جامعة الموصل

كلية التربية للعلوم الصرفة

قسم علوم الحاسوب

المرحلة الأولى/ الهياكل المتقطعة

مدرس المادة م. اغصان محمود إبراهيم

الفصل الاول

الاستقراء الرياضي (Mathematical Induction)

الاستقراء عملية تقبل القضايا العامة كالقوانين عن طريق تجارب ومشاهدات لحالات خاصة متشابهة ومتعددة وقد يكون الاستقراء خاطئا او صائبا.

الاستقراء الرياضي: يستعمل الرياضيات فقط وهو طرق البرهان الذي يحكمه أسلوب مبني على مبدأ الاستقراء الرياضي وبواسطته تغطي جميع فجوات الاستقراء.

مثالا لو اخذنا مجموعة الاعداد الفردية $[1,3,5,7......,2n-1]$ نلاحظ ان مجموع اول n من الاعداد يساوي n^2 وذلك من خلال ملاحظة ما يلي:

$S_1 = 1....$ =1=1^2

$S_2 = 1+3$ =4=2^2

$S_3 = 1 + 3 + 5$ =9=3^2

$S_4 = 1 + 3 + 5 + 7$ =16=4^2

$$S_n = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 2n - 1 = n^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} 2i - 1 = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots\ldots + 2n - 1 = n^2$$

ان هذا الاستقراء صحيح.

ملاحظة:الرمز

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots . n$$

$$\sum_{t=1}^{k} t^2 + 3 = (1^2 + 3) + (2^2+3) + (3^2 + 3) + \cdots (k^2 + 3)$$

$$S_4 = (1^2 + 3) + (2^2+3) + (3^2 + 3) + (4^2 + 3) = 4 + 7 + 12 + 19 = 42$$

مثال: باستخدام الحد P_k احسب الحد P_{k+1}

1-$P_k = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$

نعوض عن كل k بـ k+1

$$P_{k+1} = \frac{(k+1)^2((k+1)+1)^2}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

$$2\text{-}P_k = \frac{[4(k-1)-3]}{4k-3}$$

نعوض عن كل k بـ k+1

$$P_{k+1} = \frac{[4((k+1)-1)-3]}{4(k+1)-3} = \frac{[4(k+1)-1)-3]}{4k+4-3} = \frac{4k-3}{4k+1}$$

$$3\text{-}P_k: 3^k \geq 2k+1$$

نعوض عن كل k بـ k+1

$$P_{k+1}: 3^{k+1} \geq 2(k+1)+1 \quad \Rightarrow \quad 3^{k+1} \geq 2k+3$$

- مبداء الاستقراء الرياضي:
- اذا استطعنا برهان الاتي (لقانون معين (فرضية))
- 1-نبرهن صحة القانون عند التعويض $n=1$ (يجب تساوي الطرفين الأيمن والايسر من القانون)
- 2- نفرض صحة القانون عندما $n=k$ (نعوض بدل كل n بـ k).
- 3-نبرهن صحة القانون عندما $n=(k+1)$ كما يلي:
- أ- نجد الحد الذي يلي الحد k من الخطوة 2 وذلك بالتعويض في الطرف الايسر

بدل كل n بـ $(k+1)$ ونبسط.

ب- نحاول معرفة الخطوة التي ينتهي عندها الحل وذلك بان نعوض بدل كل n بـ $(k+1)$ في الطرف الأيمن من القانون.

ج- نعيد كتابة القانون في الخطوة 2 مع إضافة الحد المضاف من(أ) للطرفين.

د- نبسط الطرف الأيمن حتى الوصول الى نهاية الحل في الخطوة (ب).

مثال (1): اثبت باستخدام الاستقراء الرياضي صحة الاتي: $1^3 + 2^3 + \ldots\ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$$\sum_{t=1}^{n} t^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

1-نبرهن صحة الاستقراء عندما n=2 :

الطرف الايسر

$$L: 1^3 + 2^3 = 1 + 8 = 9$$

الطرف الأيمن

$$R: \frac{2^2(2+1)^2}{4} = \frac{4*9}{4} = 9$$

بما ان الطرف الأيمن يساوي الطرف الايسر إذا الاستقراء صحيح عندما n=1.

2-نفرض صحة الاستقراء عندما n=k أي:

$$1^3 + 2^3 + \ldots\ldots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} \ldots\ldots\ldots(1)$$

3-نبرهن صحة الاستقراء عندما n=k+1 أي

إضافة الحد k+1 الى طرفي المعادلة (1)

$$1^3 + 2^3 + \ldots\ldots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 \qquad (2)$$

الان نبسط الطرف الأيمن:

$$\frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$$

$$\frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} = \frac{(k+1)^2[k^2 + 4(k+1)]}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2[k^2 + 4k + 4]}{4} = \frac{(k+1)^2[(k+2)^2]}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

بما ان الطرف الأيمن يساوي الايسر

إذا الاستقراء صحيح عندما n=k+1

شكرا جزيلا

الفصل الثانـي
العبارات المنطقية وجبر القضايا
(Logic Statements and Proposition Algebra)

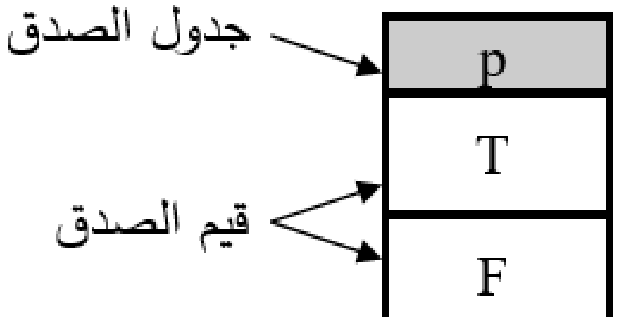
<u>المنطق:</u> هو العلم الذي يبحث عن الاشياء الصحيحة لتفسير الاشياء والظواهر اعتماداً على الحقائق الخارجية، وموضوع المنطق العام يهتم بصور الفكر لا بمادته

<u>العبارات المنطقية البسيطة: Simple Logic Statements</u>

تعرف العبارة المنطقية Logic Statement بشكل عام، انها جملة خبرية ذات معنى ومدلول، وتكون اما صادقة او كاذبة ولا يجوز ان تكون صادقة وكاذبة في آن واحد.

T=true

F=false



<u>مثال:</u> العبارة المنطقية p ، تتضمن العبارة p قيم صدق Truth Values توضع في جداول خاصة تدعى جداول الصدق Truth Tables.

- يقال لاية عبارة منطقية بانها عبارة منطقية بسيطة، اذا استحال الحصول على عبارة منطقية اخرى لاي جزء من اجزائها.

ذهبت الى السوق؟

- الجمل الاستفهامية والجمل الامرية لا تعد عبارات منطقية.

<u>مثال على:</u>

- جملة استفهامية / اين يقع القطر العراقي؟ لا يمكن الحكم على هذه الجملة.
- جملة امرية / اجمع العدد 20 مع العدد 50 لا يمكن الحكم على هذه الجملة.
- جملة خبرية / $5 + 8 = 10$ يمكن الحكم على هذه الجملة.

<u>مثال توضيحي:</u>

- الجملة $x < 16$ ليست عبارة منطقية. لكن اذا قلنا
- (لكل عدد حقيقي x ، $x < 16$) هي عبارة منطقية كاذبة.
- (يوجد عدد حقيقي x ، $x < 16$) هي عبارة منطقية صادقة.
- يطلق على هذا النوع من الجمل بالجمل المفتوحة Open Statements.

العبارات المنطقية المركبة: Compound Logic Statements

- يمكن ربط أي عبارتين منطقيتين بسيطتين بأداة ربط معينة لتكوين عبارة منطقية جديدة يطلق عليها بالعبارة المنطقية المركبة.
- ان صدق العبارة المنطقية المركبة يعتمد على قيم صدق العبارات المكونة لها وعلى نوع أداة الربط التي تربط بين مركباتها.

فاذا كان لدينا العبارتين البسيطتين p , q وتم استخدام أدوات الربط التالية:

1. أداة الربط (و) Conjunction ويرمز لها بالرمز ($\wedge$).
2. أداة الربط (او) Disjunction ويرمز لها بالرمز ($\vee$).
3. أداة الربط (اذا كان فأن if) Conditional St. وهي عبارة شرطية، ويرمز لها بالرمز ($\rightarrow$).
4. أداة الربط (اذا وفقط اذا iff) وهي عبارة ثنائية الشرط، ويرمز لها بالرمز ($\leftrightarrow$).
5. أداة النفي Negation ويرمز لها بالرمز ($\urcorner$).

جدول الصدق الخاص بكل أداة من الأدوات اعلاه:

P	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$\rceil p$
T	T					
T	F					
F	T					
F	F					

- العبارة المركبة $q \rightarrow p$ تختلف عن العبارة المركبة $p \rightarrow q$ في قيم صدقها.

• القضايا المنطقية: Logical Propositions

لتكن لدينا العبارات المنطقية ... ,p, q, r ولنفرض انها متغيرات Variables، يطلق على العبارة المركبة منها قضية ويرمز لها بالرمز $P(p, q, r,\dots)$ وتعني القضية المبنية من العبارات ... ,p, q, r.

$P(p,q,r,s)=p \wedge (q \rightarrow r) \leftrightarrow (s\wedge q)$

$P(p,q)=p \wedge q$

➢ان قيم صدق أي قضية يعتمد على قيم صدق العبارات المنطقية المكونة لها وعلى أدوات الربط المستعملة في تركيبها.

➢اذا كان لدينا القضية $P(p, q, r,\dots)$ مكونة من n من العبارات المنطقية البسيطة(الادخالات) فأن قيم صدق القضية(الاحتمالات) تستنتج من 2^n من الحالات.

