University of Mosul
College of Education
For Pure Sciences

محاضرات في مادة التبولوجي

كلية التربية للعلوم الصرفة

قسم الرياضيات

المرحلة الرابعة

أ.م.د. صبيح وديع اسكندر

أ.د. عامر عبد الاله محمد

أ.م.د. بيداء سهيل عبد الله

المحاضرة الاولى

- تعريف (الفضاء التبولوجي):-

- لتكن X مجموعة غير خالية ولتكن : $\tau = \{A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n\}$ عائلة من المجاميع الجزئية من X, يقال للزوج (X,τ) بانه فضاء تبولوجي اذا وفقط إذا تحققت الشروط الثلاثة الاتية :

1. $\phi, X \in \tau$.
2. لكل $(A_\lambda \in \tau)$, $(\lambda \in \Lambda)$ فإن $U_\lambda A_\lambda \in \tau$.
3. لكل $(A_i \in \tau)$ ، $(1 \leq i \leq n)$ فإن $\cap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$ =.

- كذلك تسمى العائلة τ بالتبولوجيا على X. وتسمى عناصر الــ τ بالمجاميع المفتوحة.

- مثال1 / ليكن $X=\{a, b, c\}$
- $\tau=\{\phi, \{a\}, \{a, b\}, X\}$
- هل ان (X,τ) فضاء تبولوجي؟
- SOLv / 1 $\phi, X \in \tau$
- 2 $\phi \cup G_i = G_i \in \tau$ لكل i
- $\{a\} \cup \{a, b\} = \{a, b\} \in \tau$
- $\{a\} \cup X = X \in \tau$
- $\{a, b\} \cup X = \{a, b, c\} = X \in \tau$

- لكل i $\emptyset \cap G_i = \phi \in \tau$ ③
- $\{a\} \cap \{a, b\} = \{a\} \in \tau$
- $\{a\} \cap \{a, b, c\} = \{a\} \in \tau$
- $\{a\} \cap X = \{a\} \in \tau$
- $\therefore$ (X, τ) فضاء تبولوجي.

- مثال2/ ليكن $X=\{a, b, c, d\}$
- $\tau = \{\phi, \{a\}, \{b,c\}, \{a, b,c\}, X\}$
- هل ان (X,τ) فضاء تبولوجي؟
- SOLv / 1 $\phi, X \in \tau$
- 2 $\phi \cup G_i = G_i \in \tau$ لكل i
- $\{a\} \cup \{b,c\} = \{a, b,c\} \in \tau$
- $\{a\} \cup \{a,b,c\} = \{a, b,c\} \in \tau$
- $\{a\} \cup X = X \in \tau$
- $\{b,c\} \cup \{a,b,c\} = \{a, b,c\} \in \tau$
- $\{b,c\} \cup X = X \in \tau$
- $\{a,b,c\} \cup X = X \in \tau$

- $3\ \emptyset \cap G_i = \phi \in \tau$ i لكل
- $\{a\} \cap \{b,c\} = \phi \in \tau$
- $\{a\} \cap \{a, b, c\} = \{a\} \tau \in$
- $\{b,c\} \cap \{a,b,c\} = \{b,c\} \in \tau$
- $\{b,c\} \cap X = \{b,c\} \in \tau$
- $\{a,b,c\} \cap X = \{a,b,c\} \in \tau$
- $\{a\} \cap X = \{a\} \in \tau$

- $\therefore$ (X, τ) فضاء تبولوجي.

- ملاحظة: ان اتحاد تبولوجيتين على مجموعة ما لا يكون بالضرورة تبولوجيا على المجموعة نفسها كما في المثال الاتي :
- مثال \ ليكن $X=\{ a, b, c\}$
- ولتكن
- $\tau_1= \{\phi, \{a\}, X\}$
- $\tau_2= \{\phi,\{b\},X\}$
- نلاحظ بان : τ_1 τ_2و يمثلان تبولوجيتان على X .
- لكن: $\tau_1 \cup \tau_2 = \{\phi,\{a\},\{b\},X\}$ لا تمثل تبولوجيا على X
- لان $\{a\} \cup \{b\} = \{a,b\} \notin \tau$
- نستنتج بان:
- $(X, \tau_1 \cup \tau_2)$ لا يمثل فضاء تبولوجيا.
-
- لكن تقاطعهما يمثل تبولوجيا على X لان $\tau_1 \cap \tau_2 = \{\phi,X\}$.

