University of Mosul
College of Education
For Pure Sciences

محاضرات في مادة ميكانيك الموائع Fluid Mechanics

كلية التربية للعلوم الصرفة/قسم الرياضيات

المرحلة الرابعة

أ . د . علاء عبد الرحيم احمد

م . همسة داود سليم

ميكانيك الموائع

يعد ميكانيك الموائع احد العلوم الهندسية التي تكون اساساً لكل العلوم الهندسية الاخرى وهذا العلم يتفرع الى تخصصات كثيرة مثل الديناميك الهوائية والهندسة البحرية لكية وهندسة السفن وديناميك الطائرات وكذلك يشمل السكون (static) والحركة (Dynamics) ان لزوجة المائع وكثافته خاصيتان اساسيتان للمواد حيث لهما دور اساسي في جريان الماء في القنوات المفتوحة والمغلقة وكذلك في جريان حول الاجسام المغمورة.

١. المائع (Fluid): هي المادة التي تنشأ deforing باستمرار اذا تعرضت لأي جهات قص (قوة / مساحة) (shar stress) $= \frac{F}{A} = \frac{N}{m^2}$ وقوة القص هي مركبة القوة المماسة للسطح وناتج قسمة هذه القوة على مساحة السطح هو متوسط اجهاد القص المؤثر على هذه المساحة.

* خواص المائع:

① الكثافة (ρ): تعرف الكثافة بانها كتلة وحدة الحجوم وحدتها $\rho = \frac{m}{V} = kg/m^3$ Density $\rightarrow ML^{-3}$

② الوزن النوعي (γ): يعرف الوزن النوعي لوزن وحدة الحجوم وحدتها $\frac{N}{m^3}$ spesitic weight $\rightarrow ML^{-2}T^{-2}$

الوزن النوعي = الوزن / الحجم $\gamma = \frac{w}{V}$ (الكتلة × التعجيل / الحجم) $= \frac{kg}{N/m^3}$

③ الكثافة النسبية (S): هي النسبة بين كتلة حجم معين من المادة الى كتلة الكثافة نفسها من المائع النقي وليس لها وحدة وليس لها بعد.

(الكتلة / الحجم) / (كتلة الماء / حجم الماء) $= \frac{1}{\rho}$ m^3/kg

④ اللزوجة (μ): هي مقياس مقاومة المائع الى جهد القص.

Viscosity $\mu = \frac{\tau}{du/dy} = \frac{F/A}{(1)} = \frac{\text{قوة/مساحة}}{\text{التدرج السرعة}}$ $= \frac{\text{قوة}}{\text{مساحة}} \times \frac{\text{مساحة}}{\text{السرعة}}$ $= (\text{الزمن} \times \text{الكتلة}) / (\text{الطول})^2$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

* العلاقة بين المزوجة وجهد القص

لو اقذنا طبقتين من المائع تتحرك احدهما فوق الاخرى وعلى بعد (dy) ولهما سرعتان (v , v+dv) وبما ان الطبقة العليا تتحرك بسرعة اعلى من الطبقة السفلى فأن سحب الطبقة السفلى بسرعتها تقسها بينما تعيق الطبقة السفلى حركة الطبقة العليا وهكذا تتولد سرعة نسبية مقدارها (dv) ويتولد نوع من الاحتكاك الحاصل بين الطبقتين وجد ان القياسات التجريبية ان الجهد الحاصل بينها يتناسب تناسباً طردي مع تغير السرعة بالنسبة للمسافة بين الطبقتين اي ان

$$\tau \propto \frac{dv}{dy}$$

حيث ان τ هو جهد القص

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} \longrightarrow (*)$$

μ هي اللزوجة

dv هي السرعة بين الطبقتين

dy هي المسافة بين الطبقتين

dv/dy الحدار السرعة Velocity Gradient

$$\mu = \frac{\tau}{dv/dy}$$

ان المعادلة (*) تمثل معادلة نيوتن في اللزوجة

واجب / س / ما هي وحدة اللزوجة ؟

(o) اللزوجة الكينماتيكية : هي النسبة اللزوجة الطلقة Kinematic viscosity

$$\eta = \frac{\mu}{\rho}$$

واجب / س / ما هي الوحدة ؟

$$\eta = \frac{\mu}{\rho} = \frac{Kg}{m.sec} \times \frac{m^3}{Kg} = \frac{m^2}{sec}$$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} =$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\text{الزوجة الكفاءة} = \frac{\text{الزوجة}}{\text{الكتلة}} = \frac{\frac{\text{القوة} \times \text{الزمن}}{\text{الطول}^2}}{\frac{\text{الكتلة}}{\text{الطول}^2}}$$

$$\text{القوة} = \text{الكتلة} \times \frac{\text{الطول}}{\text{الزمن}^2}$$

$$\therefore \text{الزوجة الكفاءة} = \frac{\text{الكتلة} \times \frac{\text{الطول}}{\text{الزمن}^2} \times \text{الزمن}}{\frac{\text{الكتلة}}{\text{الطول}^2}}$$

$$= \frac{\frac{\text{الكتلة}}{\text{الزمن} \times \text{الطول}}}{\frac{\text{الكتلة}}{\text{الطول}^2}}$$

$$= \frac{\text{الكتلة}}{\text{الزمن} \times \text{الطول}} \times \frac{\text{الطول}^3}{\text{الكتلة}}$$

$$= \frac{\text{الطول}^2}{\text{الزمن}}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

5. الجريان الطباقي: هذا النوع من الجريان تتحرك جزيئات المائع في خطوط مستقيمه ومتوازية اي ان المائع يتحرك بانزلاق الطبقات ذات سمك متناهي في الصغر بالنسبة الى الطبقات المجاورة وهذا النوع من الجريان له مواصفات المائع المثالي.

6. الجريان المضطرب: في هذا النوع من الجريان تكون حركة الجزيئات غير منتظمة خلال مدة زمنية قصيرة وفي كل نقطة من الجريان تتغير مواصفات المائع (السرعة والضغط...) وكذلك تتغير مركبات السرعة.

7. الجريان احادي البُعد: هو الجريان الذي تعتمد مواصفاته على احداثي واحد فقط عند اي لحظة زمنية مثل جريان المائع في انبوب مستقيم ←
$u = f(x,t)$
$v = f(y,t)$, $w = f(z,t)$

8. الجريان ثنائي البُعد: هو الجريان الذي تعتمد مواصفاته على احداثيين السيني والصادي عند اي لحظة زمنية مثل جريان المائع بين صفيحتين
$u = f(x,w,t)$, $v = g(x,y,t)$

9. الجريان ثلاثي البُعد: هو الجريان الذي تعتمد مواصفاته على ثلاث احداثيات فضائي لحظة زمنية وهو (x,y,z).
$u = f(x,y,z,t)$, $w = h(x,y,z,t)$
$v = g(x,y,z,t)$

10. المائع المثالي: مثل هذا المائع يُفترض ان لزوجته ν لا توجد له.