$P(q)=q$	$2^1=2$
$P(p,q)=(p \wedge q)\rightarrow(p \wedge q)$	$2^2=4$
$P(p,s,r)=p \wedge (p \rightarrow r) \leftrightarrow s$	$2^3=8$
$P(p,q,r,s)=p \wedge (q \rightarrow r) \leftrightarrow (s\wedge q)$	$2^4=16$

• **مثال:** ما قيم صدق كل من القضايا التالية:

1) $(p \to q) \vee (p \to r)$

• $P(p,q,r)= (p \to q) \vee (p \to r)$

عدد الحالات بما ان عدد العبارات المنطقية 3 اذا عدد الحالات $8= 2^3$

الحل:

P	**q**	**r**	**$p \to q$**	**$p \to r$**	**$(p \to q) \vee (p \to r)$**

- **مثال:** ما قيم صدق كل من القضايا التالية:

- 2) $p \wedge q \vee r$

عدد الحالات بما ان عدد العبارات المنطقية 3 اذا عدد الحالات $2^3 = 8$

الحل:

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge q \vee r$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	T
T	F	T	F	T
T	F	F	F	F
F	T	T	F	T
F	T	F	F	F
F	F	T	F	T
F	F	F	F	F

• **مثال:** ما قيم صدق كل من القضايا التالية:

• 3) $(p \wedge q) \vee (p \vee q)$

عدد الحالات بما ان عدد العبارات المنطقية(الادخالات) 2 اذا عدد الحالات(الاحتمالات) $2^2=4$

الحل:

P	**q**	**$p \wedge q$**	**$p \vee q$**	**$(p \wedge q) \vee (p \vee q)$**
T	T	T	T	**T**
T	F	F	T	**T**
F	T	F	T	**T**
F	**F**	**F**	**F**	**F**

• **مثال:** ما قيم صدق كل من القضايا التالية:

• 4) $p \vee (\neg p \rightarrow q)$

عدد الحالات بما ان عدد العبارات المنطقية(الادخالات) 2 اذا عدد الحالات(الاحتمالات) $2^2 = 4$

الحل:

P	q	$\neg p$	$\neg p \rightarrow q$	$p \vee (\neg p \rightarrow q)$
T	T	F	T	**T**
T	F	F	T	**T**
F	T	T	T	**T**
F	**F**	**T**	**F**	**F**

الواجب

5) $p \vee (\neg q \wedge r)$	6) $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$
7) $[r \wedge (p \vee s)] \leftrightarrow [q \vee (\neg r \wedge s)]$	

- التكافؤ المنطقي: Logical Equivalence
- عبارة تحصيل حاصل: Tautology Statement
- عبارة التناقض Contradiction
- المسورات Quantifiers

1. المسور الجزئي Existential Quantifier
2. المسور الكلي Universal Quantifier
3. نفي العبارات المسورة

• التكافؤ المنطقي: Logical Equivalence

لتكن كل من P , Q قضية منطقية، يقال ان القضيتان P , Q متكافئتان اذا وفقط اذا كان جدول صدق P هو نفسه جدول صدق Q ويرمز لذلك بالرمز $P \equiv Q$ وتقرأ P تكافئ Q منطقياً.

1) $(p \to q) \equiv (\neg p \vee q)$	2) $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$
3) $[p \leftrightarrow q] \equiv [(p \to q) \wedge (q \to p)]$	4) $p \vee p \equiv p$
5) $p \wedge p \equiv p$	

1) $(p \to q) \equiv (\neg p \vee q)$

P	q	$\neg p$	$p \to q$	$\neg p \vee q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

2) $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$

P	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	T	T

- عبارة تحصيل حاصل: **Tautology Statement**

اذا كانت عبارة منطقية مركبة صادقة دائماً بغض النظر عن قيم صدق مكوناتها فتسمى تلك العبارة بالعبارة الصادقة منطقياً او تحصيل حاصل او تتولوجي Tautology ويمكن القول انها قضية صادقة منطقياً.

- **مثال:** بين هل العبارات ادناه تحصيل حاصل ام لا

1) $p \vee \neg p$

P	$\neg p$	$p \vee \neg P$
T	F	T
F	T	T

2) $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$ (واجب)

- **عبارة التناقض: Contradiction**

اذا كانت عبارة منطقية مركبة كاذبة دائماً بغض النظر عن قيم صدق مكوناتها فتسمى تلك العبار بالعبارة الكاذبة منطقياً او التناقض ويمكن القول انها قضية كاذبة منطقياً.

مثال: اثبت ان العبارات ادناه هي عبارات تناقض

1) $p \wedge \urcorner p$

P	$\urcorner$p	p $\wedge$ $\urcorner$P
T	F	F
F	T	F

2) $p \leftrightarrow \urcorner p$ (واجب)

➢ العبارة Q عبارة تناقض اذا وفقط اذا $\urcorner Q$ عبارة تحصيل حاصل.

➢ ليكن t رمزاً لعبارة تحصيل حاصل، و f رمزاً لعبارة التناقض فاذا كانت p اية عبارة منطقية فأن:

1) $p \wedge t \equiv p$	2) $p \wedge f \equiv f$
3) $p \vee t \equiv t$	4) $p \vee f \equiv p$

- المسورات: **Quantifiers**
- لاحظ العبارات الاتية:

❑يوجد طالب في ها الصف يرتدي الزي الموحد الجامعي.

❑كل طالب في هذا الصف يرتدي الزي الموحد الجامعي.

- العبارة الاولى مسورة جزئياً، وكلمة يوجد تسمى مسوراً جزئياً.
- العبارة الثانية مسورة كلياً، وكلمة كل تسمى مسوراً كلياً.
- المسور الجزئي: **Existential Quantifier**
- لتكن $P(x)$ جملة مفتوحة في x على المجموعة A ، العبارة (يوجد $A \ni x$ بحيث $P(x)$ صادقة) تسمى عبارة مسورة جزئياً وبالرموز تكتب: $\exists x \in A ,\ P(x)$
- الرمز $\exists$ يقرأ (يوجد There exist) ويسمى مسوراً جزئياً.
- ان العبارة ($\exists x \in A ,\ P(x)$) تكون صادقة اذا كانت مجموعة الصدق T_p غير خالية أي $T_p \neq \phi$

- **امثلة:**
- 1- العبارة ($\exists\, n \in N \;,\; 3n + 1 > 2$) عبارة صادقة لانه مثلاً $n = 1$ يحقق المتراجحة.
- 2- العبارة ($\exists\, x \in \mathbb{R} \;,\; x^2 + 1 = 0$) عبارة كاذبة لانه لا يوجد عدد حقيقي يحقق المعادلة $x^2 + 1 = 0$
- المسور الكلي: **Universal Quantifier**
- لتكن P(x) جملة مفتوحة في x على المجموعة A ، العبارة (لكل $x \in A$ بحيث P(x) صادقة) تسمى عبارة مسورة كلياً وبالرموز تكتب: $\forall\, x \in A ,\; P(x)$
- الرمز $\forall$ يقرأ (لكل For all) ويسمى مسوراً كلياً.
- ان العبارة ($\forall\, x \in A ,\; P(x)$) تكون صادقة اذا كانت مجموعة الصدق $T_p = A$
-
- **امثلة:**
- 1- العبارة ($\forall\, n \in N \;,\; n > -2$) عبارة صادقة لان $T_p = N$.
- 2- العبارة ($\forall\, x \in Q \;,\; x > 1$) عبارة كاذبة لانه يوجد عدد نسبي $x = 1/2$ يحقق المتراجحة.

- قد يكون في نفس العبارة المطروحة مسور كلي (واحد او اكثر) ومسور جزئي (واحد او اكثر)
- **مثلاً:**
- 1) $\forall x \in A \;,\; \forall y \in N \;,\; \forall z \in B \;,\; P(x, y, z)$
- 2) $\forall x \in A \;,\; \exists y \in B \;,\; P(x, y)$
- **مثال:** لتكن $A = \{-1, 0, 1\}$
- فأن العبارة $\forall x \in A \;,\; \exists y \in A \;,\; x + y = 0$ تكون عبارة صادقة من خلال ملاحظة الاتي

$\forall x \in A$	**$\exists y \in A$**	**$P(x,y):\; x + y = 0$**
1	**-1**	**$1 + (-1) = 0$**
0	**0**	**$0 + 0 = 0$**
-1	**1**	**$-1 + 1 = 0$**

- اما العبارة $\exists y \in A \;,\; \forall x \in A \;,\; x + y = 0$ تكون كاذبة (لماذا).

- **نفي العبارات المسورة:**
- لناخذ العبارة (كل طالب في هذا الصف معدله ثمانون) ممكن نفيها كاتي:
- (ليس صحيح ان كل طالب في هذا الصف معدله ثمانون)
- و هذا يعني انه (يوجد على الاقل طالب واحد في هذا الصف معدله لا يساوي ثمانون)
- ورمزياً نكتب ذلك
- $\neg(\forall x \in M$, طالب معدله ثمانون $x)$, $\equiv (\exists x \in M$ طالب معدله لا يساوي ثمانون $x)$

- **<u>مبرهنة:</u>**

- 1) $\neg(\forall x \in A \; , \; P(x)) \equiv (\exists x \in A \; , \; \neg P(x))$
- 2) $\neg(\exists x \in A \; , \; P(x)) \equiv (\forall x \in A \; , \; \neg P(x))$

- **<u>مثال:</u>** انف العبارات التالية:
- 1) $\neg(\exists x \in \mathbb{R} \; , \forall y \in \mathbb{R} \; , \; x + y = y) \equiv \forall x \in \mathbb{R} \; , \exists y \in \mathbb{R} \; , \; x + y \neq y$
- 2) $\neg(((2n + 3 > 7) \; , \; n \in \mathbb{N}$ لكل $)) \equiv ((2n + 3 < 7) \; , \; n \in \mathbb{N}$ يوجد $)$

➢ جبر القضايا: **Algebra of Propositions**

➢ **ادناه مجموعة من القوانين التي سوف نستخدمها في تبسيط القضايا الجبرية الى ابسط صورة ممكنة:**

1- قانونا اللانمو Idempotent laws

- $p \vee p \equiv p$
- $p \wedge p \equiv p$

2- قانونا التجميع Associative laws

$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

3- قانونا التبادل Commutative laws

$p \vee q \equiv q \vee p$

$p \wedge q \equiv q \wedge p$

4- قانونا التوزيع Distributive laws

- $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

5- القوانين المحايدة

- $P \vee t \equiv t$
- $P \wedge t \equiv p$
- $P \vee f \equiv p$
- $P \wedge f \equiv f$

(نلاحظ ان t هو العنصر المحايد في $\wedge$ و ان f هو العنصر المحايد في $\vee$)

6- قوانين المتممات Complement laws

- $P \vee \urcorner p \equiv t$
- $P \wedge \urcorner p \equiv f$
- $\urcorner(\urcorner p) \equiv p$
- $\urcorner f \equiv t$
- $\urcorner t \equiv f$

7- قانونا ديموركن Demorgans laws

- $\urcorner(p \vee q) \equiv \urcorner p \wedge \urcorner q$
- $\urcorner(p \wedge q) \equiv \urcorner p \vee \urcorner q$

➢ if $P \equiv Q \rightarrow \urcorner P \equiv \urcorner Q$

➢ $(p \rightarrow q) \equiv (\urcorner p \vee q)$

➢ $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

- **مثال:** باستخدام القوانين الجبرية بسط كل من العبارات الاتية:-
- 1- $(p \wedge q) \wedge \neg(p \vee q) \equiv$

الحل:

$(p \wedge q) \wedge \neg(p \vee q) \equiv (p \wedge q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$ (قانون ديموركن)

$\equiv (p \wedge \neg p) \wedge (q \wedge \neg q)$ (ابدالية)

$\equiv (f) \wedge (f)$ (المتممات)

$\equiv f$

- 2- $q \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$
- الحل:

$q \leftrightarrow (p \wedge \neg q) \equiv [q \rightarrow (p \wedge \neg q)] \wedge [(p \wedge \neg q) \rightarrow q]$

$\equiv [\neg q \vee (p \wedge \neg q)] \wedge [\neg(p \wedge \neg q) \vee q]$

$\equiv [(\neg q \vee p) \wedge (\neg q \vee \neg q)] \wedge [(\neg p \vee q) \vee q]$

