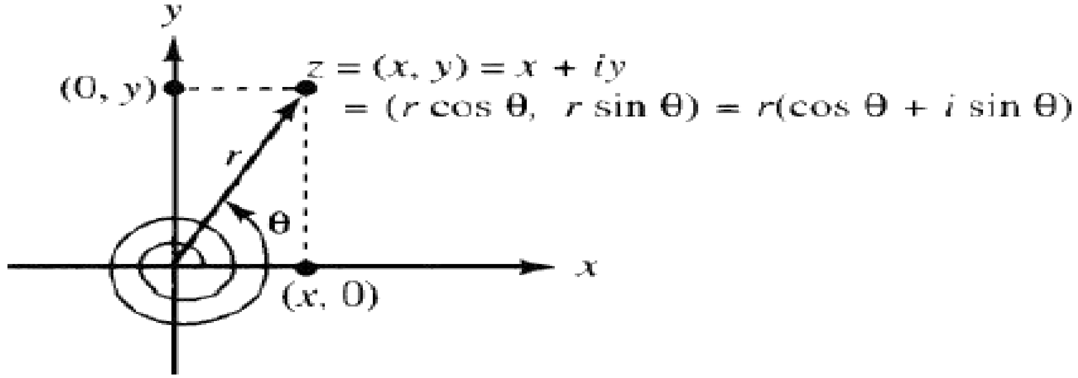
$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$\because Z = x + iy$$

$$Z = r\cos\theta + ir\sin\theta$$

$$\boldsymbol{Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$$




حيث $r$ هو طول الرقم المركب (معامله $|Z|$)

$$r = |Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

و $\theta$ هي الزاوية التي تسمى argument of $Z$

$$\arg(Z) = \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} \quad \text{او} \quad \arg(Z) = \theta = \cos^{-1}\frac{x}{r}$$

تسمى $\theta$ & $r$ الإحداثيات القطبية لـZ . حيث أن $\theta$ تنتمي إلى مجموعة من الزوايا التي تختلف بمقدار$2\pi$ ، أي

$$\arg(Z) = \theta + 2k\pi, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

وقد اتفق علماء الرياضيات على قيمة واحدة للزاوية ، وهو اختيار خاص لـ $\theta \in \arg(Z)$ ، إنها قيمة $\theta$ التي تقع قيمتها ضمن الفترة $-\pi < \theta \le \pi$ والتي تدعى بالزاوية الاساسية $Arg(Z)$.

$$-\pi < Arg(Z) \le \pi$$

$$\arg(Z) = Arg(Z) + 2k\pi$$

# متطابقة ديموفر

انطلاقا من النظرية السابقة فيمكننا الوصول الى متطابقة دي موفر وكالتالي

$$\therefore \arg(Z_1 Z_2) = \arg(Z_1) + \arg(Z_2) = \theta_1 + \theta_2 \qquad \ldots\ldots 1$$

$$\Rightarrow \arg(Z_1 Z_2 Z_3) = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$

اذا افترضنا ان $Z_1 = Z_2 = Z_3 = \cdots = Z_n = Z$

$$\Rightarrow (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta ,$$ متطابقة دي موفر

قد تفشل المعادلة (1) عندما نستخدم قيمة الزاوية الأساسية $Arg(Z)$ ، لذلك نضيف $2k\pi$ إلى المعادلة (1) لتصبح صالحة مرة أخرى ، أي

$$arg(Z_1 Z_2) = Arg(Z_1) + Arg(Z_2) = \theta_1 + \theta_2 + 2k\pi$$

# المحاضرة الخامسة

# الفصل الثاني / الدوال التحليلية

## 2.1. الدالة المركبة Complex Function

اذا فرضنا ان كل من $Z$ و $W$ هما عددان مركبان، فأن عملية ربط (اقران) العدد $Z$ مع العدد $W$ يدعى بالدالة، وهي معقدة ايضاً.

$$W = f(Z)$$

وتدعى القيم التي يمكن ان يأخذها العدد $Z$ بمجال الدالة Domain (D) والقيم التي يمكن ان يأخذها العدد $W$ بمدى الدالة Rang (R) $\{W = f(Z): Z \in D\}$.