11. المائع الحقيقي: هو المائع الذي يمتلك لزوجة تولد اجهادات قص بين جسيمات المائع المتجاورة عند حركتها.

الممسوحه ضوئيا بـ CamScanner

١٢. الموائع النيوتونية: هي الموائع التي تملك لزوجة.

١٣. الموائع الغير نيوتونية: هي الموائع التي لا تملك لزوجة.

١٤. المائع المضغوط: هو المائع القابل للانضغاط (كثافة تتغير)

١٥. الموائع الغير قابلة للضغط: هو المائع الغير قابل للانضغاط (كثافة تبقى ثابتة)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

المحاضرة الثانية

* الشد السطحي Surface Tension *

تتجاذب جزيئات السائل فيما بينها بقوة تسمى قوة التماسك وتسمى هذه القوة بمقاومة السائل لاتجاهات الشد وعمال ايقاف قوة التلامس التي تحدث بين سائلين غير قابلين للامتزاج (الزيت والماء) او بين سائل وسطح الصلب للوعاء الذي يحوي السائل صفة ان السطح الفاصل يمثل غشاء له قدرة مقاومة الشد وتسمى هذه الظاهرة بالشد السطحي.

* الشد السطحي يعتمد على قوة التماسك والتلاصق فإنه بزيادة درجة الحرارة يقل من هذه القوة ولهذا يقل مقدار الشد السطحي (علاقة طردية)

- يمكن إهمال القوة الناتجة عن الشد السطحي لمعظم السوائل لصغر نسبة عدا الحالات التالية..

١. قطرة drop
٢. فقاعة Bubble
٣. نفاثة Jet

- يعمل الشد السطحي على زيادة الضغط داخل القطرة نسبة الى الضغط الخارجي

- ليكن لدينا قطرة سائل قطرها (d) والضغط داخل القطرة (p) من توازن القوة ويمكن ايجاد الضغط داخل القطرة وبالشكل التالي

مقاومة الشد السطحي = قوة القطرة

* حجم *

المحيط * الشد السطحي = الضغط * المساحة

$$A \times P = \sigma \times C$$

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 \times \pi \times p = \sigma \times d \times \pi$$

$$\frac{d^2}{4} \times \pi \times p = \sigma \times d \times \pi$$

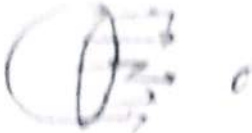
الضغط داخل القطرة $\rightarrow$ $\frac{d}{4} p = \sigma \rightarrow p = 4 \frac{\sigma}{d}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

①

water droplet

pressure force



surface tension

water droplet

---

① Pressure force = pressure × area = $P \times A = P \times \left(\frac{d}{2}\right)^2 \times \pi = P\frac{\pi}{4}d^2$

② Surface tension force = surface tension × length = $\sigma \times \pi d$

③ In all soap bubbles there are two surfaces, so:

$$P\frac{\pi}{4}d^2 = \sigma \pi d \Rightarrow \boxed{P = \frac{4\sigma}{d}}$$

② Soap bubble

Therefore:

$$P\frac{\pi}{4}d^2 = 2\sigma\pi d \Rightarrow \boxed{P = \frac{8\sigma}{d}}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

اما في حالة الضغط داخل الفقاعة التي تتكون من سطحين بينين (غشائيين فائقة يساوي $P = 8\frac{\sigma}{d}$

مثال/ قطرة سائل بقطر (4cm) وضغط داخلي (13Pa) احسب الشد السطحي للسائل؟

$P = \frac{4\sigma}{d} \rightarrow \sigma = \frac{1}{4} Pd$

$d = 4cm$

$d = \frac{4}{100} = 0.04\ m$

$P = 13\ N/m^2 (Pa)$

$\sigma = \frac{1}{4}(13)(0.04)$

$= 0.13\ N/m$

* السرعة والتعجيل *

1. خط الانسياب: هو الخط وهو المماس المرسوم لأي نقطة تحدد اتجاه السرعة في تلك النقطة.

2. انبوب الانسياب: هو مجموعة من خطوط الانسياب المحتوية حول محيط مغلقة.

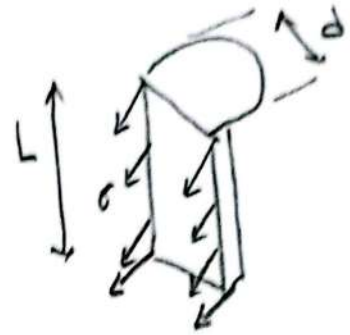
- يعرف كل من السرعة والتعجيل كريان اعتمادي البعد عن مصدر خط الانسياب كركة الجزيئة او الجسم في ميكانيكا الهندسة.

- فلو اخذنا نقطة o كنقطة اصل و s المسافة التي تقطعها الجزيئة عن مصدر الانسياب في اتجاه الجريان في زمن dt فان الجزيئة تقطع مسافة ds وعليه فان السرعة تساوي

$\text{السرعة} = \frac{\text{التغير في المسافة}}{\text{التغير في الزمن}} \rightarrow \frac{ds}{dt}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(3) A liquid jet انقاد



قوة الضغط = $p \times L \times d$? لماذا

قوة الشد = $\sigma \times 2L$

قوة الضغط = قوة الشد

$p \times L \times d = \sigma \times 2L \Rightarrow \boxed{p = \frac{2\sigma}{d}}$

مثال: اذا كانت قوة الشد السطحي بين الماء والهواء هو 0.069 N/m ، المطلوب نحسب الضغط بين داخل وخارج فقاعة الهواء الصابون نصف قطرها 0.009 mm ؟

H.W ✓

Ex:- If the surface tension between water and air is 0.069 N/m. What is the pressure difference inside and outside the air bubble whose diameter is 0.009 mm?

H.W

Ex:- Diameter soap bubble (62.5) mm. and internal pressure 20 N/m². Calculate the surface tension of the soap film.

H.W

Ex. Calculate the specific gravity, the density and specific density of liquid of the same volume 6 m³ and weight 44 KN.?

H.W

Ex. The velocity distribution of flow over a plate is parabolic with vertex 30 cm from the plate, where the velocity is 180 cm/s.. If the viscosity of the fluid is 0.9 (N.s)/m², find the velocity gradients and shear stress at distances of 0.15 cm and 30 cm from the plate.?

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

* الوحدات والابعاد

* وحدات اساسية

1. Kg الكيلوغرام → mass → M
2. m متر → Lengt → L
3. S, sec ثانية → time → T
4. K كلفن → tem → t

- مقدمة -

* يعد قياس المقدمات الفيزيائية من الامور المهمة في علم الهندسة حيث ان هنالك وحدات مختلفة حسب الانظمة ولكن وحدات متفق عليها عالمياً للتعبير عن كل كمية فيزيائية ليست بالاسم فقط بل بالرمز ايضاً ويسمى هذا النظام نظام الوحدات الدولي (ST)

* يقاس كم من هذه الكميات بالوحدات الاساسية بينما يقاس كم اخر من الكميات بوحدات مشتقة من الوحدات الاساسية كما موضح في الجدول التالي ...

