College of Education for Pure Sciences
Department of Mathematics

Assist. Prof. Taghreed Hamdoon Shuker
Assist. Lect. Dilshad Qasim Hamza

المادة: تحليل عقدي

Subject: Complex Analysis

المرحلة الرابعة

Fourth year

المحاضرة الاولى

First Lecture

مقدمة:

العدد المعقد: يعرف العدد المعقد $Z=(x,y)$ بانه زوج مرتب حيث

انه x,y عددان حقيقيان والخاصان لعمليتين الجمع والضرب:

$$Z_1=(x_1,y_1)\ ,\ Z_2=(x_2,y_2)$$
$$Z_1+Z_2=(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$$

اذا كان الجزء الحقيقي صفر اي انه $Z=(0,y)$ عندئذ يسمى العدد المعقد بانه خيالي صرف ويرمز للجزء الخيالي من Z بالرمز $I(Z)$.

اذا كان الجزء الخيالي صفر اي انه $Z=(x,0)$ عندئذ يسمى العدد المعقد بانه حقيقي صرف ويرمز للجزء الحقيقي من Z بالرمز $R(Z)$.

يمكن كتابة العدد المعقد $Z=(x,y)$ بالشكل:

$$Z=x+yi \quad ; \quad x,y\in R \ \text{و}\ i=\sqrt{-1}$$

$$i^1=i \qquad i^2=-1 \qquad i^3=-i \qquad i^4=1$$

باقي قسمة $\frac{n}{4}$ على 1 تساوي i^n، على 2 تساوي -1، على 3 تساوي $-i$، على 0 تساوي 1

امثلة:

$$Z=9 \Rightarrow R(Z)=9 \quad I(Z)=0$$
$$Z=-2i \Rightarrow R(Z)=0 \quad I(Z)=-2$$
$$Z=3+2i \Rightarrow R(Z)=3 \quad I(Z)=2$$

$$i^5=i \ ; \ i^6=-1 \ , \ i^{16}=1 \ ; \ i^{25}=i \ ; \ i^{72}=-i$$

هنواص العدد المعقد:

(1) يكون العدد المعقد Z مساوياً الصفر اذا وفقط اذا كان كل من جزئيه الحقيقي والخيالي مساوياً للصفر. اي انه

$$Z=0 \iff Z=0+0i \qquad x=0\ ,\ y=0$$

الموضوع: التاريخ: / / ٢٠٠

② يتساوى العددان المعقدان اذا وفقط اذا كان جزئيهما الحقيقيان والخياليان متساويان اي بحيث

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \; ; \; y_1 = y_2$$

مثال :- جد قيم كل من x, y الحقيقية التي تحقق المعادلة :-

$$(x - y - 6) + i(y^2 - x) = 0$$

الحل : حسب خاصية (1)

$$x - y - 6 = 0 \quad \& \quad y^2 - x = 0$$

بجمع المعادلتين

$$y^2 - y - 6 = 0 \Rightarrow (y - 3)(y + 2) = 0$$

$$\Rightarrow y = 3 \Rightarrow 9 - x = 0 \Rightarrow x = 9 \qquad (9, 3)$$

$$\text{or } y = -2 \Rightarrow 4 - x = 0 \Rightarrow x = 4 \qquad (4, -2)$$

العمليات الاربعة على z :

$$z_1 \mp z_2 = (x_1 \mp x_2) + i(y_1 \mp y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1 i) * (x_2 - y_2 i)$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i$$

ملاحظة :-

$$N \subset \underbrace{\bar{N} \cup N^+}_{Z} \subset Q \subset R \subset C \quad \text{①}$$

② حقيقي صرف × حقيقي صرف = حقيقي صرف

③ خيالي صرف × خيالي صرف = حقيقي صرف

④ خيالي صرف × حقيقي صرف = خيالي صرف

مرافق العدد المركب (يرمز له $\bar{z}$) : هو تغيير اشارة الجزء الخيالي فقط :-

$$z = x + iy \Rightarrow \bar{z} = x - iy$$

$$z = 5 \Rightarrow \bar{z} = 5 \quad , \quad z = i \Rightarrow \bar{z} = -i$$

بعض خواص المرافق :-

1- $z = 0 \Rightarrow \bar{z} = 0$

2- $z = x + iy \Rightarrow \bar{z} = x - iy \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

3- $\bar{i} = -i \quad ; \quad \bar{\bar{i}} = i$

4- $\bar{\bar{z}} = z$

5- z تخيلي صرف $\Rightarrow \bar{z} = -z$

6- z حقيقي صرف $\Rightarrow \bar{z} = z$

7- $z + \bar{z} = 2x = 2R(z)$

8- $z - \bar{z} = 2yi = 2i\,(\mathrm{Im}(z))$

9- $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$

10- $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$

11- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

12- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

بعض الصفات الجبرية للعدد المركب :-

1- الجمع والضرب مغلقة على $\mathbb{C}$.