- مبرهنة: ان تقاطع عائلة من التبولوجيات على مجموعة يكون تبولوجيا على المجموعة نفسها.
- البرهان: نفرض ان $\{\tau_i : i \in I\}$ عائلة من التبولوجيات على X . سوف نثبت ان $\cap_i \tau_i$ هي ايضا تبولوجيا على X .
- اي يجب ان نحقق البديهيات الثلاثة:

1. بما ان لكل $i \in I \iff \tau_i$ تبولوجيا على X و $\phi, X \in \tau_i$ لكل $i \in I$..لذلك فان $\phi, X \in \cap_i \tau_i$.
2. نفرض ان لكل $i \in I$، $G_\lambda \in \tau_i$ لكل $\lambda \in \Lambda$ ، بما ان $\cup_\lambda G_\lambda \in \tau_i$ لان τ_i تبولوجيا على X لكل $i \in I$....لذلك فان $\cup_\lambda G_\lambda \in \cap_i \tau_i$.
3. نفرض ان لكل $i \in I$ ، $G_i \in \tau_i$، بما ان $\cap_{i=}^{n} G_i \in \tau_i$ لان τ_i تبولوجيا على X لكل $i \in I, 1 \leq i \leq n$,....لذلك فان $\cap_{i=1}^{n} G_i \in \cap_i \tau_i$.

- نستنتج بان $\cap_i \tau_i$ هي ايضا تبولوجيا على X ، $(X, \cap_i \tau_i)$ يمثل فضاء تبولوجيا . ▰

المحاضرة الثانية

- مشتقة المجموعة (نقاط الغاية)
- (Derived of a Set) (Limit points of a Set)
-
- تعريف (نقطة الغاية):
- ليكن (X, τ) فضاء تبولوجيا ، ولتكن $A \subseteq X$ ، يقال عن النقطة $x \in X$ انها نقطة غاية لــ A اذا وفقط اذا حققت الشرط الاتي:
- لكل مجموعة مفتوحة G تحتوي على النقطة x يكون: $A \cap G - \{x\} \neq \phi$ ، بمعنى ان كل مجموعة مفتوحة G تحتوي على النقطة x يجب ان تحتوي على نقطة في A تختلف عن x.
-
- تعريف(المجموعة المشتقة):
- ليكن (X, τ) فضاء تبولوجيا ، ولتكن $A \subseteq X$ ، نرمز لمجموعة كل نقاط الغاية للمجموعة A بالرمز $d(A)$ وتسمى بالمجموعة المشتقة اي ان:
- $d(A) = \{ x \in X : A \cap G - \{x\} \neq \phi \quad \forall x \in G \in \tau \}$

- $\tau = \{\phi,\{a\},\{b,d\},\{a, b, d\},\{b,c,d,e\},X\}$, $X = \{a, b, c, d,e \}$ مثال / لتكن
- $B = \{b, c, d\}$, $A = \{a, b, c\}$
- اوجد $d(A)$ و $d(B)$.
- الحل/الان سنقوم بايجاد $d(A)$:
- $1)\ a \in X$
- المجاميع المفتوحة الحاوية على a هي:-
- $\{a\}$, $\{a, b, d\}$, X
- $A \cap \{a\} - \{a\} = \{a\} - \{a\} = \phi$
- $\therefore a \notin d(A)$

-
- ② $b \in X$
- المجاميع المفتوحة الحاوية على b هي :-
- $\{b, d\}\ \ \{a, b, d\}, \{b, c, d, e\}, X$
- $A \cap G - \{b\} = \{b\} - \{b\} = \phi$
- $\therefore \{b\} \notin d(A)$

- ③ $c \in X$

- المجاميع المفتوحة الحاوية على c هي :-

- $\{b,c,d,e\}$, X
- $A \cap G - \{c\} \neq \phi$
- $\{a, b, c\} \cap \{b, c, d, e\} - \{c\} = \{b, c\} - \{c\} = \{b\} \neq \phi$
- $\{a,b,c\} \cap X - \{c\} = \{a,b,c\} - \{c\} = \{a, b\} \neq \phi\phi$
- $\therefore c \in d(A)$