رياض

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الكمية	الوحدة	الرمز	البعد	
الكتلة	كغم	Kg	M	
الطول	متر	m	L	
الزمن	ثانية	s	T	
درجة الحرارة	كلفن	K	t	$Kg.\frac{m}{s^2}$ ←
القوة F	نيوتن	N	MLT^{-2}	$M.\frac{L}{T^2}$ ←
الضغط P	باسكال	Pa	$ML^{-1}T^{-2}$	الضغط = القوة / المساحة ←
جهد القص τ	باسكال	Pa	$ML^{-1}T^{-2}$	
الشغل W	جول	J	$ML^{-1}T^{-2}$	
السرعة V	متر/ثانية	V	LT^{-1}	
التعجيل a	m/s^2	a	LT^{-2}	
اللزوجة μ	$\frac{N}{m^2}.s$		$ML^{-1}T^{-1}$	
الوزن النوعي γ	N/m^3		$ML^{-2}T^{-2}$	
الكثافة ρ	Kg/m^3		ML^{-3}	
اللزوجة الكينماتيكية	m^2/s		L^2T^{-1}	
الشد السطحي σ	N/m		MT^{-2}	
المساحة A	m^2		L^2	
التصريف Q	m^3/s		L^3T^{-1}	

الوحدات الأساسية

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

هناك/ عدة وحدات لمعامل اللزوجة

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} \rightarrow \mu = \frac{\tau}{\frac{dv}{dy}}$$

$$\rightarrow \tau = \frac{dv}{dy} = \frac{N}{m^2} \cdot \frac{m}{s}$$

$$\rightarrow \frac{N}{m^2} \cdot m \cdot \frac{s}{m} = \frac{N}{m^2} \cdot s$$

$\rightarrow$ Pa.S = 10 Posies وحدة اللزوجة المطلقة

$$\mu = \frac{N}{m^2} \cdot s = N \cdot \frac{1}{m^2} \cdot s$$

$$= Kg \cdot \frac{m}{s^2} \cdot \frac{1}{m^2} \cdot s$$

$$= Kg \cdot \frac{1}{ms}$$

$$= M \cdot \frac{1}{LT}$$

$$= M L^{-1} T^{-1} \rightarrow \text{البعد}$$

اللزوجة الكينماتيكية: هي النسبة بين اللزوجة المطلقة والكثافة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ٤/ اشتق وحدات ما بعاد اللزوجة الكيماتيكية

$$\eta = \frac{\mu}{\rho}$$

$$\mu \cdot \frac{1}{\rho} \rightarrow \frac{N}{m^2} \cdot s \cdot \frac{1}{\frac{Kg}{m^3}}$$

$$\rightarrow N \cdot \frac{s}{m^2} \cdot \frac{m^3}{Kg}$$

$$Kg \cdot \frac{m}{s^2} \cdot \frac{s}{m^2} \cdot \frac{m^3}{Kg}$$

$$= \frac{m^2}{s} \rightarrow \text{الوحدة}$$

الحل

$$\eta = \frac{\mu}{\rho} = \frac{M L^{-1} T^{-1}}{\frac{M}{L^3}}$$

$$M L^{-1} T^{-1} \cdot \frac{L^3}{M} \rightarrow L^2 T^{-1} \rightarrow \text{البعد}$$

ونقاس احياناً بوحدات تسمى stokes

اي $m^2/s = 10^4$ stokes

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

دالة الانسياب Stream Function (ψ)

بالاضافة الى دالة الجهد يوجد دالة اخرى عن طريقها يمكن ايجاد مركبات السرعة تسمى هذه الدالة بـ دالة الانسياب ويرمز لها بالرمز (ψ)

من المعروف ان خطوط الانسياب باتجاه الاحداثيين x,y تعطى بالشكل التالي

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \rightarrow v_x dy - v_y dx = 0 \quad \text{---} (1)$$

من معادلة الاستمرارية فان

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

$$\psi = \psi(x,y)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial v_y}{\partial y}$$

اذن المعادلة (1) هي معادلة تامة

لنفرض ان $d\psi = v_x dy - v_y dx$ --- (2)

$d\psi = 0 \rightarrow \psi = c$ [تمثل معادلة خط انسياب]

حسب التفاضل الكلي فان $d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy$ --- (3)

بمقارنة المعادلة (2) مع المعادلة (3) نحصل على

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

وهي تمثل العلاقة التي تربط بين دالة الانسياب ومركبات السرعة في الاحداثيات الكارتيزية.

اما في الاحداثيات القطبية فان العلاقة بين دالة الانسياب ومركبات السرعة تعطى بالشكل التالي

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال/ هل ان دالة الانسياب تحقق معادلة الاستمرارية

الحل/ من معادلة الاستمرارية في الاحداثيات الثنائي البعد فان

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad \text{---} \quad (*)$$

بما ان $v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ ، $v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ ..

بالتعويض في معادلة الاستمرارية (*)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) \stackrel{?}{=} 0$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} \stackrel{?}{=} 0$$

$$0 = 0$$

اذن معادلة الاستمرارية متحققة

ملاحظة: العلاقة بين دالة الجهد ودالة الانسياب في الاحداثيات القطبية

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad , \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال/ جد دالة الانسياب لجريان الموائع التالية

$\vec{v} = iKx - jKy$

الحل/ بالمقارنة $\vec{v} = iVx + jVy$

$Vx = Kx \quad , \quad Vy = -Ky$

$Vx = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad , \quad Vy = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$

نكامل بالنسبة لـ y $\rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial y} = Kx \rightarrow \int \partial\psi = \int Kx\,dy$

$\psi(x,y) = Kxy + f(x) \quad \ldots *$ ← مجهولة

$\frac{\partial \psi}{\partial x} = Ky \cdot 1 + f'(x)\frac{\partial x}{\partial x} = Vy = -(-Ky)$

$\int f'(x) = \int 0 \rightarrow f(x) = c$

بالتعويض في (*)

$\psi(x,y) = Kxy + c$

* دالة الانسياب

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال/ في الجريان المنتظم تعرف حالة الانسياب $\psi = -ay$ (a ثابت) جد قيمة سرعة الجريان ؟

الحل/

١- نوجد قيمة كل من u, v من معادلات خطوط الانسياب

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad , \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$u = -a \qquad v = 0$$

$$\vec{V} = ui + vj = -ai$$ ← اذا لم يذكر كلمة قيمة نقف هنا

اما اذا ذكر كلمة قيمة نكمل

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \rightarrow u\,dy - v\,dx = 0$$

$$-a\,dy = 0$$ تكامل

$$\frac{\partial x}{-a} \quad , \quad \frac{\partial y}{0}$$

$$-ay = c \rightarrow y = \frac{-c}{a}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

In case of two-dimensional flow, the stream function may be defined mathematically as

$\psi = f(x, y, t)$ ...for *unsteady* flow, and

$\psi = f(x, y)$ ... for *steady* flow.

such that:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned}\right\} \quad \ldots(5.38)$$

For two-dimensional flow the continuity equation is

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Substituting the values of u and v from eqn. (5.38), we get:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0$$

Hence, existence of ψ means a possible case of fluid flow.