$\equiv [(\neg q \vee p) \wedge \neg q] \wedge [\neg p \vee q]$

$\equiv (q \rightarrow p) \wedge \neg q \wedge (p \rightarrow q) \equiv (q \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow q) \wedge \neg q$

$\equiv (p \leftrightarrow q) \wedge \neg q$

- 3- $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$

$$[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q \equiv [p \wedge (\neg p \vee q)] \rightarrow q$$

$$\equiv [(p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q)] \rightarrow q$$

$$\equiv [F \vee (p \wedge q)] \rightarrow q \equiv [(p \wedge q)] \rightarrow q$$

$$\equiv \neg (p \wedge q) \vee q$$

$$\equiv \neg p \vee \neg q \vee q$$

$$\equiv \neg p \vee T \equiv T$$

- 4- $\neg (p \wedge q) \wedge (\neg p \vee q)$

$$\neg (p \wedge q) \wedge (\neg p \vee q) \equiv (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$$

$$\equiv \neg p \vee (\neg q \wedge q)$$

$$\equiv \neg p \vee F \equiv \neg p$$

- الواجب:

- 5- $p \to (p \vee q) \equiv T$
- 6- $\neg(p \wedge \neg q) \equiv P \to q$
- 7- $\neg(\neg p \to \neg q) \equiv \neg p \wedge q$
- 8- $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q) \equiv P$
- 9- $\neg(p \vee \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \equiv \neg P$
- 10- $[(p \vee q) \wedge(\neg p \vee \neg q)] \vee q \equiv p \vee q$
- 11- $\neg[p \wedge(\neg p \vee q)] \vee q \equiv T$

شكرا جزيلا

الفصل الثالث
المتجهات والمصفوفات

المتجهات: Vectors

تستخدم المتجهات لتمثيل الكميات التي تمتلك مقدارا واتجاهاً كالسرعة والقوة مثلاً لتعريف القوة نحتاج لان نعرف مقدارها واتجاهها .يمكن أن نمثل المتجه بخط له اتجاه يمثل طول الخط مقداره واتجاه الخط هو اتجاه المتجه .

المتجه: هو سهم يتجه من نقطة إلى أخرى. يتحدد كل متجه في الرياضيات بثلاثة عناصر

المقدار وهو كمية قياسية تُمَثِّل بطول المتجه،

الاتجاه يمكن تحديده في فضاء ثلاثي(أي فضاء) ،

نقطة التأثير وهي النقطة التي ينطلق منها المتجه.

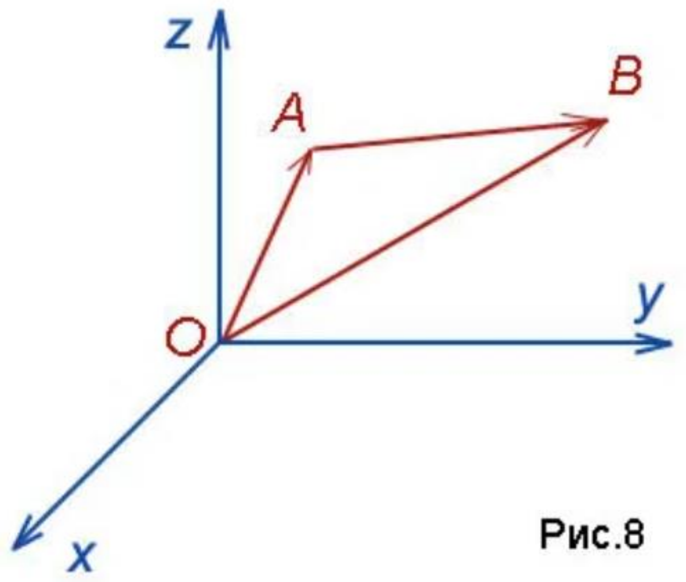


Рис.8

يكتب المتجه بالصيغتين التالية $\vec{v} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} or \vec{v} = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$

- تعريف: طول المتجه $\vec{v} = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ هو :

- $\|\vec{v}\| = (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)^{\frac{1}{2}}$

- حيث الرمز $\|\vec{\quad}\|$ يعبر عن طلول المتجه (نورم norm)
- مثال: جد طول كل من المتجهات الآتية:

1. $\vec{v} = \langle 3, -5, 10 \rangle \Rightarrow \|\vec{v}\| = \left(3^2 + (-5)^2 + 10^2\right)^{\frac{1}{2}} = (9 + 25 + 100)^{\frac{1}{2}}$
   $= \sqrt{134}$
2. $\vec{w} = \langle 2, -7, 1, -3, \rangle \Rightarrow \quad \|\vec{w}\| = (4 + 49 + 1 + 9)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{63}$
3. $\vec{q} = \langle 3, 4 \rangle \Rightarrow \|\vec{q}\| = \sqrt{9 + 16} = 5$
4. $\vec{d} = \langle -4, 10, 0 \rangle = ?$
5. $\vec{w} = \langle 0, 0, 0 \rangle = ?$

➢جبر المتجهات:

➢الجمع:

- بجمع المتجهات: ليكن لدينا $\vec{b} = \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle \;\&\; \vec{a} = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$

فان حاصل الجمع $\vec{a} + \vec{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n \rangle$

➢ الطرح:

- الطرح يكون $\vec{a} - \vec{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n \rangle$

ضرب متجه بثابت:ليكن لدينا $\vec{a} = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ & و c ثابت فان

$$c\vec{a} = \langle ca_1, ca_2, \dots, ca_n \rangle$$

ملاحظة. لا يمكن أن نجمع أو نطرح متجهين ما لم يكن لهما نفس العدد من المركبات.

أي $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3, b_4 \rangle \;\&\; \vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ **لايمكن** $\vec{a} + \vec{b}$ **او** $\vec{a} - \vec{b}$

مثال: اذا كان $\vec{v} = \langle 6,1,-9 \rangle$ & $\vec{a} = \langle 2,-1,3,1 \rangle$ & $\vec{b} = \langle 3,1,5,-3 \rangle$ جد

- $\vec{a} + \vec{b}$
- $3\vec{b} - 2\vec{a}$
- $\vec{a} + \vec{v}$

الحل:

- $\vec{a} + \vec{b} = \langle 2,-1,3,1 \rangle + \langle 3,1,5,-3 \rangle = \langle 2+3, -1+1, 3+5, 1-3 \rangle = \langle 5,0,8,-2 \rangle$
- $3\vec{b} - 2\vec{a} = 3\langle 3,1,5,-3 \rangle - 2\langle 2,-1,3,1 \rangle = \langle 9,3,15,-9 \rangle - \langle 4,-2,6,2 \rangle = \langle 5,5,9,-11 \rangle$
- $\vec{a} + \vec{v}$ لايمكن الجمع بينهما لان مركباتهم مختلفة

- **خصائص:**
- **ليكن كل من** $\vec{v},\vec{u},\vec{w}$ متجهات وليكن a,b اعداد فان :

1. $\vec{v}+\vec{w}=\vec{w}+\vec{v}$
2. $\vec{v}+0=\vec{v}$
3. $a(\vec{v}+\vec{w})=a\vec{v}+a\vec{w}$
4. $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$
5. $1.\vec{u}=\vec{u}$
6. $(a+b)\vec{u}=a\vec{u}+b\vec{u}$

- متجه الوحدة: اذا كان لدينا المتجه $\vec{v}$ فان متجه الوحدة له يكون

$$\vec{U} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

والذي يكون بنفس اتجاه المتجه الأصلي.

- مثال ذلك نحاول ايجاد متجه الوحدة للمتجه $\vec{v} = \langle -5,2,1 \rangle$

$$\|\vec{v}\| = (25+4+1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{30}$$

$$\vec{U} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{30}}\langle -5,2,1 \rangle = \left\langle \frac{-5}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}} \right\rangle$$

- وأن طول المتجه $\vec{U}$ هو واحد ومن هنا جاءت التسمية.
-

$$\|\vec{U}\| = \left(\frac{25}{30}+\frac{4}{30}+\frac{1}{30}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{30}} = 1$$

➢ الضرب النقطي dot product:

$$\vec{a}.\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

- مثال ذلك الضرب النقطي للمتجهين $\vec{v} = \langle 3, -5,10\rangle \& \vec{w} = \langle 3,0,11\rangle$ هو

$$\vec{v}.\vec{w} = 3 * 3 + (-5) * 0 + 10 * 11 = 9 + 0 + 110 = 119$$

- يستفاد من الضرب النقطي في إيجاد الزاوية بين المتجهين

- $\vec{v}.\vec{w} = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \cos\theta$

$$\cos\theta = \frac{\vec{v}\vec{w}}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|},$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{134}, \|\vec{w}\| = \sqrt{130}$$

$$\cos\theta = \frac{119}{\sqrt{134} * \sqrt{130}} = \frac{119}{131.985} = 0.90162 \theta = \cos^{-1}(0.90162) \Rightarrow \theta = 25.6281^{o}$$

- مثال :اذا كان $\vec{b} = \langle 2,0\rangle$ & $\vec{a} = \langle 1, -1\rangle$ جد الضرب النقطي ل $\vec{a}.\overrightarrow{b}$ والزاوية بينهما.

$$\vec{a}.\overrightarrow{b} = 1 * 2 + (-1) * 0 = 2 + 0 = 2$$

- $\vec{a}.\overrightarrow{b} = \|\vec{a}\| \left\|\vec{b}\right\| cos\,\theta$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{2}, \left\|\vec{b}\right\| = \sqrt{4} = 2$$

$$cos\,\theta = \frac{2}{\sqrt{2} * 2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\theta = cos^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}) \Rightarrow \theta = 45$$

➢ cross product:الضرب الاتجاهي

$$\vec{a} \times \vec{b} = \|\vec{a}\| \left\|\vec{b}\right\| \sin\theta$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & -j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)i - (a_1 b_3 - a_3 b_1)j + (a_1 b_2 - a_2 b_1)k$$

اذا كان $\vec{b} = 3i + 11k$, $\vec{a} = 3i - 5j + 10k$ جد الضرب الاتجاهي $\vec{a} \times \vec{b}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & -j & k \\ 3 & -5 & 10 \\ 3 & 0 & 11 \end{vmatrix}$$

$$= (-5 * 11 - 10 * 0)i - (3 * 11 - 10 * 3)j + (3 * 0 - (-5) * 3)k$$
$$= -55i - 3j + 15k = \langle -55, -3, 15 \rangle$$

اذا كان $\vec{v} = 4i + 2j - 1k, \vec{w} = 5i + 1j + 4k$ جد الضرب الاتجاهي $\vec{v} \times \vec{w}$

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} i & -j & k \\ 4 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= (2 * 4 - 1 * -1)i - (4 * 4 - 5 * -1)j + (4 * 1 - 2 * 5)k$$
$$= 9i - 21j - 6k = \langle 9, -21, -6 \rangle$$

$$\vec{w} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & -j & k \\ 5 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (1 * -1 - 4 * 2)i - (5 * -1 - 4 * 4)j + (5 * 2 - 1 * 4)k$$
$$= -9i + 21j + 6k = \langle -9,21,6 \rangle$$

$\vec{v} \times \vec{w}$ =-($\vec{w} \times \vec{v}$)

- مثال : جد حاصل الضرب النقطي والاتجاهي والزاوية لـ $\bar{A} = 2\bar{\imath} - 7\bar{\jmath} + 4\bar{k}$ $\bar{B} = 5\bar{\imath} + 4\bar{\jmath} - 3\bar{k}$

شكرا جزيلا

الفصل الثالث
المتجهات والمصفوفات

المصفوفات

المصفوفة : هي مجموعة منتهية من الاعداد المنسقة التي تكون على شكل مستطيل او مربع ولتي تخضع لقواعد معينة لعملياتها.