- $d \in X$ ④
- المجاميع المفتوحة الحاوية على d هي:-
-
- $\{b, d\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d, e\}, X$
- $A \cap G - \{d\} \neq \phi$
- $A \cap \{b,d\} - \{d\} = \{b\} - \{d\} = \{b\} \neq \phi$
- $A \cap \{a,b,d\} - \{d\} = \{a,b\} - \{d\} = \{a,b\} \neq \phi$
- $A \cap \{b,c,d,e\} - \{d\} = \{b,c,\} - \{d\} = \{b,c,\} \neq \phi$
- $A \cap X - \{d\} = A - \{d\} = A \neq \phi$
- $\therefore d \in d(A)$
- $e \in X$ ⑤
- المجاميع المفتوحة الحاوية على e هي:-
-
- $\{b,c,d,e\}, X$
- $A \cap G - \{e\} \neq \phi$
- $A \cap \{b,c,d,e\} - \{e\} = \{b,c,\} - \{e\} = \{b,c,\} \neq \phi$
- $A \cap X - \{e\} = A - \{e\} = A \neq \phi$
- $\therefore e \in d(A)$
- $\therefore d(A) = \{c,d,e\}$

- المجموعة المغلقة والانغلاق في الفضاء التبولوجي
- **Closed set and Closure of a set**
- **تعريف (المجموعة المغلقة)**
- **ليكن (X,τ) فضاء تبولوجيا، عندئذ يقال للمجموعة $\boldsymbol{E \subseteq X}$ الجزئية من X بانها مغلقة اذا احتوت على جميع نقاط غايتها اي ان:**
- $d(\boldsymbol{E}) \subseteq \boldsymbol{E}$

- مثال/لتكن
- $X=\{a,b,c,d\}$
- $\tau = \{\phi\{a\},\{b,c\},\{a,b,c\},X\}$
- $E=\{a,d\}$
- هل ان E مغلقة؟
- الحل/
- 1. $a \in X$
- المجاميع المفتوحة الحاوية علىa هي:-
- $\{a\},\{a,b,c\},X$
- $E\cap\{a\} - \{a\}=\{a\} - \{a\}=\phi$
- $\therefore a\notin d(E)$

- 2. $b \in X$
- المجاميع المفتوحة الحاوية b هي:-
- {b,c},{a,b,c},X
- $E \cap \{b,c\} - \{b\} = \{b\} - \{b\} = \phi$
- $\therefore b \notin d(E)$

- $c \in X$ .3
- المجاميع المفتوحة الحاوية على c هي:-
- $\{b,c\}\{a,b,c\},x$
- $E \cap \{b,c\} - \{c\} = \phi - \{c\} = \phi$
- $d \in X$ .4
- المجاميع المفتوحة الحاوية d هي:-
- X
- $E \cap X - \{d\} = \{a,d\} - \{d\} = \{a\} \neq \phi$
- $\therefore d \in d(E)$
- $\therefore d(E) = \{d\} \subseteq (E = \{a,d\})$
- نستنتج بان Eمجموعة مغلقة لأنها تحوي جميع نقاط غايتها.

- للتحقيق: بما انه Eمجموعة مغلقة وهذا الذي حصلنا عليه، فيجب ان تكون متممتها E^C مجموعة مفتوحة.
- $E^C = \{b, c\} \in \tau$
- نستنتج بان متممة E مفتوحة فعلا. وبذلك نكون قد تحققنا بان الحل صحيح.

المحاضرة الثالثة

مبرهنة: اذا كان A,B,C مجاميع جزئية من الفضاء التبولوجي(X,τ),   فان:

1. $d(\phi)=\phi$.
2. اذا كانت $A\subseteq B$فان $d(A)\subseteq d(B)$.
3. اذا كانت $x\in d(A)$ فان$x\in d(A\backslash\{x\})$.
4. $d(A\cup B)=d(A)\cup d(B)$.

- البرهان:

1. لكل X $x \in$ ولكل $G \in \tau$ تحتوي على x نحصل على انه:

- $\phi \cap G - \{x\} = \phi$

- نستنتج بان $d(\phi) = \phi$.