— The flow may be 'rotational' or 'irrotational'.

The rotational component ω_z is given by:

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Substituting the values of u and v from eqn. (5.38), we get:

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)\right]$$

or,

$$\omega_z = -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right] \quad \ldots(5.39)$$

This equation is known as **Poisson's equation.** For an *irrotational flow*, since $\omega_z = 0$, eqn.(5.39) becomes:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad i.e., \quad \Delta^2 \psi = 0$$

which is the ***Laplace equation in*** ψ.

In the *polar co-ordinates*:

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \; v_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

— Let $\psi(x, y)$ represent the stream line L (See Fig. 5.21). The $(\psi + d\psi)$ represents the adjacent stream line M. The velocity vector V perpendicular to the line AB has components u and v in the direction of X-axis and Y-axis respectively. From continuity consideration, we have:

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

أنبوب السيال
Stream Tube

مجموعة من خطوط السيال تحيط بمقطع صغير

خطوط السيال
Stream lines

هي خطوط وهمية مرسومة في مجال السريان بحيث يكون المماس عند أي نقطة عليها يعين اتجاه السرعة في تلك النقطة عند زمن معين

الخواص
① تتقاطع خطوط السيال
② خطوط السيال تكون متباعدة في المناطق التي تقل فيها السرعة وتكون متقاربة في المناطق التي تزداد فيها السرعة
③ لا يمكن أن تكون خطوط السيال على شكل خطوط مغلقة
④ تتقارب خطوط السيال في السريان الدوراني وتتباعد في السريان الغير دوراني

مسار الجسيم
Path line

هي المسار الذي يسلكه أي جسيم معين خلال زمن معين

معادلة المسار للجسيم الذي يشغل الموضع r_0 عند الزمن t_0

$$\vec{r} = \vec{r}(r_0, t)$$

∴ سرعة الجسيم

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{V} = iu + jv + kw$$

$$\vec{r} = ix + jy + kz$$

↓

$$iu + jv + kw = \frac{d}{dt}(ix + jy + kz)$$

↓

$$iu + jv + kw = i\frac{dx}{dt} + j\frac{dy}{dt} + k\frac{dz}{dt}$$

$$u = \frac{dx}{dt}$$

$$v = \frac{dy}{dt}$$

$$w = \frac{dz}{dt}$$

خطوط الزمن
Time lines

هي مجموعة من النقاط التي تحدد موضع جسيمات مختلفة عند زمن معين

معادلة خط الزمن عند t_0

$$\vec{r} = \vec{r}(r_0, t_0)$$

∴ سرعة الجسيم

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{V} = iu + jv + kw$$

$$\vec{r} = ix + jy + kz$$

↓

$$iu + jv + kw = \frac{d}{dt}(ix + jy + kz)$$

↓

$$iu + jv + kw = i\frac{dx}{dt} + j\frac{dy}{dt} + k\frac{dz}{dt}$$

$$u = \frac{dx}{dt}$$

$$v = \frac{dy}{dt}$$

$$w = \frac{dz}{dt}$$

خطوط الزمن
Time lines

معادلة خط الزمن

$$\vec{V} = iu + jv + kw$$

متجه الموقع

$$\vec{r} = idx + jdy + kdz$$

$$\vec{V} \times d\vec{r} = 0$$

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

دالة الجهد
Potential flun.

$$\vec{V} = -\nabla\phi$$

$$iu + jv + kw = -i\frac{\partial\phi}{\partial x} - j\frac{\partial\phi}{\partial y} - k\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

$$u = -\frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial\phi}{\partial y}, \quad w = -\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

العلاقة بين دالة الجهد ومركبات السرعة

$$V_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r}, \quad V_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}$$

إذا كانت دالة الجهد ϕ تتغير تبعاً لتغير x, y, z فإن السرعة تتغير تبعاً لتغير x, y, z

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال/ في الجريان المنتظم فان دالة الانسياب لها الصيغة

$\psi = -vy$ (ثابت v)

جد ① متجهة سرعة الجريان ؟ $\vec{V} = ?$

② معادلة خط الانسياب ؟

الحل/

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad , \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$v_x = -v \quad , \quad v_y = 0$$

$$\therefore \vec{V} = -iv$$

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \rightarrow \frac{dx}{-v} = \frac{dy}{0}$$

$$\int v\,dy = \int 0 \rightarrow -vy = c = \psi$$ [معادلة خط الانسياب]

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

By substituting the values of u, v and w in term of ϕ from eqn. (5.35), we get:

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \phi}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y}\right]$$

$$\omega_y = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z}\right]$$

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[-\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x}\right]$$

However, if ϕ is a continuous function then,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y}; \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z}; \text{ and } \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x}$$

$\therefore$ $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$ i.e. the flow is *irrotational.*

Thus if *velocity potential* (ϕ) *satisfies the Laplace equation, it represents the possible steady, incompressible, irrotational flow.* Often an *irrotational flow is known as potential flow.*

Equipotential line:

An *equipotential line is one along which velocity potential* ϕ *is constant.*

i.e. For equipotential line, ϕ = constant.

$\therefore$ $d\phi = 0$

But, $\phi = f(x, y)$ for steady flow.

$\therefore$ $$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy$$

But, $$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -u \text{ and } \frac{\partial \phi}{\partial y} = -v$$

$\therefore$ $$d\phi = -udx - vdy = -(udx + vdy)$$

For equipotential line, $d\phi = 0$

or, $$-(udx + vdy) = 0$$

or, $$(udx + vdy) = 0$$

or, $$\frac{dy}{dx} = -\frac{u}{v} \quad \ldots(5.37)$$

where, $\frac{dy}{dx}$ = slope of equipotential line.

5.10.2. Stream Function

The **stream function** is *defined as a function of space and time, such that its partial derivative with respect to any direction gives the velocity component at right angles to this direction.* It is denoted by ψ (psi).

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}(0 - 3xy^2z) = -\frac{3}{2}xy^2z \text{ (Ans.)}$$

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) = \frac{1}{2}\left(z^2 - \frac{3y^2z^2}{2} + 2y^2z\right) \text{ (Ans.)}$$

$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}(xy^3 - 0) = \frac{1}{2}xy^3 \text{ (Ans.)}$$

5.10. VELOCITY POTENTIAL AND STREAM FUNCTION

5.10.1. Velocity Potential

The velocity potential *is defined as a scalar function of space and time such that its negative derivative with respect to any direction gives the fluid velocity in that direction.* It is denoted by ϕ (phi). Thus mathematically the velocity potential is defined as:

$$\phi = f(x, y, z, t) \quad \text{...for } \textit{unsteady} \text{ flow.}$$

and,

$$\phi = f(x, y, z) \quad \text{...for } \textit{steady} \text{ flow;}$$

such that:

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} \\ v &= -\frac{\partial \phi}{\partial y} \\ w &= -\frac{\partial \phi}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad \text{...(5.35)}$$

where, u, v and w are the components of velocity in the x, y and z directions respectively.