من الشكل العام للمصفوفة نستنتج مايلي:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & & a_{in} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 9 \end{bmatrix} ,B=\begin{pmatrix} -1 & 9 \\ 4 & 1 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} ,D=\begin{bmatrix} 6 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

كل مصفوفة اسم يدل عليها

كل مصفوفة تتكون من مجموعة من الاسطر m (rows) ومجموعة من الاعمدة n(columns) حيث تمثل ابعاد تلك المصفوفة ويقال بانها من الدرجة m*n.

عدد عناصر المصفوفة يساوي حاصل ضرب عدد الاسطر في عدد اعمدتها.

لكل عنصر في المصفوفة a_{ij} دليلان احدهما للأسطر i والأخر للأعمدة j.

اذا كان عدد الاسطر يساوي عدد الاعمدة فالمصفوفة تسمى مربعة ويقال ان رتبة المصفوفة من الدرجة n.

يمكن التعبير عن المصفوفة بالشكل

$A=(a_{ij})_{m\times n}$ i=1…m, j=1…n

• **بعض أنواع المصفوفات:**

➢**المصفوفة المربعة:** هي مصفوفة عدد أعمدتها يساوي عدد سطورها. , $A=\begin{bmatrix}2 & -8\\ 4 & 5\end{bmatrix}$

➢**المصفوفة الصفرية:** هي مصفوفة كافة عناصرها أصفار. إذن فالشكل العام لها $A=(O)_{2\times 4}$,

➢**مصفوفة السطر:**

حينما نجعل m=1 في المصفوفة A(m,n) فيكن اعتبار المصفوفة شعاع سطر(مصفوفة السطر) وتكتب بالشكل:

$$C=\begin{bmatrix}3 & -1 & 6\end{bmatrix}, z=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$$

➢**مصفوفة العمود:**

حينما نجعل n=1 في المصفوفة A(m,n) فيكن اعتبار المصفوفة شعاع عمود(مصفوفة العمود) وتكتب بالشكل: $F=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}1\\4\\-3\end{bmatrix}$

المصفوفة الأحادية (الوحدة): $I_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$،

➢**المصفوفة القطرية:** هي مصفوفة مربعة تكون فيها كل العناصر الواقعة خارج القطر الرئيسي مساوية للصفر. أمّا العناصر التي تقع على القطر الرئيسي فيمكنها أن تتخذ أية قيم كانت.

- $A = (a_{ij})_{n\times n}$, $a_{ij} = 0 \; if \; i \neq j, \forall i, j$,i=1 … n, j=1…n $E = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$

➢**المصفوفة المثلثية العليا:** هي مصفوفة مربعة تكون فيها جميع العناصر التي تحت القطر مساوية للصفر وحينئذ تسمى مصفوفة مثلثية عليا.

➢**المصفوفة المثلثية سفلى(دنيا):** هي مصفوفة مربعة تكون جميع العناصر التي فوق القطر مساوية للصفر فإنها تسمى مصفوفة مثلثية سفلى او دنيا.

- B= $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

➢منقول المصفوفة: تسمى المصفوفة ذات الدرجة $m \times n$ الناتجة عن المبادلة بين الصفوف والاعمدة للمصفوفة A ذات الدرجة $n \times m$ منقول المصفوفة A ويرمز لها بالرمز: A^T

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \to A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

➢ المصفوفة المتماثلة: يقال للمصفوفة A انها متماثلة اذا حققت العلاقة $A = A^T$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -7 & 4 \\ -2 & 4 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow A = A^T$$

العمليات على المصفوفات

➢ جمع وطرح المصفوفات:

- يشترط في عملية جمع وطرح مصفوفتين أن يكون لهما نفس المرتبة. ونحصل على مجموع مصفوفتين بجمع (طرح)كل عنصر من المصفوفة الأولى مع العنصر الذي يقابله في المصفوفة الثانية. فإذا كان لدينا المصفوفتانA,B

➢ ضرب المصفوفات:

- إن الشرط الضروري لإمكانية ضرب مصفوفتان هو أن يكون عدد أعمدة المصفوفة الأولى (اليسرى في عملية الضرب) مساويا عدد أسطر الثانية (اليمنى في عملية الضرب)، أي أن يكون الدليلان المتجاوران في مرتبتهما متساويين. وتكون مرتبة ناتج عملية الضرب هما الدليلين المتباعدان.
- $C_{m,k} = A_{m,n} \cdot B_{n,k}$

Determinant المحددات

- هو عدد يمكن أن يحسب من خلال المصفوفة المربعة، يرمز عادة لمحدد مصفوفة ما A بـ $|A|$ or $\det(A)$

➢ المحددات الثنائية:

- عندما تكتب الكميات الأربع a_1 , b_1 , a_2 , b_2 على الصورة التالية:

- $|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$

- يسمى الطرف الأيسر لهذه المتساوية بالمحددة والطرف الأيمن بمفكوك المحددة، وتسمى الكميات a_1 , b_1 , a_2 , b_2 المرتبة كما هو موضح بالطرف الأيسر بعناصر أو مكونات المحددة. ولما كانت هذه المحددة تحتوى على صفين وعمودين فأنها تسمى بالمحددات ذات الرتبة الثانية.

- مثال (1) : إوجد قيمة المحددة:

$$\begin{vmatrix} 2 & -8 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

الحـــــــل

$$\begin{vmatrix} 2 & -8 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 5 - (-8 \times 4) = 10 - (-32) = 42$$

- مثال (2) : اثبت أن:

$$1) \begin{vmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix} = 1 \qquad 2) \begin{vmatrix} a-b & a \\ a & a+b \end{vmatrix} = -b^2$$

الحـــــــل

$$1) \begin{vmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix} = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$2)) \begin{vmatrix} a-b & a \\ a & a+b \end{vmatrix} = (a-b) \times (a+b) - a \times a$$

$$= a^2 - b^2 - a^2 = -b^2$$

➢ المحددات الثلاثية (ذات الرتبة الثالثة)

- على غرار ما سبق شرحه بالنسبة للمحددات الثنائية فإنه إذا وضعت الكميات التسع على الصورة:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

فإنه يقصد بذلك المقدار

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

أي المقدار الجبري

$$a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$

• مثال (3): إوجد مفكوك المحددة الثلاثية التالية:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 9 \end{vmatrix}$$

الحـــــــل

$$D = 3(7 \times 9 - 2 \times 2) - 4(5 \times 9 - 2 \times 1) + 1(5 \times 2 - 7 \times 1)$$
$$= 3(63 - 4) - 4(45 - 2) + 1(10 - 7) = 8$$

• ونظراً لاحتواء هذه المحددة على ثلاثة صفوف وثلاثة أعمدة فإنها تسمى بالمحددة الثلاثية أو ذات الرتبة الثالثة.. وتسمى الكميات التسع $a_1\ a_2\ a_3$, $b_1\ b_2\ b_3$, $c_1\ c_2\ c_3$ بعناصر المحددة أو مكوناتها. ويلاحظ أنه يمكن فك المحددة باستخدام عناصر أو مكونات أي صف أو أي عمود مع مراعاة القاعدة التالية للإشارات:

$$\begin{vmatrix} (-1)^{1+1} & (-1)^{1+2} & (-1)^{1+3} \\ (-1)^{2+1} & (-1)^{2+2} & (-1)^{2+3} \\ (-1)^{3+1} & (-1)^{3+2} & (-1)^{3+3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

ومن الجدير بالذكر ملاحظة أن الإشارة المصاحبة للعنصر تتبع القاعدة $(-1)^m$ حيث m هي مجموع رقمي الصف والعمود الموجود به العنصر.

- أي يمكن فك هذه المحددة باستعمال أي صف أو أي عمود كما يأتى:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 9 \end{vmatrix}$$

- ثانياً: باستعمال الصــف الثاني:

$$D = -5(4 \times 9 - 1 \times 2) + 7(3 \times 9 - 1 \times 1) - 2(3 \times 2 - 4 \times 1)$$
$$= -5(36 - 2) + 7(27 - 1) - 2(6 - 4) = 8$$

- ثالثاً: باستعمال الصــف الثالث:

$$D = 1(4 \times 2 - 1 \times 7) - 2(3 \times 2 - 1 \times 5) + 9(3 \times 7 - 4 \times 5)$$
$$= 1(8 - 7) - 2(6 - 5) + 9(21 - 20) = 8$$

- رابعاً: باستعمال العمـود الأول:

$$D = 3(7 \times 9 - 2 \times 2) - 5(4 \times 9 - 1 \times 2) + 1(4 \times 2 - 1 \times 7)$$
$$= 3(63 - 4) - 4(36 - 2) + 1(8 - 7) = 8$$

- خامساً: باستعمال العمود الثانى:

$$D = -4(5 \times 9 - 2 \times 1) + 7(3 \times 9 - 1 \times 1) - 2(3 \times 2 - 1 \times 5)$$
$$= -4(45 - 2) + 7(27 - 1) - 2(6 - 5) = 8$$

➢طريقة ثانية لايجاد محدد من الرتبة الثالثة:

يمكن الحصول على مفكوك محددة الرتبة الثالثة كما هو موضح في الشكل التالي، وفيه تكرر كتابة العمودين الأول والثاني إلى يمين العمود الثالث ثم نضرب الأعداد في اتجاه الأسهم الموضحة ونأخذ الناتج بإشارته إن كان السهم متجهاً من اليسار إلى اليمين أ بإشارة مخالفة إن كان السهم متجهاً من اليمين إلى اليسار وتجمع هذه النواتج.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

مثال : إوجد حل المحددة الآتية:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 6 \\ 2 & 5 & 9 \end{vmatrix}$$

<u>الحـــل</u>

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 6 & & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 9 & & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \big((3 \times 7 \times 9) + (4 \times 6 \times 2) + (1 \times 0 \times 5)\big) - \big((1 \times 7 \times 2) + (3 \times 6 \times 5) + 4 \times 0 \times 9\big)$$

$$= (189 + 48 + 0) - (14 + 90 + 0) = 237 - 104 = 133$$

➢مثال :واجب

أوجد مفكوك المحددة:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 6 \\ 2 & 5 & 9 \end{vmatrix}$$

1. باستخدام العمود الأول
2. باستخدام السطر الثالث
3. باستخدام العمود الثاني
4. باستخدام الأسهم.