1. نفرض انه $A \subseteq B$ ونفرض بان$x \in d(A$)، نحصل على انه لكل مجموعة مفتوحة G تحتوي على x نحصل على انه :

- $A \cap G - \{x\} \neq \phi$ ....(1)
- $\because A \subseteq B \longrightarrow A \cap G \subseteq B \cap G$
- $\rightarrow \phi \neq A \cap G - \{x\} \subseteq B \cap G - \{x\}$

- نحصل على $B \cap G - \{x\} \neq \phi$.
- نستنتج بان $x \in d(B)$ و $d(A) \subseteq d(B)$.

1. نفرض انه $x \in d(A)$ ، الان لكل مجموعة مفتوحة G تحتوي على x نحصل على انه:

- $A \cap G - \{x\} \neq \phi$
- $A \cap G \cap \{x\}^C \neq \phi$
- بما ان $A \cap A = A$ نحصل على :
- $A \cap G \cap [\{x\}^C \cap \{x\}^C] \neq \phi$
- *وبما ان عملية التقاطع إبداليه نحصل على:*
- $A \cap \{x\}^C \cap G \cap \{x\}^C \neq \phi$
- $\longrightarrow (A / \{x\}) \cap G - \{x\} \neq \phi$
- *نستنتج بان* $x \in d(A / \{x\})$.

1. بما ان $A \subseteq A \cup B$ و $B \subseteq A \cup B$ ، من النقطة (2) نحصل على ان :

- $d(A) \subseteq d(A \cup B)$ و $d(B) \subseteq d(A \cup B)$.
- نستنتج بان:
- $d(A) \cup d(B) \subseteq d(A \cup B)$ ....(1)
- الان نفرض انه $x \notin (d(A) \cup d(B))$
- $x \notin d(B) \quad \wedge \quad x \notin d(A) \longrightarrow$
- بما ان $x \notin d(A)$ توجد مجموعة مفتوحة G_A تحتوي على x بحيث ان:
- $A \cap G_A - \{x\} = \phi$....................(2)
- وبما ان $x \notin d(B)$ توجد مجموعة مفتوحة G_B تحتوي على x بحيث ان:
- $B \cap G_B - \{x\} = \phi$....................(3)
- لتكن $G = G_A \cap G_A$

- عندئذ G مجموعة مفتوحة تحتوي على x ومن (2) نحصل على انه:
- $A \cap G - \{x\} = \phi$……………….(4)
- ومن (3) نحصل على:
- $B \cap G - \{x\} = \phi$……………….(5)
- من (4) و(5) نحصل على :
- $(A \cup B) \cap G - \{x\} = \phi$
- نستنتج بان:
- $x \notin d(A \cup B)$
- ▰.

- تعريف (الفضاء البابي):
- يقال للفضاء التبولوجي (X,τ) بانه فضاء بابي اذا كانت كل مجموعة جزئية من X هي مجموعة مفتوحة او مغلقة.
-
- مثال1 / لتكن :
- $\tau = \{\phi,\{a\},X\}$, $X = \{a, b\}$
- *هل ان* (X,τ) يمثل فضاء بابي ام لا ولماذا؟
- من الواضح ان المجاميع الجزئية من X هي $\{a\},\{b\}$ ،
- المجاميع المفتوحة هي : $\{\phi,\{a\},X$
- *المجاميع المغلقة هي:* $\{\phi,\{b\},X$ ،
- *نستنتج بان* (X,τ) فضاء بابي لأنه كل مجموعة جزئية من X هي مجموعة مفتوحة او مغلقة.

- مثال2 / لتكن :
- $\tau = \{\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\},X\} \quad , \quad X = \{a, b,c \}$
- هل ان (X,τ) يمثل فضاء بابي ام لا ولماذا؟
- من الواضح ان المجاميع الجزئية من X هي: $\{a\},\{b\}$ $,\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}$ ،
- المجاميع المفتوحة هي : $\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\},X$
- *المجاميع المغلقة هي:* $\{\phi,\{b,c\},\{a,c\},\{c\},X$ ،
- *نستنتج بان* (X,τ) فضاء بابي لأنه كل مجموعة جزئية من X هي مجموعة مفتوحة او مغلقة.