The *negative sign* signifies that ϕ *decreases with an increase in the values of* x, y *and* z. In other words it indicates that the *flow is always in the direction of decreasing* ϕ.

For *an incompressible steady flow* the continuity equation is given by:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

By substituting the values of u, v and w in terms of ϕ from eqn. 5.35, we get:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial \phi}{\partial z}\right) = 0$$

$$\frac{d^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{...(5.36)}$$

This equation is known as **Laplace equation.**

Thus *any function* ϕ *that satisfies the Laplace equation will correspond to some case of fluid flow.*

The *rotational components* are given by [eqn. (5.30)]:

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

* المشتقة المادية (التابعة) Materid Derivative

هي المشتقة التي تتبع حركة الجسيم وتسمى كذلك بالمشتقة التابعة اما رياضياً فانها تعرف بالشكل التالي :-

$$\frac{D}{Dt} = V_x \frac{\partial}{\partial x} + V_y \frac{\partial}{\partial y} + V_z \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t}$$

ان التعجيل الذي يتبع الجسيم لمائع هو

$$a = \boxed{\frac{DV}{Dt}} = V_x \frac{\partial V}{\partial x} + V_y \frac{\partial V}{\partial y} + V_z \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial t}$$

مثال / متبعاً لحركة جسيم مائع ما , اوجد المركبة y لتعجيل الجسيم الذي سرعته معطاه بالصيغة

$$\vec{V} = (3z - x^2)i + yt^2 j + xz^2 K$$

عند النقطة $(1, 1, 2, 2)$

(x, y, z, t)

الحل /

$$\vec{V} = i V_x + j V_y + K V_z$$

$$V_x = 3z - x^2 \ , \ V_y = yt^2 \ , \ V_z = xz^2$$

$$a_y = \frac{DV_y}{Dt} = V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_y}{\partial t}$$

$$= (3z - x^2)(0) + (yt^2)(t^2) + xz^2(0) + 2yt$$

$$= yt^4 + 2yt$$

At the Point $(1, 1, 2, 2)$

$$a_y = (1)(2)^4 + 2(1)(2) = 20 \ m/s^2$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

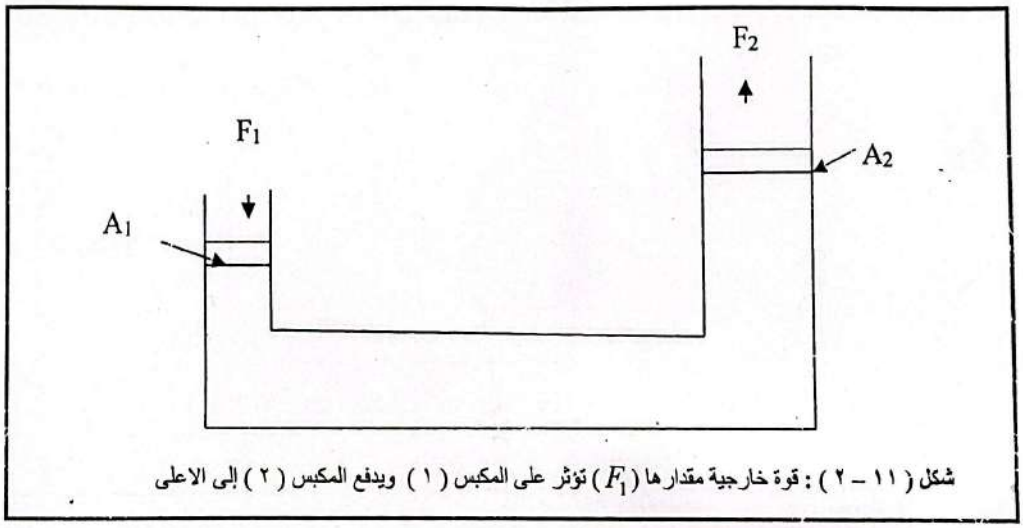
١١-٤ قاعدة باسكال (Pascal Law)

يستطيع السائل أن ينقل الضغط الخارجي المسلط عليه إلى جميع أجزائه وقد تم إستغلال هذه الخاصية في عمل الأجهزة التي تعمل بالضغط مثل المكابس الهيدروليكية .

ينص قاعدة باسكال على أنه (إذا سلّط ضغط على سائل محصور فإن الضغط ينتقل إلى كل نقاط السائل بصورة متساوية بشرط أن يكون السائل ساكنا) .

فإذا فرضنا أن (A_1) و (A_2) تمثلان مساحتي مقطع المكبسين عندما تؤثر قوة خارجية مقدارها (F_1) على المكبس (١) فإن المكبس (٢) سوف يدفع إلى الاعلى ما لم تؤثر عليه قوة مقدارها (F_2) ، وكما مبيّن في الشكل (١١ – ٢) ، وتساوي الضغط في السائل ويعطى كالأتي :

$$\frac{F_1}{A_1}=\frac{F_2}{A_2}\Rightarrow F_2=\frac{A_2}{A_1}F_1 \ldots (5-11)$$



شكل (١١ – ٢) : قوة خارجية مقدارها (F_1) تؤثر على المكبس (١) ويدفع المكبس (٢) إلى الاعلى

مثال : في الشكل (١١ – ٢) ، إذا كانت $A_1 = 5cm^2$ () و $A_2 = 200cm^2$ () ، إذا أثرت قوة مقدارها ($250N$) على المكبس الصغير ، إحسب القوة على المكبس الكبير ؟

الحل : -

من المعادلة (١١ – ٥) :

$$\frac{F_1}{A_1}=\frac{F_2}{A_2}\Rightarrow F_2=\frac{A_2}{A_1}F_1 \ldots (5-11)$$

$$\Rightarrow F_2=(\frac{200}{5})(250N)$$

$$\therefore F_2=1000N=10kN$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال : إذا علمت أن الضغط الجوي يساوي تقريبا ($1x10^5 Pa$) ، فما مقدار القوة التي يؤثر بها الهواء الساكن في غرفة على زجاج النافذة الداخلي إذا كانت مساحته ($40cmx80cm$) ؟

الحل : -

من المعادلة (١١ – ٣) :

$$P = \frac{F}{A} N/m^2 ...(3-11)$$

$$F = PA = (1x10^5 N/m^2)(0.40x0.80m^2)$$

$$\boxed{F = 3.2x10^4 N}$$

مثال : إحسب الضغط الكلي الواقع على السطح الخارجي لغواصة تغوص ($120m$) ، إذا علمت أن كثافة ماء البحر تساوي ($1.03g/cm^3$) ؟

الحل : -

من المعادلة (١١ – ٤) :