➢ المحددات الصغرى (مرافق العنصر):

- بملاحظة مفكوك أي محددة ثلاثية نجد أنها تحتوى على محددات أخرى من المرتبة الثانية ويطلق على هذه المحددات بالمحددات الصغرى (المصغرات) للمحددة الأصلية.

فإذا كانت المحددة الأصلية هي:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

- فان المحددة الصغرى الناتجة عن حذف العمود الأول والصف الأول (أي العمود والصف اللذان يلتقيان عند العنصر a_1) تسمى المحددة الصغرى المناظرة للعنصر a_1 ويرمز لها بالرمز A_1

أي أن: $A_1 = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

وبالمثل فالمحددة الصغرى للعنصر b_2 والتي يرمز لها بالرمز B_2 هي: $B_2 = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$

- والمحددة الصغرى للعنصر c_3 والتي يرمز لها بالرمز C_3 هي: $C_3 = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

وهكذا بالنسبة لباقي العناصر

مثال :لتكن لدينا المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

جد المحددات الصغرى للمصفوفة .

الحل:

$$A^{C}=\begin{bmatrix}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 3 & 2\end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}\\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix}\\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\end{vmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4 & 2 & -7\\ 1 & 3 & -3\\ -2 & -1 & 6\end{bmatrix}$$

مثال :لتكن لدينا المصفوفة:

$$B = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

جد المحددات الصغرى للمصفوفة .

الحل:

$$B^C = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}.(5) & (-1)^{1+1}.(3) \\ (-1)^{1+1}.-1 & (-1)^{1+1}.(-4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

واجب: جد المحددات الصغرى لـ:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -2 & 7 & 9 \\ -1 & -8 & -3 \end{bmatrix} \quad , D = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$$

➢ **لمصفوفة المساعدة:** اذا كان ت $A = [a_{ij}]$ مصفوفة مربعة من الدرجة n وكانت a_{ij} المعامل المرافق للعناصر a_{ij} فاننا نسمي المصفوفة

$$\boldsymbol{adjont(A) = adj(a)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{14} & a_{24} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = A^h$$

أي ان المصفوفة المساعدة تساوي منقول المحددات الصغرى(العوامل المساعدة) للمصفوفة A .

مثال :لتكن لدينا المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

جد المصفوفة المساعدة لها .

الحل:نحسب مصفوفة المحددات الصغرى A^C

$$A^C = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -7 \\ 1 & 3 & -3 \\ -2 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^h = adj(A) = (A^c)^T = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -7 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

➢ إيجاد مقلوب (أو معكوس) مصفوفة

إن مقلوب المصفوفة المربعة A هو مصفوفة نرمز له بالرمز A^{-1} إذا ضربت بالمصفوفة A من يمينها أو من يسارها كان الناتج مصفوفة واحدية/: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

- من هنا نلاحظ أنه لا يمكن الحديث عن مقلوب مصفوفة إلا إذا كانت المصفوفة مربعة.

- سندرس إيجاد مقلوب مصفوفة من المرتبة الثانية ثم مقلوب مصفوفة من المرتبة الثالثة. أما المصفوفات من مراتب أعلى فلا تختلف طرق حساب مقلوباتها عن حالة المصفوفة من المرتبة الثالثة.

➢مقلوب مصفوفة من المرتبة الثانية

لتكن لدينا المصفوفة من المرتبة الثانية الآتية:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

لإيجاد مقلوب هذه المصفوفة A^{-1} يمكن اتباع الخطوات التالية:

1 ـ نحسب محدد المصفوفة A. $\Delta \neq 0$ وهذا المحدد هو:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$

2 ـ نوجد المصفوفة المساعدة وذلك بتبديل عنصري القطر الرئيس في المصفوفة A ببعضهما وضرب عنصري القطر الثانوي بـ (1-). سنرمز للمصفوفة المساعدة بالرمز A^h فتكون كما يلي:

$$A^h = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

3 ـ نحسب مقلوب (معكوس) المصفوفة A بتقسيم كل عنصر من عناصر المصفوفة المساعدة A^h على المحدد Δ. أي أن:

$$A^{-1} = \frac{A^h}{\Delta} = \begin{bmatrix} \frac{a_{22}}{\Delta} & \frac{-a_{12}}{\Delta} \\ \frac{-a_{21}}{\Delta} & \frac{a_{11}}{\Delta} \end{bmatrix}$$

مثال: جد مقلوب المصفوفة: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

الحل:

إن محدد هذه المصفوفة يساوي:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 1(-1) = 11$$

أما المصفوفة المساعدة فهي:

$$A^h = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ومقلوب (معكوس) المصفوفة هو:

$$A^{-1} = \frac{A^h}{\Delta} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{11} & \frac{1}{11} \\ \frac{-1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}$$

ويمكننا أن نتأكد من نتيجة الحساب بضرب المصفوفتين A و A^{-1} ببعضهما:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{5}{11} & \frac{1}{11} \\ \frac{-1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

➢ملاحظة: من الواضح أنه إذا كان محدد المصفوفة مساويًا الصفر فلا يكون لها مقلوب. من هنا فإن شرط وجود مقلوب للمصفوفة أن يكون محددها غير مساو للصفر. نقول عن المصفوفة التي محدد يساوي الصفر إنها شاذة (غير نظامية). ونعلم الآن أن المصفوفة الشاذة ليس لها مقلوب

➢مقلوب مصفوفة من المرتبة الثالثة:

- لتكن لدينا المصفوفة من المرتبة الثالثة الآتية:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- لإيجاد مقلوب هذه المصفوفة A^{-1} نتبع الخطوات التالية:

الخطوة الأولى: نوجد قيمة المحدد Δ للمصفوفة A. فإذا تبين أن $0 = \Delta$ فعندها نقول إن المصفوفة A شاذة وليس لها مقلوب. أما إذا كان $0 \neq \Delta$فننتقل إلى الخطوة الثانية.

الخطوة الثانية: نوجد مرافق كل عنصر من عناصر المصفوفة A ونضع هذه المرافقات بصورة مصفوفة نطلق عليها اسم مصفوفة المرافقات. وسوف نرمز لمصفوفة المرافقات بالرمز A^C ولكل عنصر مرافق بالرمز a_{ij}^c (ولقد شرحنا كيفية إيجاد مصفوفة المرافقات في إيجاد قيمة المحدد من المرتبة الثالثة a_{ij}^c):

$$A^c = \begin{bmatrix} a_{11}^c & a_{12}^c & a_{13}^c \\ a_{21}^c & a_{22}^c & a_{23}^c \\ a_{31}^c & a_{32}^c & a_{33}^c \end{bmatrix}$$

- **الخطوة الثالثة:**

نوجد المصفوفة المساعدة (والتي نرمز لها بـ A^C) وهي عبارة عن مدور مصفوفة المرافقات، أي أن:

$$A^h = \begin{bmatrix} a_{11}^c & a_{21}^c & a_{31}^c \\ a_{12}^c & a_{22}^c & a_{32}^c \\ a_{13}^c & a_{23}^c & a_{33}^c \end{bmatrix}$$

- **الخطوة الرابعة:**

نقسم كل عنصر من عناصر المصفوفة المساعدة A^h على قيمة المحدد (حيث فرضنا $\Delta \neq 0$)، فنحصل بذلك على مقلوب المصفوفة:

$$A^{-1} = \frac{A^h}{\Delta} = \begin{bmatrix} \frac{a_{11}^c}{\Delta} & \frac{a_{21}^c}{\Delta} & \frac{a_{31}^c}{\Delta} \\ \frac{a_{12}^c}{\Delta} & \frac{a_{22}^c}{\Delta} & \frac{a_{32}^c}{\Delta} \\ \frac{a_{13}^c}{\Delta} & \frac{a_{23}^c}{\Delta} & \frac{a_{33}^c}{\Delta} \end{bmatrix}$$

➢**مثال:**لتكن لدينا المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

لإيجاد مقلوبها A^{-1} نتبع المراحل السابقة:

1 ـ نحسب المحددة Δ عن طريق نشرها وفق عناصر السطر الأول فنجد أن:

$$\Delta=3(4-0)-0+1(-1-6)=5$$

2 ـ نوجد مصفوفة المرافقات فنجد: $A^c=\begin{bmatrix}4 & 2 & -7\\ 1 & 3 & -3\\ -2 & -1 & 6\end{bmatrix}$

3 ـ نوجد المصفوفة المساعدة A^h والتي هي مدور مصفوفة المرافقات، فنجد أن: $A^h=\begin{bmatrix}4 & 1 & -2\\ 2 & 3 & -1\\ -7 & -3 & 6\end{bmatrix}$

4 ـ نقسم عناصر المصفوفة المساعدة على المحدد، فنحصل على مقلوب المصفوفة:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}4/5 & 1/5 & -2/5\\ 2/5 & 3/5 & -1/5\\ -7/5 & -3/5 & 6/5\end{bmatrix}$$

ونستطيع أن نتأكد من صحة عملنا وذلك بالتحقق من صحة العلاقة التالية: $A^{-1}A=I$

➢مثال 2:

أوجد مقلوب المصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

جد مقلوبها A^{-1}:(واجب)

شكرا جزيلا

الفصل الرابع

نظرية المجموعات set theory ج3

المجموعة: عبارة عن تجمع من الأشياء معرفة تعريفا تاماً من أشياء متمايزة.

مثال: مجموعة طلاب المرحلة الأولى قسم الحاسوب.

ليس كل تجمع يعني مجموعة(الشجعان في بلد معين)ل انها تعتمد على صفة شخصية.

- ملاحظة: تستخدم الحروف الكبيرة مثل .....,A,B,C,X,Y,Z للدلالة على المجموعات، بينما تستخدم الحروف الصغيرة ...,a,b,x,y,z للدلالة على عناصر تلك المجموعة. $A=\{a,e,b,h,3,9\}$

- **طرق التعبير عن المجموعات:**

أولا الطريقة الجدولية Tabulation Method: $Y=\{a,b,1,7\}$

ثانيا طرقة القاعدة (الصفة المميزة): $Y=\{x:9>x>5\}$

➢ مفاهيم أساسية في المجموعات principle concept of Sets:

- **الانتماء:** اذا كان b عنصرا في المجموعة B ، نقول ان (b ينتمي للمجموعة B) ،ونكتب ذلك بالشكل $(b \in B)$ ويقرأ b ينتمي الى B .(عكسه عدم الانتماء)

- $a \in A \quad , \quad d \notin A$

➢ المجموعة الخالية Empty (null) Set:

- تعرف المجموعة الخالية بانها المجموعة التي لا تحتوي على أي عنصر ويرمز لها بالرمز $\varnothing$. $\varnothing=\{\}$. حيث نلاحظ عدم وجود أي عنصر في المجموعة $\varnothing$.

➢ المجموعة الجزئية Subset:

- اذا كان كل من A,B مجموعة ،يقال ان المجموعة A، هي جزئية من المجموعة B، اذا كان كل عنصر من A ينتمي الى B ، ونعبر عن ذلك بالشكل $(A \subseteq B)$.