المحاضرة الرابعة

- انـغلاق الـمجموعة
- (Closure of a set)

- تعريف(1 - 6):-
- ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي ولتكن $E \subseteq X$ مجموعةجزئية من X ، يعرف انغلاق المجموعة E ويرمز له بالرمز $\overline{E}$ بانه تقاطع كل المجاميع المغلقة التي تحتوي على E اي ان:
- $\overline{E}=\cap_i \ F_i$
- حيث ان F_i مجموعة مغلقة لكل i و $E \subseteq F_i$ لكل i ، $E \subseteq \overline{E}$.
- ملاحظة:- Eمجموعة مغلقة اذا وفقط اذا كانت $E = \overline{E}$،
- $\overline{E}$ مجموعة مغلقة لأنـها ناتجة من تقاطع مجاميع مغلقة و $\overline{E} \subseteq F_i$ لكل i .

- مثال/لتكن
- $X=\{a,b,c,d,e\}$
- $\tau=\{\phi,\{a\},\{b,c\},\{a,b,c\},\{b,c,d,e\},X\}$
- اذا كانت $E_1=\{a,b\}$, $E_2=\{d,e\}$, $E_3=\{b,c\}$
- جد $\overline{E}_1,\overline{E}_2,\overline{E}_3$؟
- الحل: المجاميع المغلقة في X هي:
- $\tau^c=\{X,\{b,c,d,e\},\{a,d,e\},\{d,e\},\{a\},\phi\}$
- المجاميع المغلقة الحاوية على E_1 هي X فقط
- $\therefore$ $\overline{E}_1= X$

- المجاميع المغلقة الحاوية على E_2 هي X,{b,c,d,e},{a,d,e},{d,e}
- $\therefore \overline{E}_2 = X \cap \{b,c,d,e\} \cap \{a,d,e\} \cap \{d,e\} = \{d,e\}$
- المجاميع المغلقة الحاوية على E_3 هي X,{b,c,d,e}
- $\therefore \overline{E}_3 = X \cap \{b,c,d,e\} = \{b,c,d,e\}$

- مبرهنة: لتكن X $E \subseteq$ مجموعةجزيية من الفضاء التبولوجي (X,τ)، عندئذ يكون:
- $\overline{E} = E \cup d(E)$
- البرهان:1. سوف نثبت ان $E \cup d(E) \subseteq \overline{E}$.
- بما ان $E \subseteq F_i$ لكل i ، نحصل على:
- $E \subseteq \cap F_i = \overline{E}$
- $\Longrightarrow E \subseteq \overline{E}$……………(1)
- من (1) نحصل على:
- $d(E) \subseteq d(\overline{E})$…………….(2)
- بما ان $\overline{E}$ مجموعة مغلقة نحصل على:
- $d(\overline{E}) \subseteq \overline{E}$……………….(3)
- من (2) و(3) نحصل على :
- $d(E) \subseteq \overline{E}$……………….(4)
- بأخذ اتحاد (1) و (4) نحصل على :
- $E \cup d(E) \subseteq \overline{E}$……………(*)

- الاتجاه الثاني : سوف نثبت ان $\overline{E} \subseteq E \cup d(E)$.
- بما ان
- $\overline{E} \subseteq F_i$ لكل i و $E \subseteq F_i$ لكل i . يكفي ان نبرهن ان $E \cup d(E)$ مجموعة مغلقة، او ان نبرهن ان $(E \cup d(E))^C$ مجموعة مفتوحة.
  - الان نفرض انه $x \notin (E \cup d(E))$
  - هذا يعني ان :
  -
  - $\longrightarrow x \notin E \quad \wedge \quad x \notin d(E)$
  - بما ان $x \notin d(E)$ توجد مجموعة مفتوحة G_x تحتوي على x بحيث ان:
  - $E \cap G_x - \{x\} = \phi$
  - وبما ان $x \notin E$ نحصل على انه:
  - $G_x \cap E = \phi$
  - هذا يعني انه:
  - $G_x \subseteq E^C$................(1)*
  - هذا يعني ان G_x لا تتقاطع مع جميع نقاط E .
  - بمعنى
  - $G_x \subseteq d(E)^C$................(2)*
- من *(1) و *(2) نحصل على :
- $(E \cup d(E))^C = \cup \{G_x : x \notin E \cup d(E)\}$
- نستنتج بان $(E \cup d(E))^C$ مجموعة مفتوحة، $(E \cup d(E))$ مجموعة مغلقة.
- بذلك نحصل على :
  - $\overline{E} \subseteq E \cup d(E)$...................(**)
  - من (*) و (**) نحصل على $\overline{E} = E \cup d(E)$.