الضغط الكلي ← الضغط الجوي ↓ الضغط الناتج عن وزن السائل ↓

$$P_1 = P_a + \rho gh ...(4-11)$$

الضغط الكلي ← الضغط الجوي ↓ الضغط الناتج عن وزن السائل ↓

$$P_1 = (1.01x10^5 N/m^2) + (1030kg/m^3)(9.8m/\sec^2)(120m)$$

$$\boxed{P_1 = 13.1x10^5 N/m^2}$$

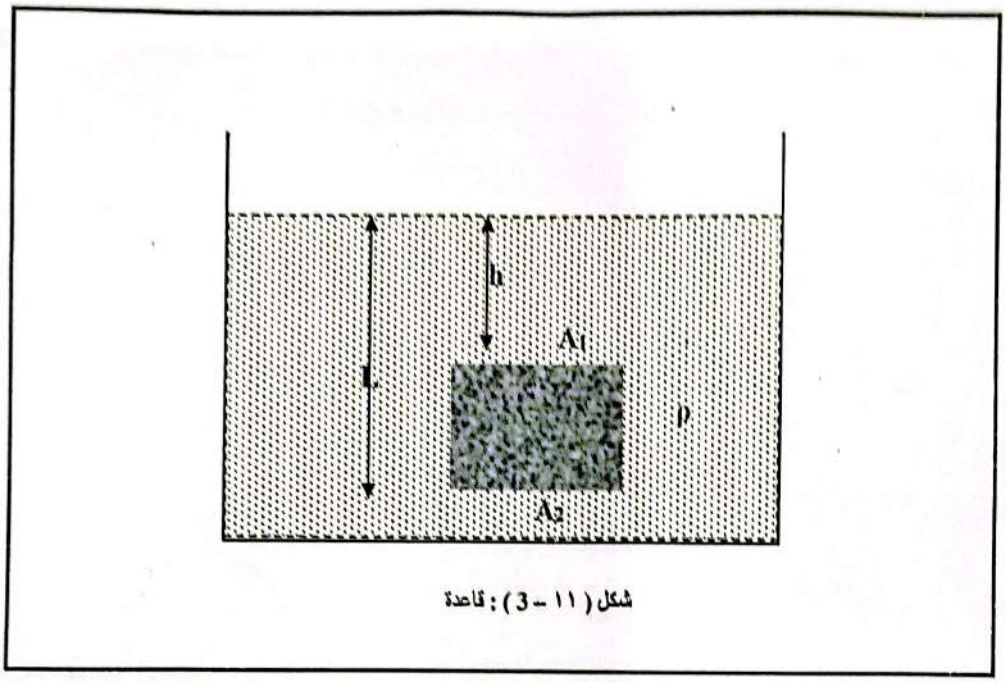
إعداد : د. جودت هدايت محمد

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

١١-٥ قاعدة ارخميدس (أرشميدس) (Archimedes Law)

إذا غطست الأجسام في السوائل فإنها تبدو أقل وزنا فيها مما هي عليه في الفراغ فضلا عن أن كثيرا من الأجسام تطفو على السوائل .

إن ظواهر الطفو الكلي أو الجزئي وظاهرة فقدان جزء من الوزن تعكس حقيقة أن هناك قوة متجهة نحو الأعلى تساعد على حمل الجسم المغمور في السائل ، وتنص قاعدة أرخميدس على أنه (إذا غمر جسم كليا أو جزئيا في سائل فإنه يفقد من وزنه بمقدار يساوي وزن السائل الذي أزاحه الجسم ، إن الفقدان في السوائل سببه قوة دفع السائل للجسم إلى الأعلى والتي تسمى بقوة الطفو ($BuoyantForce(B.F)$) ، وكما مبين في الشكل (١١ - ٣) :



شكل (١١ - 3) : قاعدة

$$BuoyantForce(B.F) = P_2A - P_1A = (P_2 - P_1)A$$

$$P_1A = \rho gAh$$

$$P_2A = \rho gA(h+L)$$

$$B.F = \rho gA(h+L) - \rho gAh = \rho gLA = \rho gV$$

وحيث أن الكتلة (m) تساوى الحجم في الكثافة ($V.\rho$) :

$$\boxed{B.F = mg ...(6-11)}$$

إذن قوة دفع السائل نحو الأعلى (قوة الطفو) يساوى وزن السائل المزاح وهذا يتفق مع قاعدة أرشميدس.

عندما تكون كثافة الجسم مساوية لكثافة السائل فإن محصلة القوة المؤثرة على الجسم تساوي صفرا ، وبناءا على ذلك فإن الجسم سيغطس إذا كان وزنه أكبر من قوة الطفو بينما يطفو الجسم إذا كان وزنه أقل من قوة دفع السائل له إلى الأعلى .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال : قطعة من سبيكة كتلتها في الهواء ($86g$) وكتلتها عندما تكون مغمورة في الماء تساوي ($73g$) ، إحسب :

١ـ حجم السبيكة ؟

٢ـ كثافة السبيكة ؟

الحل :

١ـ لحساب حجم السبيكة :

قوة الطفو $B.F$ () المؤثرة على قطعة السبيكة المغمورة هي :

$$F = mg$$

$$B.F = (m_{(air)} - m_{(water)})g$$

$$B.F = (0.086 - 0.073)(9.8)$$

$$\boxed{B.F = 0.1274N}$$

وبما أن قوة الطفو ($B.F$) يساوي وزن الماء المزاح ، إذن :

$$B.F = mg ...(6-11)$$

$$B.F = \rho Vg$$

$$0.1274 = (1000)(V)(9.8)$$

$$V = \frac{(0.1274)}{(1000)(9.8)}$$

$$\boxed{\Rightarrow V = 1.3x10^{-5} m^3}$$

وهذا هو أيضا حجم قطعة السبيكة .

٢ـ لحساب كثافة السبيكة :

$$\rho = \frac{m}{V} ...(1-11)$$

$$\rho = \frac{(0.086)}{(1.3x10^{-5})}$$

$$\boxed{\rho = 6.6x10^3 kg/m^3}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

١١-٢-٢ الوزن النوعي (Specific Weight)

يعرّف الوزن النوعي للمادة بأنها النسبة ما بين الكثافة لتلك المادة إلى كثافة الماء ، وهي كمية لا تقترن بوحدة ويرمز لها (w) ويمكن التعبير عنها كالآتي :

$$\boxed{w = \frac{\rho}{\rho_w} ...(2-11)}$$

حيث (ρ) تمثّل كثافة المادة ، بينما (ρ_w) تمثل كثافة الماء وتساوي ($1000 kg/m^3$) .