2- الجمع والضرب تبديلية على $\mathbb{C}$.

3- المحايد الجمعي في $\mathbb{C}$ هو الصفر .

4- المحايد الضربي في $\mathbb{C}$ هو الواحد .

5- النظير الجمعي للعدد z هو $-z$.

النظير الضربي للعدد $z \neq 0$ هو $\frac{1}{z}$.

6- الجمع والضرب عملية تبديلية على $\mathbb{C}$.

ملاحظة : $z \neq \bar{z}$.

الموضوع: التاريخ: / / ٢٠٠٠

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} * \frac{(x_2 - iy_2)}{(x_2 - iy_2)}$$ (بضرب بمرافق المقام)

$$= \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\therefore \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_1 y_2 + x_2 y_1}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+yi} \cdot \frac{x-yi}{x-yi} = \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2}$$

مثال:- $z_1 = 2+3i \quad ; \quad z_2 = 1-i$

$$z_1 + z_2 = 3 + 2i \quad ; \quad z_1 - z_2 = 1 + 4i$$
$$z_1 . z_2 = 5 + i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+3i}{1-i} = \frac{(2+3i)(1+i)}{1+1} = \frac{-1}{2} + \frac{5}{2}i$$

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{1-i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

ملاحظة:-

$$a^2 + b^2 = (a+bi)(a-bi)$$

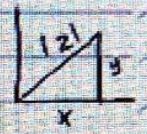
الموضوع: التاريخ: / / ٢٠٠

القيمة المطلقة للعدد المركب $z = x+yi$ ويرمز لها بالرمز $|z|$:-

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} \geq 0$$ وهو مقدار حقيقي غير سالب

$z = 3+4i \Rightarrow |z| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

$z = 3-4i \Rightarrow |z| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$



بعض خواص القيمة المطلقة :-

1) $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

البرهان :

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x+yi)(x-yi)} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

2) $|z| = |\bar{z}|$

البرهان :-

$$|\bar{z}| = \sqrt{(x)^2+(-y)^2} = \sqrt{x^2+y^2} = |z|$$

or $|\bar{z}| = \sqrt{z \cdot \bar{\bar{z}}} = \sqrt{z \cdot z} = |z|$

3) $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$

4) $\frac{1}{2}(z+\bar{z}) = x \leq \sqrt{x^2+y^2} = |z|$

5) $\frac{1}{2i}(z-\bar{z}) = y \leq (\sqrt{x^2+y^2}) = |z|$

6) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

البرهان :-

$$|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{z_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z_1 \cdot z_2}} = \sqrt{z_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2}$$

$$= \sqrt{z_1 \bar{z}_1} \cdot \sqrt{z_2 \cdot \bar{z}_2} = |z_1| \cdot |z_2|$$

المحاضرة الثانية

Second Lecture

الفصل الثاني

الدوال التحليلية

الدالة المعقدة: اذا وجدت قاعدة ما التي بواسطتها يمكن ايجاد اي عدد معقد $z \in D$ يعين عدد معقد w فان هذه الدالة تسمى دالة معقدة وتكتب $w = f(z)$

مثال(1)- منطقة الدالة التي $w = |z+2|$ ، $w = z^2 + 2z + 1$ هي جميع نقاط المستوى المعقد

مثال -2- منطقة الدالة $w = \frac{1}{z^2+4}$ هي جميع نقاط المستوى المعقد عدا $z = \pm 2i$

لنفرض ان u ، v هما اقسام الحقيقي والخيالي للدالة $w = f(z)$ حيث u القسم الحقيقي و v القسم الخيالي فان u و v دالتان حقيقيتان تعتمدان على x و y الحقيقيتين

$$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \quad \text{---} (1)$$

مثال-3- الدالة $w = z^2$ عندئذ

$$w = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

بمقارنة بـ (1) ينتج

$$u(x,y) = x^2 - y^2$$

$$v = 2xy$$

الدالة الوحيدة التي تكون الدالة $w = f(z)$ وحيدة القيمة في المنطقة D اذا كان لكل $z \in D$ يناظر عدد حقيقي واحد من قيم الدالة $f(z)$