- بديهيات الانغلاق:-

1. $\overline{X} = X$ ، $\overline{\phi} = \phi$.
2. $\overline{E}$ هي اصغر مجموعة مغلقة تحتوي على E .
3. E مجموعة مغلقة $\Leftrightarrow E = \overline{E}$.
4. $\overline{\overline{E}} = \overline{E}$.
5. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

- البرهان:

- $\overline{A \cup B} = (A \cup B) \cup d(A \cup B) = (A \cup B) \cup \big(d(A) \cup d(B)\big)$
- $= \big(A \cup d(A)\big) \cup \big(B \cup d(B)\big)$
- $= \overline{A} \cup \overline{B}. \blacksquare$

- ملاحظة: البديهية الخامسة ليس من الضروري ان تتحقق في حالة قمنا باستبدال الاتحاد بالتقاطع كما في المثال الاتي:

- مثال: اعط مثال تبين فيه ان $\bar{B} \cap \bar{A} \neq \overline{A \cap B}$.
- الحل: لتكن:
- $X=\{a,b,c,d,e\}$
- $\tau=\{\phi,\{a\},\{b,c\},\{a,b,c\},\{b,c,d,e\},X\}$
- اذا كانت $A=\{a,b,d\}$, $B=\{c,d\}$
- المجاميع المفتوحة هي: $\phi ,\{a\},\{b,c\},\{a,b,c\},\{b,c,d,e\},X$
- المجاميع المغلقة هي: $\phi ,\{b,c,d,e\},\{a,d,e\},\{d,e\},\{a\},X$
- $A \cap B = \{d\}$
- المجاميع المغلقة التي تحوي A هي X فقط لذلك نحصل على: $\bar{A} = X$.
- المجاميع المغلقة التي تحوي B هي X و $\{b,c,d,e\}$ لذلك نحصل على:
- $\bar{B} = X \cap \{b,c,d,e\} = \{b,c,d,e\}$.
- المجاميع المغلقة التي تحوي $A \cap B$ هي X و $\{b,c,d,e\},\{a,d,e\},\{d,e\}$ لذلك نحصل على:
- $\overline{A \cap B} = \{d,e\}$.
- $(\bar{A} \cap \bar{B} = \{b,c,d,e\}) \neq (\overline{A \cap B} = \{d,e\})$
- نستنتج بان $\bar{B} \cap \bar{A} \neq \overline{A \cap B}$.

المحاضرة الخامسة

داخل المجموعة

(interior of a set)

-

- تعريف:-

- ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي ولتكن $E \subseteq X$ مجموعةجزبية من X ، يعرف داخل المجموعة E ويرمز له بالرمز E° بانه اتحاد كل المجاميع المفتوحة المحتواة في E اي ان:

- $E^\circ = \cup_i \ G_i$

- حيث ان G_i مجموعة مفتوحة لكل i و $G_i \subseteq E$ لكل i ، $E^\circ \subseteq E$.

- ملاحظة:- Eمجموعة مفتوحة اذا وفقط اذا كانت $E^\circ = E$

- $E^\circ \cap E^C = \phi$

- E° مجموعة مفتوحة.

- مثال1/ليكن $X=\{a,b\}$
- $\tau=\{\phi,\{a\},X\}$
- $E=\{b\}$
- جد E° ؟
- المجاميع المفتوحة المحتواة في E هي ϕ فقط لذلك نحصل على:
- $E^{\circ}=\emptyset$

- مثال2/ليكن $X=\{a,b,c,d,e\}$
- $\tau=\{\phi,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\},x\}$
- $A=\{a,b,c\}$, $B=\{a,c,d\}$
- جد A°, B°؟
- الحل:
- المجاميع المفتوحة المحتواة في A هي $\{a\},\phi$ لذلك $A^{\circ}=\phi\cup\{a\}=\{a\}$
- المجاميع المفتوحة المحتواة في B هي $\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\phi$ لذلك نحصل على:
- $B^{\circ}=\phi\cup\{a\}\cup\{c,d\}\cup\{a,c,d\}=\{a,c,d\}$