مثال : إحسب الكثافة ، والوزن النوعي للكازولين إذا كان ($51g$) منه يشغل ($75cm^3$) ، إذا علمت أن كثافة الماء تساوي ($1000 kg/m^3$) ؟

الحل :

من المعادلة (١١ – ١) :

$$\rho = \frac{m}{V} ...(1-11)$$

$$\rho = \frac{0.051 kg}{75x10^{-6} m^3} \boxed{\Rightarrow \rho = 6.8x10^2 kg/m^3}$$

من المعادلة (١١ – ٢) :

$$w = \frac{\rho}{\rho_w} ...(2-11)$$

$$w = \frac{6.8x10^2}{1000} \boxed{\Rightarrow w = 0.68}$$

١١-٣ الضغط (Pressure)

هنالك فرق بين طريقة تأثير قوة على مائع وتأثيرها على صلب ، فالقوة في الجسم الصلب يمكن أن تؤثر على نقطة منفردة وتسندها ولكن القوة يمكن أن تؤثر على سطح مائع محصور ويسندها وأن هذه القوة تتجه دائما في المائع الساكن بزاوية قائمة مع السطح ولا يستطيع المائع الساكن إسناد قوة مماسية حيث أن طبقات المائع تنزلق فوق بعضها عند تسليط قوة مماسية لذا توصف القوة المؤثرة على المائع بتعيين الضغط (P) الذي يعرّف بأنه مقدار القوة العمودية المسلطة على وحدة المساحة من السطح ووحداته (N/m^2) وتسمى باسكال ($Pascal$) وتكتب إختصارا (Pa) ، ويعبّر عنه بالعلاقة :

$$\boxed{P = \frac{F}{A} N/m^2 (Pa) ...(3-11)}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

في حالة كون ضغط المائع المسلط هو ناتج فقط عن وزن عمود السائل (المائع) ولا توجد هنالك قوة خارجية أي أن القوة هي الوزن لعمود السائل الذي إرتفاعه (h) :

$$F = w = mg$$

$$P = \frac{mg}{A} = \frac{\rho Vg}{A} = \frac{\rho Ahg}{A} = \rho gh$$

أي أن إذا كان طول عمود السائل (h) فإن ضغطه يساوي (ρgh) حيث أن ($h = y_2 - y_1$) :

$$P = \rho g(y_2 - y_1) = \rho g \Delta y$$

من الحقائق المألوفة أن الضغط الجوي يقل مع زيادة الإرتفاع أي عند حدوث نقص في طول عمود الهواء ، وأن الضغط في البحيرة أو في المحيط يزداد بإزدياد العمق حيث أن طول عمود الماء يزداد مع زيادة العمق .

$$dP = \rho g dy$$

فإذا قلّ طول عمود المائع بمقدار (dy) فإن الضغط ينخفض بمقدار (dP) :

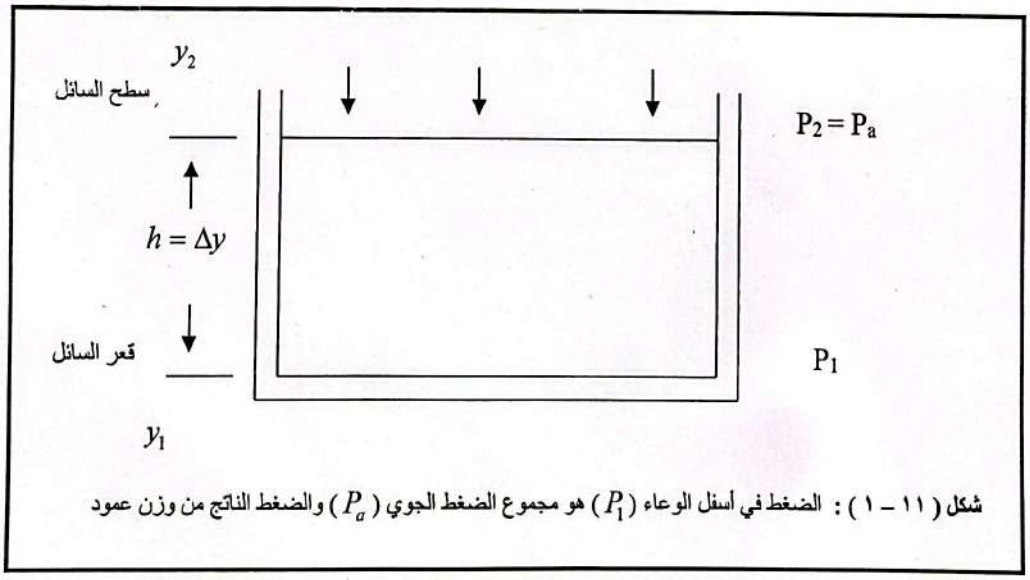
$$dP = -\rho g dy$$

$$P_2 - P_1 = -\rho g(y_2 - y_1)$$

$$P_a - P_1 = -\rho g(y_2 - y_1)$$

$$\boxed{P_1 = P_a + \rho gh ...(4-11)}$$

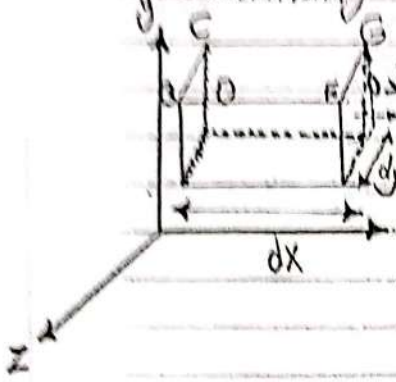
أي أن الضغط في أسفل الوعاء (P_1)هو مجموع الضغط الجوي (P_a) والذي يساوي ($1.01x10^5 N/m^2$) ، والضغط الناتج من وزن عمود السائل ، وكما مبيّن في الشكل (١١ – ١) :



شكل (١١ – ١) : الضغط في أسفل الوعاء (P_1) هو مجموع الضغط الجوي (P_a) والضغط الناتج من وزن عمود

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

معادلة الاستمرارية في الاحداثيات الكارتيزية
Continuity Equation in Cartesian Coordinates



ليكن لدينا عنصر مائع في متوازي أضلاع أبعاده (dx, dy, dz) ولتكن ρ هي كثافة المائع في لحظة معينة u, v, w هي مركبات السرعة باتجاه x, y, z على الترتيب.

- معدل كتلة المائع التي يدخل من الوجه

$$ABCD = \rho \times u(x\text{-direction}) \times \underbrace{ABCD}_{\text{مساحة الوجه}} \quad \cdots (1)$$

إذاً معدل الكتلة التي تخرج من الوجه

$$EFGH = \rho u dy\, dz + \frac{d}{dx}(\rho u dy\, dz)\, dx \quad \cdots (2)$$

وبالتالي يتم الحصول على الكتلة المكتسبة لكل وحدة زمنية بسبب التدفق باتجاه المحور x خلال الفرق بين التدفق الداخل والتدفق الخارج وعليه فإن الكتلة المتراكمة لكل وحدة زمنية بسبب التدفق باتجاه المحور x.

$$\rho u dy dz - \left[\rho u dy dz + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u dy dz)\right] = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho u dy dz dx) \quad \cdots (3)$$

وبنفس الطريقة يمكن الحصول على الكتلة المتراكمة لكل وحدة زمنية بسبب التدفق باتجاه المحورين y, z وكالآتي

$$\frac{\partial}{\partial y}(\rho v dy dz dx) \quad \cdots (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\rho w dy dz dx) \quad \cdots (5)$$

Scanned with CamScanner

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

2023/11/26 .1.