- $A_2=\{2,9,1,7\} \qquad A_3=\{9,2\} \qquad A_3 \subseteq A_2$

➢ **ملاحظة:** لو وجد عنصر واحد على الأقل ينتمي الى المجموعة A ولا ينتمي الى المجموعة B ويعبر عن ذلك بالشكل $A \not\subset B$ ويمكن التعبير عن التعريف أعلاه رياضيا كالاتي:

- $A \not\subset B \leftrightarrow \{\exists\ x \in A \ \&\ x \notin B\}$ $A=\{2,9,1,7\}$ $B=\{9,2,3\} \rightarrow A \not\subset B,\ B \not\subset A$

➢ المجموعة الشاملة UNIVERSAL SET :

- اذا كانت جميع المجموعات قيد الدراسة مجموعات جزئية من مجموعة معينة وثابتة، فان هذه المجموعة تسمى بالمجموعة الشاملة. ويرمز لها بالرمز U .

➢ المجموعات المتساوية Equal set:

- يقال لمجموعتين مثل A,B انهما متساويتان اذا وفقط اذا احتوتا على العناصر نفسها ، وبعبارة أخرى عندما يكون كل عنصر في A موجودا في المجموعة B وبالعكس .ويرمز لتساوي المجموعتين A,B بالشكل (A=B) ويمكن التعبير عن تساوي المجموعتين A,B كالاتي:

$$A=B \leftrightarrow \{A\subset B \wedge B\subset A\}$$

➢ومن تعريف تساوي المجموعات يتضح لنا ان المجموعتان A ,B تكونان غير متساويتين اذا وجد في الأقل عنصر واحد في احدى المجموعتين لا ينتمي الى المجموعة الأخرى . وعندئذ نكتب ذلك بالشكل:

$$A\neq B \leftrightarrow \{\exists\ x\in A\rightarrow x\notin B\} \vee \{\exists\ x\in B\rightarrow x\notin A\}$$

- A={2,5,7},B={1,2,3,5},D={,2,7,5} →A=D, A ≠B

➢ المجموعات المنتهية والمجموعات غير المنتهية :

- يقال لمجموعة مثل A انها مجموعة منتهية Finite set اذا كانت مجموعة خالية او كانت تحتوي على عدد من العناصر يمكن عدها (ولو نظريا) وفي غير هذه الحالات يقال للمجموعة بانها مجموعة غير منتهية Infinite set.
- Z={x: 7<x<=30} x عدد صحيح موجب (مجموعة منتهية)
- D={x: x<=30} x عدد صحيح موجب (مجموعة غير منتهية)

- **مجموعة المجموعات Set of Set :**
- يقال لمجموعة مثل S انها مجموعة مجموعات إذا كان كل عنصر من عناصرها على شكل مجموعة.
- مثال: نفرض ان لدينا المجموعات التالية:- E={7,10} , C={3,5} , A={2,3} F={1 }
- فان S={A,C,E,F} تمثل مجموعة مجموعات حيث كل عنصر من عناصرها هو مجموعة بحد ذاته.

➢ مجموعة القوى (مجموعة أجزاء المجموعة) Power Set :

- تعرف مجموعة القوى (مجموعة أجزاء المجموعة) بانها مجموعة جميع المجموعات الجزئية المشتقة من مجموعة معينة. فلو فرضنا A اية مجموعة ، فيرمز لمجموعة القوى للمجموعة A بالرمز **P(A)** ، ويمكن التعبير عنا بالشكل:

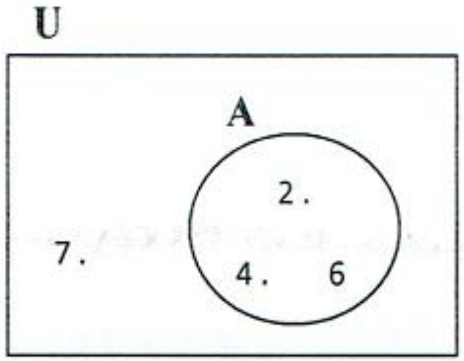
$$P(A)=\{X/ X \subset A\}$$

- **مثال :**
- لتكن A={1,3,0} ،ان المجموعة الجزئية التي يمكن اشتقاقها من المجموعة A هي :
- $\varnothing$, {0} , {1} ,{3} , {0,1} , {0,3} , {1,3} , {0,1,3}=A
- وهذا يعني ان $P(A)=\{\varnothing , \{0\} , \{1\} ,\{3\} , \{0,1\} , \{0,3\} , \{1,3\} , \{0,1,3\}\}$

- **المجموعة القابلة للمقارنة:** لتكن A,B مجموعتان ،يقال بان المجموعتين A,B قابلتان للمقارنة اذا كانت $A \subset B$ او $B \subset A$.
- والا فاتهما غير قابلتان للمقارنة أي عندما $B \not\subset A$ و $A \not\subset B$.
- **مثال:** لتكن $A=\{1,b\}, B=\{b,c,d,1\}, C=\{b,c,d,3\}$ A,B قابلتان للمقارنة $\mathbf{A \subset B}$.
- $\mathbf{B \not\subset C}$ **or** $\mathbf{C \not\subset B}$ غير قابلتان للمقارنة.
- **المجموعة المنفصلة:**
- لتكن A,B مجموعتان . يقال بان المجموعتين A,B مجموعتان منفصلتان اذا استحال الحصول على عناصر مشتركة فيما بينهما. مثل مجموعة الاعداد الفردية ومجموعة الاعداد الزوجية.

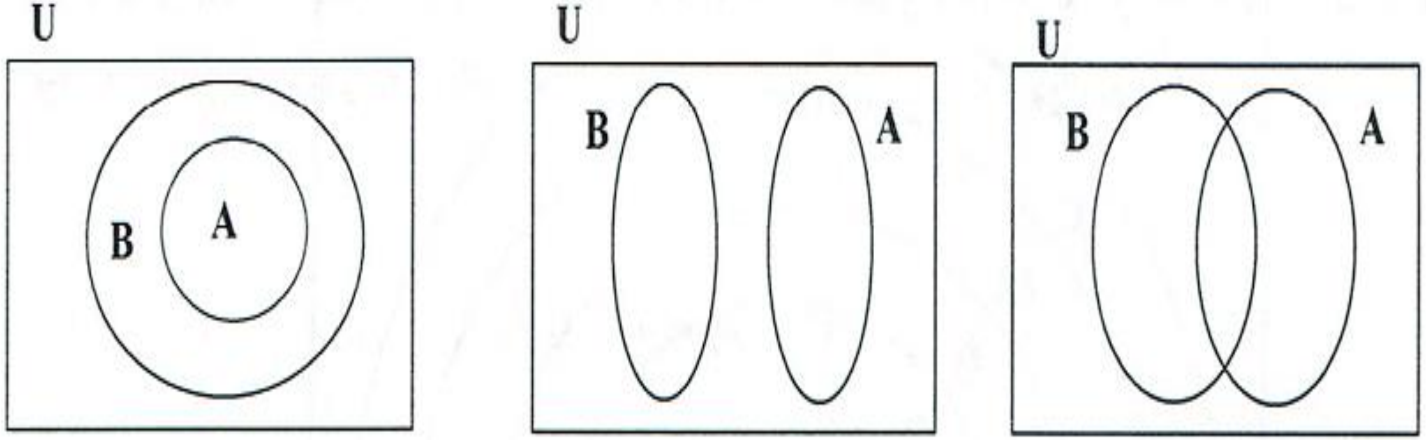
➢مخطط فين Venn Graph :

- أي منحني مغلق منتظم او غير منتظم. سميت بهذا الاسم نسبة الى اول من استخدمها وهو فين اويلر.
- سنستخدم المستطيل او المربع للدلالة على المجموعة الشاملة في مجال معين.
- نستخدم الدوائر للدلالة على أية مجموعة من مجموعات المجموعات الشاملة.
- **مثال:**لتكن $A=\{2,4,6\}$ وليكن $x=7$ لا ينتمي لهذه المجموعة . فان مخطط فين للمثال تكون بالشكل:



➢تمثيل المجموعات القابلة للمقارنة والمجموعات المنفصلة

➢ باستخدام مخططات فين.



➢ مجموعة الاعداد Set of Numbers:

➢ مجموعة الاعداد الطبيعية Natural Number Set :

- يرمز لها بالرمز N ويعبر عنها كالاتي $N=\{0,1,2,3,4,.......\}$ و $N^*=\{1,2,3,4,........\}$

➢ مجموعة الاعداد الصحيحة Integer set :

- هي الاعداد الحقيقية التي يزيد كل منها على العدد الذي قبله بواحد، ووكل عدد فيها لا يحتوي على أي جزء كسري ويرمز لها بالرمز Z . **$Z=\{..........-3,-2,-1.0,1,2,3,.........\}$**
- الاعداد الصحيحة الموجبة $Z^+=\{1,,3,.......\}$ والاعداد الصحيحة السالبة $Z^-=\{......,-3,-2,-1\}$، والصفر هو الحد الفاصل بين الاعداد الصحيحة الموجبة و الاعداد الصحيحة السالبة.

- $E=\{x/x=2y$, عدد صحيح $y\}$ (Even) مجموعة الاعداد الزوجية
- $E=\{.....,-4,-2,0,2,4,......\}$
- $O=\{x/x=2y+1$, عدد صحيح $y\}$ م(Odd) مجموعة الاعداد الفردية
- $O=\{.....,-3,-1,1,3,......\}$
- $P=\{2,3,5,7,11,13,17,19,.......\}$ (Prime مجموعة الاعداد الأولية

➢ مجموعة الاعداد النسبية Q number set:

- يرمز لها بالرمز Q ويعبر عنا كالاتي: $Q=\{a/b, b\neq 0$, عددان صحيحان a,b $\}$

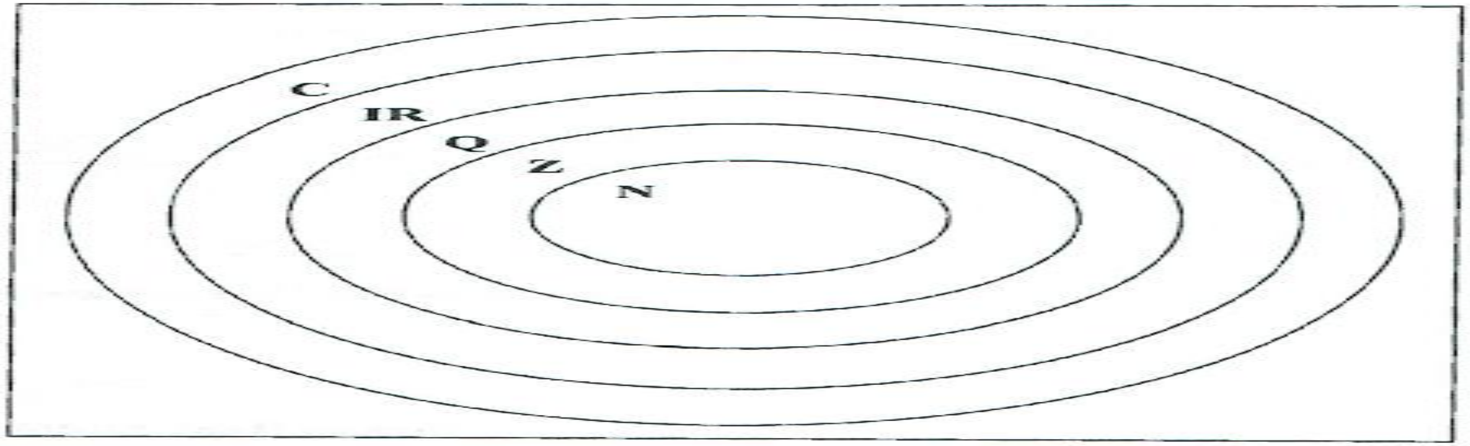
➢ مجموعة الاعداد الحقيقية set of real numbers:

- يمكن تمثيلها على خط مستقيم يسمى بالخط الحقيقي، ويرمز لها بالرمز R/ ويعبر عنها كالاتي:

/R={x/ عدد حقيقي x}

➢ مجموعة الاعداد العقدية Complex Number Set :

- العدد العقدي هو العدد الذي يكتب بالصيغة التالية C=x+iy حيث x,y عددان حقيقيان و $i=\sqrt{-1}$
- يرمز لها بالرمز C ويعبر عنها رياضيا بالشكل: $C=\{c=x+iy, i=\sqrt{-1}, x\in /R, y\in /R\}$

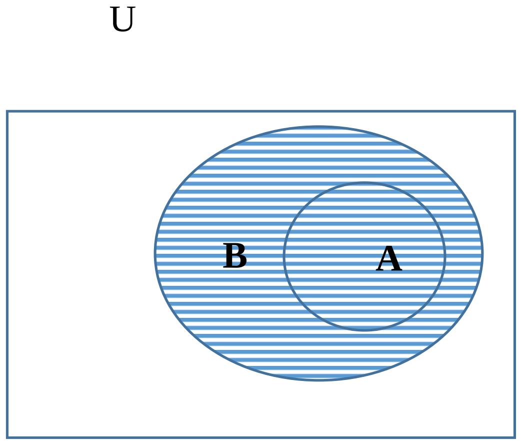


➢جبر المجموعات Algebra of Set:

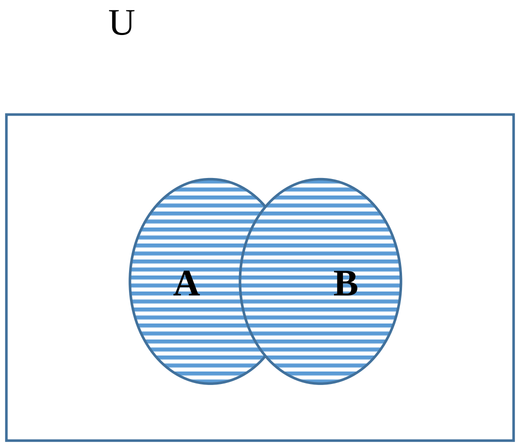
➢اتحاد المجموعات Union of Set:

- لتكن A,B مجموعة ،فان اتحاد A مع B هو مجموعة العناصر التي تنتمي الى المجموعة A او المجموعة B او الى كليهما . ويرمز للاتحاد بالرمز a∪B ورياضيا: $A \cup B=\{x/x \in A \ \vee \ x \in B\}$
- و هذا يعني: $x \in A \cup B \leftrightarrow \{x/x \in A \ \vee \ x \in B\}$

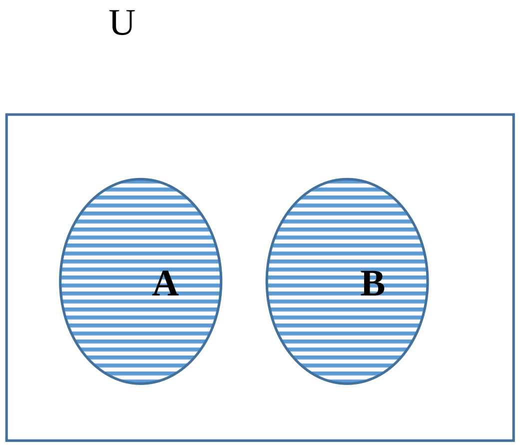
مخطط فين للاتحاد



A∪B



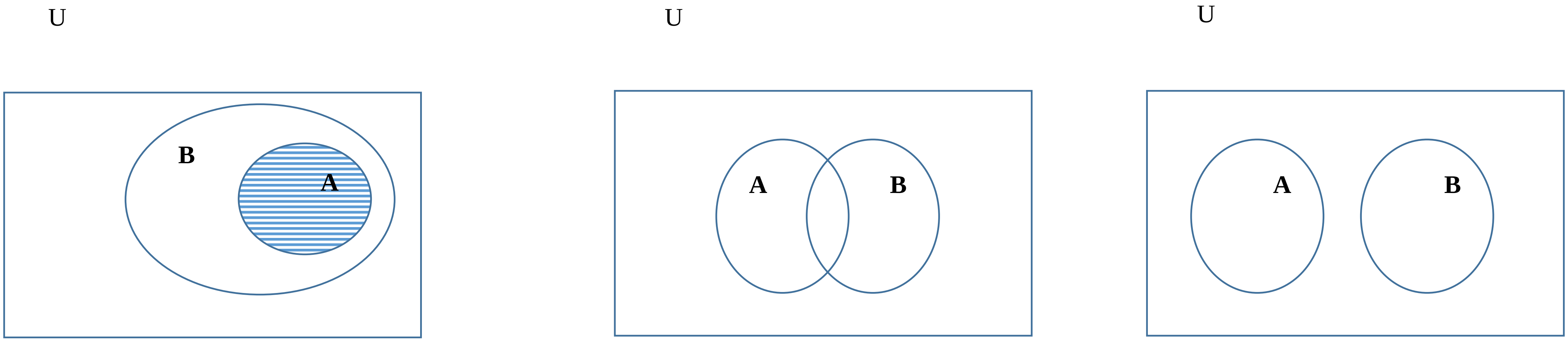
A∪B



A∪B

➢ التقاطع :

- لتكن A,B مجموعة ،فان تقاطع A مع B هو مجموعة العناصر التي تنتمي الى المجموعة A و المجموعة B (أي تنتمي الى كليهما). ويرمز للتقاطع بالرمز $A \cap B$ ورياضيا:
- $A\cap B=\{x/x\in A \ \wedge \ x\in B\}$
- و هذا يعني: $x \in A\cap B \leftrightarrow \{x/x\in A \ \wedge \ x\in B\}$
- مخطط فين للتقاطع



$A\cap B=A$ $\quad$ $A\cap B$ $\quad$ $A\cap B=\varnothing$

- مثال: اذا كان $A=\{1,3,4,5,7,8\}$, $B=\{1,2,3,9\}$, $C=\{2,6,7,8\}$ جد مايلي
- $A \cup B$, $A \cup C$, $A \cup B \cup C$, $A \cap B$, $C \cap B$, $A \cap B \cap C$, $(A \cup B) \cap B$
- $A \cup (B \cap C)$

- $(A \cup B) \cap B$
- $(A \cup B) = \{1,2,3,4,5,7,8,9\}$
- $(A \cup B) \cap B = \{1,2,3,9\} = B$

➢**مبرهنات**: لتكن كل من A,B,C مجموعة

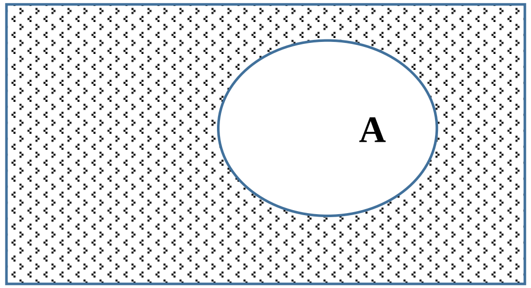
- $A \cup B = B \cup A$ $\qquad$ $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup A = A$ $\qquad$ $A \cap A = A$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $\qquad$ **Associative Law قانون التجميع**
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $A \cup \varnothing = A$ $\qquad$ $A \cap \varnothing = \varnothing$
- $A \cup U = U$ $\qquad$ $A \cap U = A$
- $A \subseteq (A \cup B), B \subseteq (A \cup B)$
- $(A \cap B) \subseteq A, (A \cap B) \subseteq B$

- $A \subset B \leftrightarrow P(A) \subset P(B)$
- $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$

المجموعة المتممة للمجموعة Complement of Set :

- لتكن $A \subset U$ مجموعة ، فان متممة المجموعة A ويرمز لها بالرمز A^C ، ويعبر عنها رياضيا كالاتي:
- $A^c=\{x/x \in U \ \wedge \ x \notin A\}$

وحسب مخطط فين يمكن التعبير عن المتممة بالشكل التالي:



A^C

- مثال: اذا كان $U=\{0,\dots,9\}$, $A=\{1,3,4,5,7,8\}$
- $A^c=\{0,2,6,9\}$
- **مبرهنات:**
- لتكن كل من A,B مجموعة فاذا كان $A \subset B$ فان

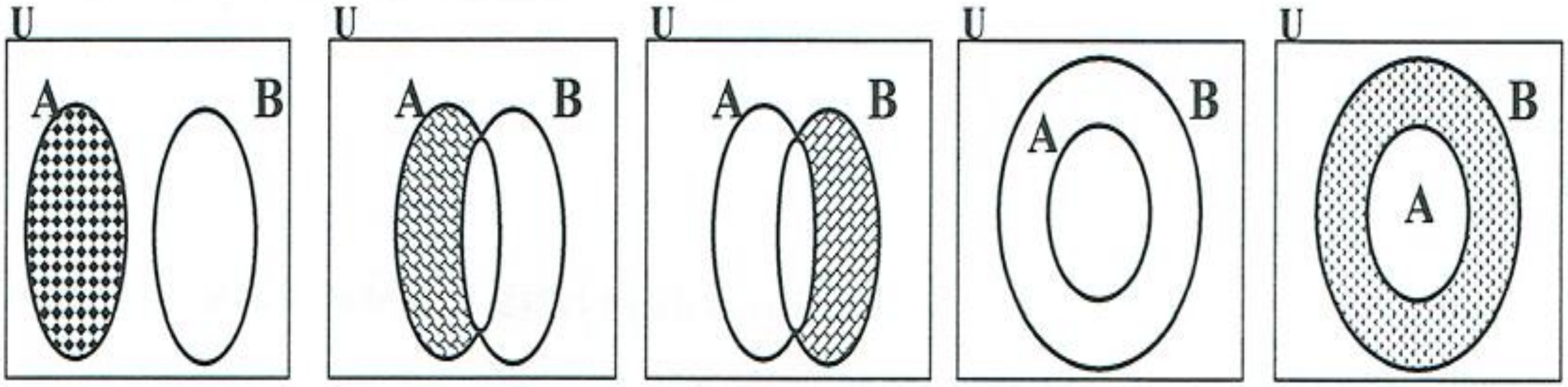
- $B^C \subset A^C$
- $A \cap B^C=\varnothing$
- $B \cap A^C=U$
- $(A^C)^C=A$
- $U^C=\varnothing$, $\varnothing^C=U$
- $A \cap A^C=\varnothing$, $A \cup A^C=U$
- $(A \cup B)^C=A^c \cap B^C$ **Demorgab's Laws**
- $(A \cap B)^C=A^c \cup B^C$ **قانون ديموركن**

➢مجموعة الفضلة (الفرق) Difference Sets :

- لتكن كل من A,B مجموعة فان مجموعة الفضلة يرمز لها A/B او A-B ويعبر عنها رياضيا كالاتي:
- **$A/B=\{x/x \in A \quad \wedge \quad x \notin B\}$**
- $\{1,3,5,7,9\}/\{1,3,5\} =$

$\{7,9\}$

- وحسب مخطط فين يمكن التعبير عن الفضلة بالأشكال التالية:



A / B = A   A / B   B / A   A / B = Ø   B / A

➢ مبرهنات :

- لتكن كل من ِA,B مجموعة فان:

- $A/\varnothing=A$
- $\varnothing/A=\varnothing$
- $A/A=\varnothing$
- $\{A\subset B\}\leftrightarrow\{A/B=\varnothing\}$
- $A/B\subset A$

- **اذا كانت A,B منفصلتان فان:**

- $B/A=B \quad , \quad A/B=A$
- $A/B=A\cap B^C$
- $A/B=B^C/A$

➢ مجموعة الفضلة المتناظرة (الفرق التناظري) Symmetric Difference Set :

- لتكن كل من A,B مجموعة اتحاد المجموعتين B/A ,A/B يسمى بمجموع الفضلة المتناظرة (الفرق التناظري) بين A,B ،ويرمز لها بالرمز A Δ B ،ويعبر عنها رياضيا كلاتي:

$A\Delta B=(A/B) \cup (B/A)$

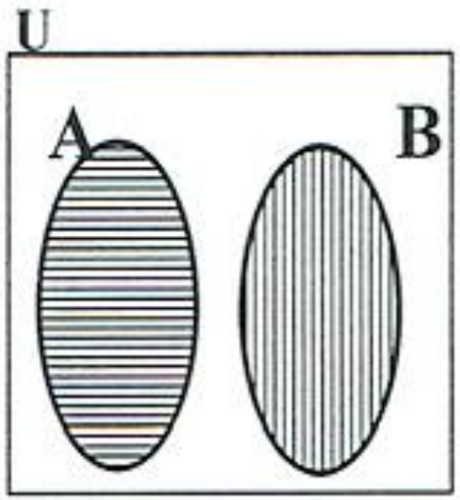
- أي ان :

$A\Delta B=\{x/x\in A\cup B \quad \wedge \quad x\notin A\cap B\}$

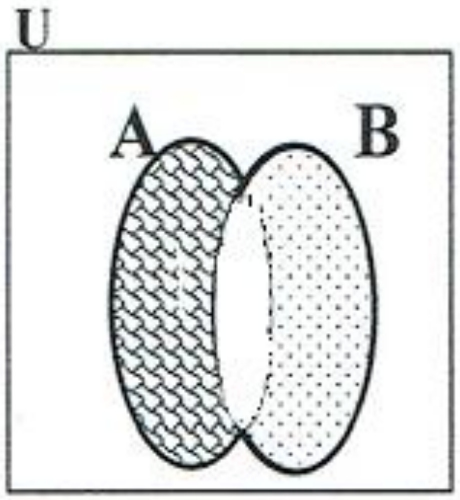
- لتكن المجموعتان $A = \{1,3,5\}$ و $B = \{3,5,7,9\}$ فإن الفرق التناظري:

$A\ \Delta.\ B = \{1,7,9\}$

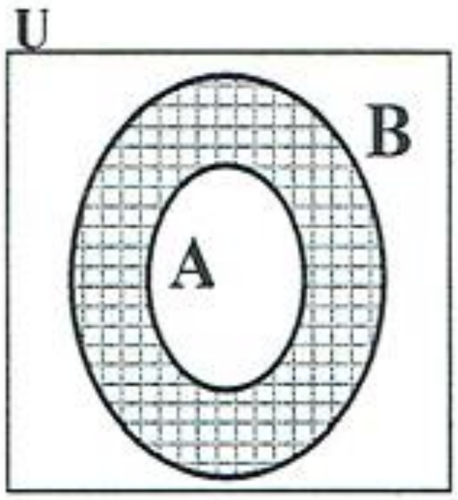
- وحسب مخطط فين يمكن التعبير عن الفضلة المتناظرة بالأشكال التالية:



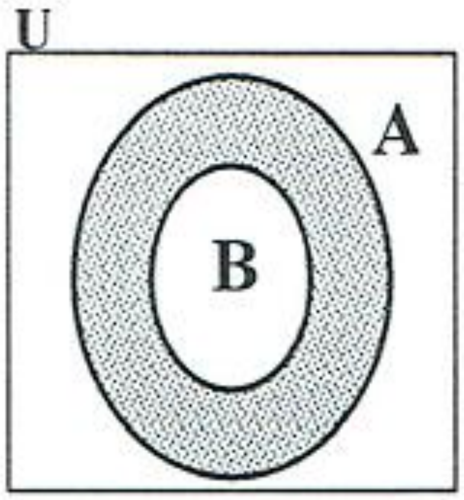
A Δ B



A Δ B



A Δ B



A Δ B

➢مبرهنات:

- $A \Delta B = B \Delta A$
- $A \Delta \varnothing = A$
- $A \Delta A = \varnothing$
- $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$
- $A \Delta B = \varnothing \quad \leftrightarrow \quad A = B$
- $A \Delta B = (A \cup B) / (A \cap B)$

➢مثال: ليكن لدينا المجموعتان $A = \{d،c،b،a\}$ و $B = \{f،e، d،b\}$ فإن

A Δ B=$\{f،e،c،a\}$

- اذا كانت $A = [1,4,7,2,8,3,13]$ $U = [1,2,3,......,13]$ و $B = [1,2,3,4,5,10]$

احسب

- $A/B\&B/A\&A\Delta B\&B^c/A^c\&A^c/B^c$

-

- $A^c - -B^c - -A \cap B^c - -A^c \cup B - -A \cap A^c - -B^c \cup B - -A \cap B^c - -A \cup (A^C \cap B) - -B \cap (A \cup B^C) - -A^C \cup U - -B^C \cup \varnothing - -B^C \cap U - -A^C \cap \varnothing - -U^C - -\varnothing^C$

- $A^c \cup B$

A^c =$\{5,6,9,10,11,12\}$

$A^c \cup B$=$\{1,2,3,4,5,6,9,10,11,12\}$

شكرا جزيلا

الفصل الخامس
العلاقات

حاصل الضرب الديكارتي: مصطلح رياضي معناه تكوين مجموعة عناصرها أزواج مركبة من مجموعتين

مثال1: لتكن $A = \{2 , 5 , 8\}$، $B = \{3 , 6 , 7 , 9\}$ مجموعة فأن حاصل الضرب الديكارتي $A \times B$ هو

$$A \times B = \{ (2,3) , (2,6) , (2,7) , (2,9) , (5,3) , (5,6) , (5,7) , (5,9) , (8,3) , (8,6) , (8,7) , (8,9) \}$$

يلاحظ: ان عدد عناصر $A \times B$ (عدد الازواج)=عدد عناصر A × عدد عناصر B =3*4=12 زوج مركب

مثال2: لتكن $C = \{a , e , f\}$، $D = \{1 , 4 , 7 , 9 \}$ مجموعة فأن حاصل الضرب الديكارتي $D \times C$ هو

$$D \times C=\{(1,a),(1,e),(1,f), (4,a),(4,e),(4,f), (7,a),(7,e),(7,f) , (9,a),(9,e),(9,f)\}$$

$$C \times D=\{(a,1),(a,4),(a,7),(a,9), (e,1),(e,4),(e,7),(e,9), (f,1),(f,4),(f,7),(f,9)\}$$

$C \times C=?$

$D \times D=?$

العلاقات الثنائية: Binary Relations

ليكن كل A , B مجموعة وليكن P(a,b) تعبيراً مفتوحاً فيما يخص المتغيرين a , b حيث $a \in A$ ، $b \in B$.

(التعبير مفتوحا أي صفة او ميزة مثل اكبر , اصغر او يساوي , معادلة b=a+2 وغيرها)

- فأن العلاقة من A الى B يرمز لها بالرمز R حيث R = (A , B , P(a,b))
- P(a,b)(الزوج المركب (a,b)) اذا كان صادقاً فأن العلاقة بين a , b يرمز لها بالرمز a R b .
- P(a,b) (الزوج المركب (a,b))اذا كان كـــــــاذباً فأن عدم وجود العلاقة بين a , b يرمز لها بالرمز $a \not{R} b$.

مثال: لتكن لدينا المجموعة التالية $A = \{ 1,2,3 \}$ و $B = \{ 2,4,5 \}$ مجموعة
ولتكن R علاقة من A الى B معرفة كالاتي:

حيث

$$R = \{ (1,5) , (2,4) , (1,2) , (3,4) \}$$

يمكن القول ان

$R=(A,B,P(a,b))$

$1 \; R \; 5$

أي ان الزوج (1,5) ينتمي للعلاقة R او ممكن كتابتها $(1,5) \in R$

$1 \; \cancel{R} \; 4$

أي ان الزوج (1,4) لا ينتمي للعلاقة R او ممكن كتابتها $(1,4) \cancel{\in} R$

بيان العلاقة: **Graph of the relation**

اذا كانت $R = (A , B , P(a,b))$ فأن بيان العلاقة يرمز له بالرمز R^* حيث

$$R^* = \{ (a,b) / a \in A , b \in B \;\wedge\; a R b \}$$

مثال: لتكن لدينا المجموعة التالية $A = \{ 1,2,3,4,5,6 \}$ ولتكن R علاقة من A الى A معرفة كالاتي:

a يقسم b (أي ان a يقبل القسمة على b بدون باقي) حيث ان $b \in A , a \in A$.

اكتب بيان العلاقة R المعرف بالصيغة اعلاه.

ملاحظة: اذا كانت R علاقة معرفة من A الى نفسها فيقال ان R علاقة على المجموعة A.

الحل:

a/b	b					
a	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)					
2	(2,1)	(2,2)				
3	(3,1)		(3,3)			
4	(4,1)	(4,2)		(4,4)		
5	(5,1)				(5,5)	
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)			(6,6)

R = { (1,1) , (2,1) , (2,2),(3,1),(3,3),(4,1),(4,2),(4,4),(5,1),(5,5),(6,1),(6,2),(6,3),(6,6) } يسمى بيان العلاقة

ومن خلاله نلاحظ ان $R \subset A \times A$

مثال: (واجب)

لتكن لدينا المجموعة التالية $A = \{ 1,3,5,6 \}$ و $B = \{ 2,3,7 \}$ لتكن R علاقة من A الى B معرفة كالاتي: b يقسم a حيث ان $b \in B , a \in A$ اكتب العلاقة.

شكرا جزيلا