مثال 4- الدالة $w = z^2 + z + 1$ وحيدة القيمة
الدالة المتعددة القيم: الدالة $w = f(z)$ متعددة القيم في المنطقة D إذا كان لكل $z \in D$ تناظر عدة قيم $w = f(z)$

مثال 5- الدالة $z^{1/3}$ ثلاثية القيم لكل z تناظر ثلاث قيم w

$$w = z^{1/3} = r^{1/3}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{3}\right)$$

$k = 0, 1, 2$

الدالة المتباينة: لتكن $w = f(z)$ دالة متباينة إذا وفقط فقط كان لكل $z_1, z_2 \in D$ فإن

$$f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2$$

الدالة العكسية إذا كانت f دالة متباينة فإن الدالة العكسية لـ f هي f^{-1} وسوف نجد z بدلالة w ونكتب

$$w = f^{-1} z$$

مثال 6 :- $f(z)=\frac{1}{z+2}$ غير معرفة عند $z=-2$

$w=\frac{1}{z+2}$

$w\neq 0 \Rightarrow z=\frac{1}{w}-2$ ينتج

النهايات او (الغايات) Limits

تبدل الدالة $w=f(z)$ الحركة بجوار النقطة z_0 في المستوي z الى نقطة او غاية مثل w_0 عندما تقترب z من z_0 ونكتب $\lim_{z\to z_0} f(z)=w_0$

اذا وفقط اذا لكل عدد حقيقي موجب $\varepsilon>0$ يمكن ايجاد عدد آخر $\delta>0$ بحيث $|f(z)-w_0|<\varepsilon$ لكل z التي تحقق المتباينة $0<|z-z_0|<\delta$

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0, 0<|z-z_0|<\delta \Rightarrow |w-w_0|<\varepsilon$$

$$\lim_{z \to 2i-1} (2z+3) = 4i+1$$ برهن ذلك

ولكل $\epsilon > 0$ أي عدد حقيقي موجب صغير كما نريد

إيجاد $\delta > 0$ بحيث كل قيم z التي تحقق المتباينة

$$0 < |z-(2i-1)| < \delta$$

ينتج لدينا $|2z+3-(4i+1)| < \epsilon$ أو

$$|2z - 4i + 2| < \epsilon$$

$$|2(z-(2i-1))| <$$

$$|z-(2i-1)| < \epsilon/2$$

$$\Rightarrow |z-z_0| < \epsilon/2$$

$$\therefore \delta = \epsilon/2$$

خصائص النهايات

١- وحدانية النهاية إذا كانت للدالة نهاية عند النقطة z_0 فإن هذه النهاية وحيدة

٢- لتكن $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ عندئذ

إذا وفقط إذا $\lim f(z) = u_0 + i v_0 = w_0$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) = u_0 \quad , \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) = v_0$$

$z_0 = x_0 + i y_0$

3- اذا كانت $f(z)$ و $g(z)$ دالتين بالمتغير z وكان

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=L \quad , \quad \lim_{z\to z_0} g(z)=M$$

فإن

$$\lim_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=L\pm M$$

$$\lim_{z\to z_0} f(z)\cdot g(z)=L\cdot M$$

$$\lim \frac{f(z)}{g(z)}=\frac{L}{M} \quad , \quad M\neq 0$$

4- اذا كان c اي عدد حقيقي ثابت فان

$$\lim_{z\to z_0} c=c$$

$$\lim_{z\to z_0} z=z_0$$

$$\lim_{z\to z_0} z^n=z_0^n$$

5- n اي عدد صحيح موجب.

7- n اي عدد صحيح موجب.

$$f(z)=\sum_{k\to 0}^{n} a_k z^k=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$$

المحاضرة الثالثة

Third Lecture

الاستمرارية Continuity

يقال للدالة $w=f(z)$ المعرفة بجوار النقطة z_0 أو مستمرة في النقطة z_0 اذا كان لكل $\epsilon>0$ يمكن ايجاد $\delta>0$ بحيث $|f(z)-f(z_0)|<\epsilon$ لكل قيم z التي تحقق المتباينة $|z-z_0|<\delta$ و $|z-z_0|>0$ وبتعبير آخر اذا تحقق الشرط الاتية

1. يمكن تحديد وايجاد $f(z_0)$
2. يمكن ايجاد $\lim_{z\to z_0} f(z)$
3. $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$

تكون الدالة $f(z)$ مستمرة في المنطقة D اذا كانت مستمرة في كل نقاط D

مثال: الدالة $w=\frac{1}{z}$ مستمرة لجميع قيم z عدا $z=0$ لانه لا توجد عندها الدالة

مثال: الدالة $w=\frac{\bar{z}}{z}$ غير مستمرة عند $z=0$ لانه عند تقرب z من الصفر على المحور الحقيقي تكون الدالة

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x-iy}{x+iy} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

بينما اذا اقتربت من الصفر على المحور التخيلي تكون الدالة

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x-iy}{x+iy} = \lim_{y\to 0} \frac{-iy}{iy} = \lim(-1) = -1$$

نجد ان الغايتين غير متساويتين وبذلك تخالف شرط الثالث

مبرهنة: اذا كانت الدالتان $f(z)$, $g(z)$ مستمرتين في النقطة z_0 فان

1. $f(z) \pm g(z)$
2. $f(z) \cdot g(z)$
3. $\frac{f(z)}{g(z)}$, $g(z) \neq 0$

تكون جميعها مستمرة في النقطة z_0

الاستمرارية بانتظام Uniform Continuity

من تعريف الاستمرارية نلاحظ ان δ تعتمد على $\epsilon > 0$ و z_0 اذا امكن ايجاد δ تعتمد فقط على ϵ فاننا نقول ان الدالة منتظمة الاستمرارية في المنطقة D

الدالة $f(z)$ منتظمة الاستمرارية في D اذا كان لكل $\epsilon > 0$ يمكن ايجاد $\delta > 0$ بحيث ان $|f(z_2) - f(z_1)| < \epsilon$ لكل قيم $z_1, z_2 \in D$ التي تحقق $0 < |z_2 - z_1| < \delta$

مبرهنة 1- اذا كانت الدالة $f(z)$ مستمرة في منطقة محدودة ومغلقة D فانها تكون منتظمة الاستمرارية في D.

مثال: برهن ان الدالة $f(z)=z^2$ منتظمة المستمرة في المنطقة $|z|<1$

الحل: يجب ان نبرهن لكل $\epsilon>0$ يمكن ايجاد δ بحيث $|z_2^2-z_1^2|<\epsilon$ لكل $z_1,z_2\in D$ تحقق العلاقة $0<|z_2-z_1|<\delta$

$$|z_2^2-z_1^2|=|z_2+z_1||z_2-z_1|\le[|z_2|+|z_1|]|z_2-z_1|$$
$$<[1+1][z_2-z_1]<\epsilon$$

$$\therefore |z_2-z_1|<\frac{\epsilon}{2}\Rightarrow \delta=\frac{\epsilon}{2}$$

وهذا δ يعتمد فقط على ϵ ولا يعتمد على موقع z_2,z_1 في المنطقة $|z|<1$

التعريف: لتكن f دالة معرفة على المنطقة D نقول ان الدالة f عند النقطة z_0 تكتب $f'(z_0)$

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

بشرط ان تكون هذه النهاية موجودة.

مثال: برهن ان الدالة $f(z)=\bar{z}$ ليست قابلة للاشتقاق $f'(z)\neq 0$

الحل:

$$\frac{\Delta z}{\Delta z}=\frac{\bar{z}+\Delta\bar{z}-\bar{z}}{\Delta z}=\frac{\Delta f(z)-f(z)}{\Delta z}$$

$z=x+iy$

$\Delta z = \Delta x + i\Delta y$

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}$$

اذا فرضنا $\Delta z \to 0$ كما في الشكل، فإن $\Delta x + i\Delta y$ تؤول إلى الصفر، كما في $(\Delta y = 0)$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x - i0}{\Delta x + i0} = \lim \frac{1}{1} = 1$$

واذا فرضنا $\Delta z \to 0$ بحيث $\Delta x = 0$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0 - i\Delta y}{0 + i\Delta y} = \lim \frac{-1}{1} = -1$$

مبرهنة :- اذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق في النقطة z_0 فانه تكون الدالة f مستمرة في النقطة z_0