مثال 2.1 : حدد مجال و مدى الدوال التالية:

1. $w = f(Z) = 2Z^2 + 4Z + 1$ $\quad D = \{Z: Z \in C\}$ Entire function
2. $w = f(Z) = |Z - 4|$ $\quad D = \{Z: Z \in C\}$ Entire function
3. $w = f(Z) = \dfrac{1}{Z^2 + 4}$ $\quad D = \{Z: Z \in C \backslash \pm 2i\}$

تماما كما $Z$ ، يمكن التعبير عن الدالة المعقدة بأجزائها الحقيقية والخيالية ، $Z = x + iy$ . يمكننا أن نكتب $f(Z) = w = u + iv$ ، حيث $u \;\&\; v$ هي أجزاء حقيقية وتخيليّة من $W$ على التوالي.

$$w = f(Z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$$

حيث $u \;\&\; v$ هما دوال حقيقية

# الغايات Limits

ليكن $f(Z) = U(x,y) + iV(x,y)$ دالة مركبة معرفة في بعض الجوار من $Z_0 = x_0 + iy_0$ ، ثم تكون الدالة $f(Z)$ لها غاية (ليكن $W_0 = U_0 + iV_0$ ) عندما يقترب $Z$ من $Z_0$، أي

$$\lim_{Z \to Z_0} f(Z) = W_0 = U_0 + iV_0$$

إذا وإذا فقط

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} U(x,y) = U_0 \quad and \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} V(x,y) = V_0$$

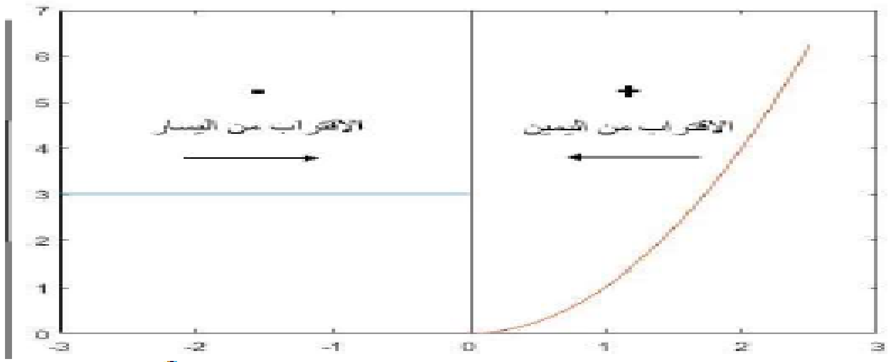
وهي قيمة فريدة عند الاقتراب من اليمين أو اليسار إلى النقطة $Z_0$.

مثال 2.3 : جد فيما اذا انت الدالة التالية تملك غاية عند النقطة (0,0).

$$f(Z) = \begin{cases} 3i & Z<0 \\ Z^2 & Z\geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0^+ \\ y \to 0^+}} f(0) = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0^- \\ y \to 0^-}} f(0) = 3i$$




لا تملك الدالة غاية لامتلاكها أكثر من قيمة عند الاقراب من اليمين واليسار.

# الاستمرارية Continuous

يطلق على الدالة $w = f(Z)$ مستمرة في نقطة $Z = Z_0$ إذا تم تعريفها في $Z_0$ وجوارها وتستوفي الشروط التالية:

1. $f(Z)$ معرفة في $Z_0$

$$f(Z) = 2Z^2 - 3Z + 2$$
$$f(1) = 2 - 3 + 2 = 1$$

2. الغاية $\lim_{Z\to Z_0} f(Z)$ موجودة

$$\lim_{Z\to 1}(2Z^2 - 3Z + 2) = 2 - 3 + 2 = 1$$

3. الغاية $\lim_{Z\to Z_0} f(Z)$ تساوي $f(Z_0)$

$$\lim_{Z\to 1} f(Z) = 1 = f(z)$$

**امثلة توضيحية:**