- مبرهنة: لكل مجموعة $X \supseteq E$ جزئية من الفضاء التبولوجي (X,τ)، عندئذ يكون:
- $E^o = \overline{E^C}^C$
- البرهان:1. سوف نثبت ان $\overline{E^C}^C \subseteq E^o$.
- لتكن
- $x \in \overline{E^C}^C \longrightarrow x \notin \overline{E^C} \quad \longrightarrow x \notin (E^C \cup d(E^C)) \longrightarrow x \notin E^C \wedge x \notin d(E^C)$
- بما ان $x \notin d(E^C)$ توجد مجموعة مفتوحة G_x تحتوي على x بحيث ان:
- $E^C \cap G_x - \{x\} = \phi$
- وبما ان $x \notin E^C$ نحصل على انه:
- $G_x \cap E^C = \phi$
- هذا يعني انه:
- $x \in G_x \subseteq E$
- وعليه فان:
- $x \in \cup G_x = E^\circ$
- نستنتج بان: $\overline{E^C}^C \subseteq E^o$ ....(1)

- الاتجاه الثاني سوف نثبت ان $E^o \subseteq \overline{E^C}^C$.
- لتكن $x \in E^\circ$
- عندئذ E° مجموعة منفصلة عن E^C اي ان:
- $E^\circ \cap E^C = \phi \longrightarrow E^\circ \cap E^C - \{x\} = \phi \longrightarrow x \notin d(E^C)$
- وبما ان $x \notin E^C$ لان E° مجموعة منفصلة عن E^C و $x \in E^\circ$(بالفرض)، نحصل على:
-
- $x \notin (E^C \cup d(E^C)) \longrightarrow \quad x \notin \overline{E^C} \longrightarrow x \in \overline{E^C}^C$
- نستنتج بان : $E^o \subseteq \overline{E^C}^C$ ....(2)
- من (1) و (2) نحصل على : $E^o = \overline{E^C}^C$. ▰

- بديهيات الداخل:-

1. $X^{\circ} = X$ ، $\phi^{\circ} = \phi$.
2. E^{o} هي اكبر مجموعة مفتوحة جزئية من E .
3. $E^{o} \subseteq E$.
4. $E^{\circ\circ} = E^{o}$.
5. $(A \cap B)^{\circ} = A^{\circ} \cap B^{\circ}$

- البرهان:

- $(A \cap B)^{\circ} = \overline{(A \cap B)^{C}}^{C} = \overline{A^{C} \cup B^{C}}^{C}$
- $(\overline{A^{C}} \cup \overline{B^{C}})^{C} = \overline{A^{C}}^{C} \cap \overline{B^{C}}^{C} = A^{\circ} \cap B^{\circ}. \blacksquare$

- ملاحظة: البديهية الخامسة ليس من الضروري ان تتحقق في حالة قمنا باستبدال التقاطع بالاتحاد كما في المثال الاتي:

- مثال: اعط مثال تبين فيه ان $(A \cup B)^\circ \neq A^\circ \cup B^\circ$
-
- الحل: لتكن:
-
- $X=\{a,b,c,d,e\}$
- $\tau=\{\phi,\{a\},\{b,c\},\{a,b,c\},\{b,c,d,e\},X\}$
- اذا كانت $A=\{a,b,d\}$, $B=\{c,d\}$
- المجاميع المفتوحة هي: $\phi ,\{a\},\{b,c\},\{a,b,c\},\{b,c,d,e\},X$
- $A \cup B = \{a,b,c,d\}$
- *المجاميع المفتوحة المحتواة في* A هي $\{a\}$ و ϕ لذلك نحصل على: $A^o = \{a\}$.
- *المجاميع المفتوحة المحتواة في* B هي ϕ فقط لذلك نحصل على: $B^o = \phi$.
- *المجاميع المفتوحة المحتواة في* $A \cup B$ هي: ϕ و $\{b,c\},\{a\},\{a,b,c\}$ لذلك نحصل على:
- $((A \cup B)^\circ = \{a,b,c\}) \neq (\{a\} = A^\circ \cup B^\circ)$
-
-
- نستنتج بان $(A \cup B)^\circ \neq A^\circ \cup B^\circ$