البرهان :- بما أن f قابلة للاشتقاق في z_0 فإن $f(z)$ موجودة

$$\lim_{\Delta z \to 0} [f(z_0+\Delta z) - f(z_0)] = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} \cdot \Delta z$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} \cdot \lim_{\Delta z \to 0} \Delta z$$

$$= f'(z_0) \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta z \to 0} f(z_0+\Delta z) = f(z_0)$$

أي $\lim_{z \to 0} f(z) = f(z_0)$

وهذا يعني أن الدالة غير المتصلة

اعداد استمرارية الدالة في نقطة z_0 غير كافة لكي الدالة قابلة للاشتقاق في z_0 كما في المثال $f(z) = \bar{z}$ مستمرة في جميع نقاط المستوي المعقد لكنها غير قابلة للاشتقاق.

الدوال التحليلية: يقال ان الدالة $f(z)$ تحليلية في z_0 اذا كانت قابلة للاشتقاق في النقطة z_0 وفي كل نقطة في جوار للنقطة z_0.

يقال ان الدالة $f(z)$ تحليلية في المنطقة D اذا كانت تحليلية في جميع نقاط هذه المنطقة D.

يقال ان الدالة $f(z)$ كلية اذا كانت تحليلية في جميع نقاط المستوى المعقد.

اذا كانت الدالة f تحليلية في بعض نقاط جوار z_0 ما لا تقع في z_0 نقطة شاذة

مثال: عين نقاط الشذوذ للدالة $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$

$\frac{dw}{dz} = \frac{2}{(1-z)^2}$ اذا الدالة تحليلية عدا $z=1$

المحاضرة الرابعة

Fourth Lecture

الدوال التوافقية Harmonic function

لتكن $h(x,y)$ دالة حقيقية تعتمد على متغيرين حقيقيين x و y معرفة في المستوي xy تكن h دالة توافقية في ذلك المنطقة اذا كانت مشتقاتها الجزئية الاولى والثانية مستمرة وتحقق المعادلة التالية

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}=0 \quad \text{---} (1)$$

وتسمى المعادلة (1) معادلة لابلاس ويمكن كتابتها

$$\nabla^2 h=0$$

حيث ان

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

مرافقة :-

اذا كانت $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ دالة تحليلية في المنطقة D فان الدالتين u, v توافقيتان في D

البرهان :-

بما ان f دالة تحليلية فان معادلتي كوشي ريمان تتحققان

$$u_x=v_y \quad , \quad u_y=-v_x$$

لكل $z \in D$ اي ان

الان نستنتج من استمرارية المشتقات الجزئية

$$u_{xy}=u_{yx} \quad , \quad v_{xy}=v_{yx} \quad \text{---} (2)$$

باستعمال معادلتي كوشي نحصل على

$u_{xx} = v_{yx}$ ، $u_{yy} = -v_{xy}$ ... (b)

بجمع المعادلتين (a) ، (b) نحصل على

$u_{xx} + u_{yy} = 0$

وبجمع قيم ZCP

$v_{xx} + v_{yy} = 0$

وبنفس العلاقة

مثال:-

اثبت ان $f(x,y) = e^x \cos y$ توافقية

البرهان:-

$f_x = e^x \cos y$ ، $f_{xx} = e^x \cos y$

$f_y = -e^x \sin y$ ، $f_{yy} = -e^x \cos y$

$\therefore f_{xx} + f_{yy} = e^x \cos y - e^x \cos y = 0$

$\therefore$ المعادلة تحقق معادلة لابلاس

من الواضح ان استعمال الجزئية الاولى والثانية للدالة f مستمرة لانها تركيب دالتين مستمرتين

$\therefore$ f دالة توافقية

المرافق التوافقي harmonic Conjugate

إذا كانت الدالتان $u(x,y)$ ، $v(x,y)$ توافقيتين في المجال D بحيث أن $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ دالة تحليلية فإن الدالة v تسمى المرافق التوافقي للدالة u

مثال:- جد مرافقاً توافقياً $v(x,y)$ للدالة $u(x,y) = e^x \cos y$

الحل:- لقد اخترنا في المثال السابق بأن u دالة توافقية باستعمال معادلتي كوشي ريمان

$$u_x = e^x \cos y = v_y$$

$$\therefore v = \int v_y \, dy + Q(x) = \int e^x \cos y \, dy + Q(x)$$

$$= e^x \int \cos y \, dy + Q(x) \quad \text{نكامل بالنسبة لـ } y$$

$$v = e^x \sin y + Q(x)$$

حيث $Q(x)$ دالة اختيارية تعتمد على x فقط وقابلة للاشتقاق

نأخذ المشتقة الجزئية بالنسبة لـ x وعليه

$v_x = -u_y$ ينتج

$V_x = e^x \sin y + Q'(x) = -U_y = -(e^x(-\sin y))$

$e^x \sin y + Q'(x) = e^x \sin y$

$\therefore Q'(x) = 0 \Rightarrow Q(x) = C$

حيث C ثابت اختياري

$V = e^x \sin y + C$ الرافق التوافقي هو

$\therefore f(z) = e^x \cos y + i(e^x \sin y + C)$

معادلة لابلاس بالصيغة القطبية:-

برهنة: المعادلة $U_{xx} + U_{yy} = 0$ تكافئ $r^2 U_{rr} + r U_r + U_{\theta\theta} = 0$

البرهان:-

من معادلتي كوشي ريمان بالصيغة القطبية

$$rU_r = V_\theta \quad -①$$

$$-rV_r = U_\theta \quad -②$$

نشتق ① جزئياً بالنسبة لـ r فنحصل على

$$rU_{rr} + U_r = V_{\theta r}$$

نشتق ② جزئياً بالنسبة لـ θ فنحصل على

$$-2V_{r\theta} = U_{\theta\theta}$$

بالتعويض في $V_{r\theta} = V_{\theta r}$ نحصل على

$$2U_{rr} + U_r = -\frac{1}{2}U_{\theta\theta}$$

$$\therefore r^2U_{rr} + 2rU_r + U_{\theta\theta} = 0$$

وبنفس الطريقة نثبت معادلة كوشي ريمان بالصيغة القطبية بالنسبة لـ θ ثم بالنسبة لـ r نحصل على

$$r^2V_{rr} + 2rV_r + V_{\theta\theta} = 0$$

المحاضرة الخامسة

Fifth Lecture

الفصل الثالث

الدوال المتعددة الاولية

الدالة الأسية: الدالة f المعرفة على كل الأعداد المركبة z حيث $z=x+iy$ بالصيغة

$$f(z)=e^{x}\cos y+i e^{x}\sin y$$

حيث أن y بمقياس التقدير الدائري

$$f(z)=e^{z}=e^{x}(\cos y+i\sin y)$$

اذا كانت $y=0$ تصبح الدالة دالة حقيقية

$$f(z)=e^{x}$$

واذا كانت $x=0$ تصبح صيغة اويلر

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y$$

بعض صفات الدالة الأسية

١. القيمة المطلقة للدالة الاسية f

$$|e^{z}|=e^{x}$$

$$|e^{z}|=e^{x}\,|\cos y+i\sin y|=e^{x}(\cos^2 y+\sin^2 y)^{1/2}=e^{x}$$

٢. زاوية الدالة الاسية هي $\arg(e^{z})=y+2k\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,\dots$

٣. الدالة الاسية $e^{z}\neq 0$ لاي قيمة حقيقية او مركبة z

٤. الدالة الاسية دورية بمقدار $2\pi i$ اي ان $\cos y-\sin y$ دوريتها بمقدار 2π

$$e^{z+2k\pi i}=e^{z}\cdot e^{2k\pi i}=e^{z}\{\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi\}$$

$$=e^{z}(1+i\cdot 0)=e^{z},\ k=0,\pm1,\pm2,\dots$$

٥- الدالة الأسية تحليلية لأنها تحقق شرطي كوشي ريمان

$e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$, $v = e^x \sin y$, $u = e^x \cos y$

$u_x = v_y = e^x \cos y$, $u_y = -v_x = e^x \sin y$

أن المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى كل من u و v بالنسبة لـ x و y هي دوال مستمرة

$$\frac{d}{dz} e^z = e^z$$

فالدالة e^z هي نفسها e^z كما أن الدالة تحليلية في جميع نقاط المستوي z وبذلك تكون دالة كلية

من أهم الدالة الأسية:-

$e^0 = 1$

$e^z \neq 0$, $|e^z| = e^x$, $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$

$\arg e^z = y + 2k\pi$, $(e^z)^n = e^{nz}$, $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$

$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}$, $\overline{(e^z)} = e^{\bar{z}}$, $e^z = e^{z + 2k\pi}$

مثال :- جد كل z التي يكون $e^z = 1 + i\sqrt{3}$

$|e^z| = e^x = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2 \Rightarrow x = \log 2$

$\tan y = \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow y = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$z = \log 2 + i\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$

مثال : برهن $|e^{2z+i} + e^{iz^2}| \le e^{2x} + e^{-2xy}$

$$= |e^{2x}\{\cos(2y+1) + i\sin(2y+1)\} + e^{-2xy}\{\cos(x^2-y^2) + i\sin(x^2-y^2)\}|$$

$$= |\{e^{2x}\cos(2y+1) + e^{-2xy}\cos(x^2-y^2)\}| + i\{e^{2x}\sin(2y+1) + e^{-2xy}\sin(x^2-y^2)\}|$$

$$= \{e^{4x} + e^{-4xy} + 2e^{2x-2xy}(\cos(2y+1-x^2+y^2))\}^{1/2}$$

$$\le e^{2x} + e^{-2xy}$$

حيث $\cos(2y+1-x^2+y^2) \le 1$ لأن أكبر قيمة لجيب التمام هي 1.

الدالة اللوغاريتمية :- الدالة اللوغاريتمية تعرف بـ

$$w = \log z = \log r + i\arg z$$

حيث z عدد مركب

$\log r = \log|z|$ هو اللوغاريتم الطبيعي لمعيار $|z| = r$

$\arg z = \theta + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \ldots$ و $0 < \theta \le 2\pi$

أي أن دالة اللوغاريتم تعرف متعددة القيم

$$w = \log z = \log r + i\theta \qquad 0 < \theta \le 2\pi, \; k = 0$$

نسمي بالقيمة الاساسية للدالة اللوغاريتمية او الفرع الاساسي
$e^{\log z} = z$ برهن
والقيمة الاساسية للدالة اللوغاريتمية تحقق شرطي ريمان
$\operatorname{Log} z = u + iv = \operatorname{Log} r + i\theta$
$u = \operatorname{Log} r \quad , v = \theta \quad , u_r = \frac{1}{r} v_\theta = \frac{1}{r} \quad , v_r = 0 = \frac{-1}{r} u_\theta$

$$\frac{d}{dz} \operatorname{Log} z = \frac{1}{z}$$

خواص $\log z$ اذا كان w, z اي عددين غير الصفر

1. $\log zw = \log z + \log w$
2. $\log \frac{z}{w} = \log z - \log w$
3. $\log e^z = z + 2k\pi$
4. $e^{\log z} = z$
5. $\log z^{1/k} = \frac{1}{k} \log z$

برهان (1)
$\log zw = \operatorname{Log} zw + i \arg zw$
$= \operatorname{Log}|z| + \operatorname{Log}|w| + i \arg z + i \arg w$
$= \operatorname{Log}|z| + i \arg z + \operatorname{Log}|w| + i \arg w$
$= \log z + \log w$

برهان خاصية (3) نرمز $z = x+iy$

$$\log z = \log|e^x| + i\arg e^z = x + i(y+2k\pi)$$
$$= x+iy+2k\pi i = z+2k\pi i$$

$\log z^n \neq n\log z$ — (A) نلاحظ وبصورة عامة أن

مثال:- $\log i^2 \neq 2\log i$

$$\log i^2 = \log -1 = \log 1 + i(\pi+2k\pi) = i(2k+1)\pi \quad -①$$
$$2\log i = 2\left[\log 1 + i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right] = i(4k+1)\pi \quad -②$$

① ≠ ②

(A) أما بالنسبة للقوى الحقيقية للأعداد الموجبة فتبقى قائمة

مع اشتقاقه أو لا تتحقق

مثال:- اثبت أن $\log(1+i)^2 = 2\log(1+i)$

$$\log(1+i)^2 = \log(1+2i-1) = \log 2i$$
$$\log 2i = \log 2 + i\frac{\pi}{2} \quad -①$$
$$2\log(1+i) = 2\left[\log\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}\right] = \log 2 + i\frac{\pi}{2} \quad -②$$

① ≡ ②

مثال:-

$$\log(-1+i)^4 \neq 4\log(-1+i)$$
$$\log(-1+i)^4 = \log(-2i)^2$$
$$= \log(-4) = \log 4 + i\pi \quad -①$$
$$4\log(-1+i) = 4\left[\log\sqrt{2} + i\frac{3\pi}{4}\right]$$
$$= \log 4 + 3\pi i \quad -②$$

① ≠ ②