د. علاء عبد الرحيم

معادلة الاستمرارية Continuity Equation

هي معادلة تخص حركة الجريان

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{q}) = 0$$

ρ: كثافة، t: زمن، $\vec{q}$: سرعة (أو تدفق)

$u = V_x$

$v = V_y$

$w = V_z$

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\vec{q} = V = iV_x + jV_y + kV_z$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\rho(iV_x + jV_y + kw)\right) = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}\right] = 0$$

* في حالة الجريان المستقر الزمن $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0$$

* في حالة إذا كان المائع غير قابل للانضغاط (أي الكثافة ثابتة)

$$\rho\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) = 0 \quad , \quad \rho = 0$$

① $\therefore \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$ ثلاثي البعد 3dim

② $\therefore \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = 0$ ثنائي البعد 2dim

حيث إن ① و ② يمثلان معادلة الاستمرارية

Scanned with CamScanner

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

س1 / هل المركبات تحقق معادلة الاستمرار أم لا ؟

A. $U = 2x^2 + 3y$, $V = -2xy + 3y^3 + 3zy$

$$W = \frac{-3}{2}z^2 - 2xz - 6yz$$

ج/ $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$

$\rightarrow 4x + (-2x + 9y^2 + 3z) + (-3z - 2x - 6y)$

$= 4x - 2x + 9y^2 + 3z - 3z - 2x - 6y \stackrel{?}{=} 0$

$9y^2 - 6y \neq 0$

∴ لا تحقق معادلة الاستمرار

B. $U = A\sin xy$, $V = -A\sin xy$

ج/ $Ay\cos xy - Ax\cos xy \stackrel{?}{\neq} 0$

∴ لا تحقق معادلة الاستمرار.

س2 / إذا كان $u = Ae^x$ جد v ؟ و A ثابت

Sol/ أتذكري $u = \frac{\partial u}{\partial x}$ $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

تحويل $Ae^x + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

ضرب الطرفين $Ae^x = -\frac{\partial v}{\partial y}$) * -1

نكامل $-\int Ae^x dy = \int dv$

$v = -Ae^x y + f(x)$] لأن التكامل بالنسبة لـ y تخسيف دالة بالنسبة لـ x [

Scanned with CamScanner

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

وعليه فإن مُحصل الكُتلة المُتراكمة لكُل وحدة زمنية بسبب التدفق باتجاه المحاور الثلاثة

$$-\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \quad \cdots (6)$$

ولكن مُعدل تغير الكُتلة داخل متوازي الأضلاع

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\, dx\, dy\, dz) \quad \cdots (7)$$

ومن المُعادلتين 6 و 7 نحصل على

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0 \quad \cdots (8)$$

تمثل المُعادلة العامة للاستمرارية لثلاث أبعاد وبالإحداثيات الكارتيزية وتنطبق على أي مائع سواء كان قابل للانضغاط أم لا.

وعندما يكون الجريان مُستقر (steady) $\leftarrow \frac{\partial \rho}{\partial t}=0$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0 \quad \cdots (9)$$

وإذا كانت مُعادلة الاستمرارية بالبعدين

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad \text{عندما } w=0$$

وإذا كانت مُعادلة الاستمرارية بالبعد الواحد

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0 \qquad \text{عندما } v, w=0$$

Scanned with CamScanner

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال/ اذا كانت $u = Ae^x$ عبارة عن كتلة v بحيث ان معادلة الاستمرارية تتحقق

$u = Ae^x$

الحل/

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = 0$$

اذن من معادلة الاستمرارية

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = 0$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy}$$

$$-\frac{dv}{dy} = Ae^x$$

$$\int dv = -\int Ae^x dy$$

$$v = -Ae^x y + f(x)$$

اذا كانت $v = Axy$ عبارة عن كتلة u بحيث ان معادلة الاستمرارية تتحقق

$$v = Axy \rightarrow \frac{dv}{dy} = Ax$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{dv}{dy} \rightarrow \frac{du}{dx} = -Ax$$

$$\int du = -\int Ax\,dx \rightarrow u = -\frac{A}{2}x^2 + g(y)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال/ بين فيما اذا كانت مركبات السرعة التالية تحقق معادلة الاستمرارية ام لا ؟

$u = 2x^2 + 3y$

$v = -2xy + 3y^2 + 3zy$

$w = -\frac{3}{2}z^2 - 2xz - 6yz$

الحل/

$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$ (معادلة الاستمرارية)

$u = 2x^2 + 3y$

$\frac{du}{dx} = 4x$

$v = -2xy + 3y^2 + 3zy$

$\frac{dv}{dy} = -2x + 6y + 3z$

$w = -\frac{3}{2}z^2 - 2xz - 6yz$

$\frac{dw}{dz} = -3z - 2x - 6y$

بالتعويض في معادلة الاستمرارية نحصل على

$4x - 2x + 6y + 3z - 3z - 2x - 6y = 0$

∴ المركبات اعلاه تحقق معادلة الاستمرارية

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال/ اذا كانت مركبات السرعة في مائع ثلاثي الابعاد وغير قابل للانضغاط هي كما يلي

$$u = x^2 + y^2 z^2 \quad , \quad v = -(xy + yz + zx)$$

استخدم معادلة الاستمرارية لايجاد المركبة w

الحل/

الصيغة العامة لمعادلة الاستمرارية الثلاثية الابعاد والمائع الغير قابل للانضغاط هي

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0 \quad \cdots\cdots (*)$$

$$u = x^2 + y^2 z^2 \quad , \quad v = -(xy + yz + zx)$$

$$\frac{du}{dx} = 2x \quad , \quad \frac{dv}{dy} = -x - z$$

اذن بالتعويض في معادلة الاستمرارية (*) نحصل على

$$0 = \frac{dw}{dz} + (-x - z) + 2x$$

$$\frac{dw}{dz} = -2x + x + z$$

$$\int dw = \int (-x + z)\, dz$$

$$w = -xz + \frac{1}{2} z^2 + f(x, y)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال / حدد أيه نوع من مركبات السرعة الآتية تحقق معادلة الاستمرارية

① A ثابت

$u = A\sin xy \quad , \quad v = -A\sin xy$

②

$u = 2x^2 + 3y \quad , \quad v = -2xy + 3y^3 + 3zy$

$w = -\frac{3}{2}z^2 - 2xz - 6yz$

③

$u = 4\cos y \quad , \quad v = x\sin x$

الحل / ①

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = 0$$

$$\frac{du}{dx} = Ay\cos xy \quad , \quad \frac{dv}{dy} = -Ax\cos xy$$

$$Ay\cos xy - Ax\cos xy \neq 0$$

∴ لا تحقق معادلة الاستمرارية

②

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$$

$$\frac{du}{dx} = 4x \quad , \quad \frac{dv}{dy} = -2x + 9y^2 + 3z$$

$$\frac{dw}{dz} = -3z - 2x - 6y$$

$$4x + 2x + 9y^2 + 3z - 3z - 2x - 6y$$

$$9y^2 - 6y \neq 0$$

∴ لا تحقق معادلة الاستمرارية

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(2)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$0 + 0 = 0$$

من تحقق معادلة الاستمرارية

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner