جامعة الموصل
كلية التربية للعلوم الصرفة
قسم الفيزياء

الرياضيات
MATHEMATICS

المرحلة الاولى
مدرس المادة: م.هشام انور صالح
م.م.سرى محمد جمال

المحاضرة (1)

مفهوم الدالة

Concept of Function

الدالة FUNCTION: هي علاقة تربط كل عنصر 'a' من المجموعة A ، بعنصر واحد 'b' من مجموعة أخرىB ، ويعبر عن ذلك بالرموز كالتي:

$f: A \rightarrow B$ بمعنى اخر : أذا كانت fدالة من A الى B وكان $(a, b) \in f$، فأننا نكتب $b = f(a)$

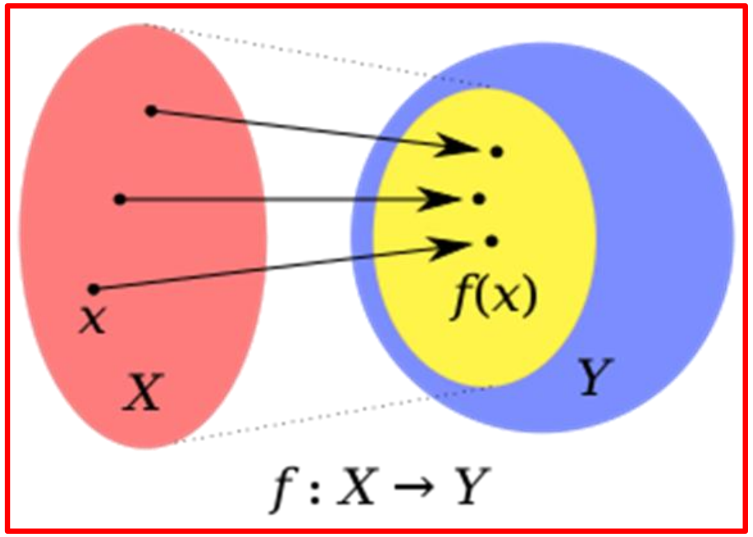
تعريف:

لتكن $f: A \rightarrow B$. تسمى المجموعة A(مجال) domainالدالة f، كما تسمى المجموعة B(المجال المقابل) rangeالدالة f. ويطلق على المجموعة التي تتكون من صورة كل عنصر من عناصر المجموعة A بفعل f مدى range الدالة، ويرمز لها: $f(A)$ أو Rf، أي أن: $f(A) = \{ f(a): a \in A\}$ or $Rf = \{ f(a): a \in A\}$.

أي أن مدى الدالة هو مجموعة القيم الفعلية للدالة f.

أما منطلق الدالة fفيعرف بالمجموعة التالية: $Df = \{a : b = f(a), a \in A\}$

أذا، فالدالة هي علاقة يرتبط كل عنصر في منطلقها بعنصر واحد فقط في مداها.



رسم الدالة ~~FUNCTIONS AND THEIR GRAPHS~~

اذا كانت f دالة ذات مجال D فان رسمها البياني يتكون من نقاط في المستوي الاحداثي الديكارتي وتكون عبارة عن زوج مرتب من المدخلات (قيم x) والمخرجات (قيم y).

مثال: هل الدالة االتية شاملة؟.

$f(x) = 2x + 1$، حيث $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

الحل: ليكن y أي عنصر في مستقر الدالة(أي أن $y \in \mathbb{R}$). لكي يكون y ة لعنصر ماصور

x في المنطلق، يجب أن يكون $y = 2x + 1$. ولكن

$y = 2x + 1 \Longrightarrow x = y - 1$

2

وعليه، فأن

$f(x) = 2x + 1 = 2\ (y - 1$

$y = 1 + (\ 2$

أي أن y ة للعنصرصور

$y{-}1$

2

بفعل هذه الدالة. اذا كل عنصر $y \in \mathbb{R}$ ة للعنصرهو صور

$x \in \mathbb{R}$. وهكذا يكون $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. أذا f دالة شاملة. الحظ بأن f دالة متباينة أيضا.

- **مثال: هل الدالة التية شاملة؟.**
- $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ حيث، $g(x) = x+1$
- x
- الحل:نفرض أن $y \in \mathbb{R}$ في مدى الدالة، فأنعنصر ا
- $y = x + 1$
- $x \Longrightarrow x = 1$
- $y - 1$
- بشرط أن $y \neq 1$.
- وهكذا العدد 1 ال ينتمي الى مدى الدالة g، ولكنه ينتمي الى المستقر $\mathbb{R}$.أي أن المدى للدالة
- g ال يساوي المستقر $\mathbb{R}$، أذا $g(\mathbb{R}) \neq \mathbb{R}$.وبذلك تكون الدالة g غير شاملة.
- تعريف:الدالة المتقابلة one-to-one onto function (bijective function)
- يقال للدالة $f: A \to B$ أنها متقابلة أذا كانت متباينة وشاملة.
- مثال: الدالة $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$، حيث $f(x) = 2x + 1$ دالة متقابلة النها متباينة وشاملة.

- تعريف:الدالة الذاتية Identity function
- يقال للدالة $f: A \to B$ أنها دالة ذاتية اذا كان $f(x) = x$ لكل $x \in A$.
- الحظ أن أي دالة ذاتية تكون متقابلة.
- لتكن $A = \{2, 4, 6, 8\}$ و $f = \{(2, 2), (4, 4), (6, 6), (8, 8)\}$، فأن
- $f: A \to A$ دالة ذاتية.

- **تعريف:دالة القيمة المطلقة The absolute value function**
- هي الدالة$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$بحيث أن لكل$x \in \mathbb{R}$،$x| = |f(x)|$. أي أن
- $f(x) = |x| = \{ x , x \geq 0$ عندما
- $-x , x < 0$ عندما
- واضح أن مدى دالة القيمة المطلقة هو مجموعة العداد الحقيقية غير السالبة$[0, \infty)$.
- 21
- خواص القيمة المطلقة
- ليكن y، xعددان حقيقيان فأن:
- 1) $|x| \geq 0$
- 2) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- 3) $|x$
- $|x| = |y|$
- y
- 4) $|x + y| \leq |x| + |y|$
- 5) $|x| \leq y \Leftrightarrow -y \leq x \leq y$
- 6) $|x| \geq y \Rightarrow x \geq y \text{ or } x \leq -y$

مثال:اذا كان $x = -3$, $y = 2$ فجد كل مما يأتي:

$$|x| , |y| , |x + y| , |x| + |y| , |x - y| , |x| - |y|$$

الحل:

$$|x| = |-3| = 3 , |y| = |2| = 2$$

$$|x + y| = |-3 + 2| = |-1| = 1$$

$$|x| + |y| = |-3| + |2| = 3 + 2 = 5$$

$$|x - y| = |-3 - 2| = |-5| = 5$$

$$|x| - |y| = |-3| - |2| = 3 - 2 = 1$$

مثال:جد مجموعة الحل للمتاينات االتية

$x - 4| \leq 8 \ , \ |2x - 4| \geq 82|$

الحل:

$x - 4| \leq 8 \Rightarrow -8 \leq 2x - 4 \leq 8 \Rightarrow -4 \leq 2x \leq 122|$

$x \leq 6 \geq 2- \Rightarrow$

وعليه فأن مجموعة الحل هي: $x \ni [-2, 6$,2-] [6

$x - 4| \geq 82|$

مجموعة الحل هي:$6[U[2- ,\infty-) \in (-\infty, -2]U[6$: $(\infty ,x \in (-\infty, -2]U[6$ ∞)

تعريف: دالة متعددة الحدودpolynomial function

يقال أن الدالة$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$متعددة حدود (أو كثيرةالحدود) من الدرجةn، اذا كان لكل $x \in \mathbb{R}$،

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots a_1 x + a_0$$

حيث انnعدد صحيح غير سالب، وأن$a_n , a_{n-1} , a_{n-2} , \ldots a_1 , a_0$، $a_n \neq 0$، أعداد حقيقية.

ا، تكون عندئذ دالة ثابتة، وأذا كانت درجتها واحدا يطلقأذا كانت درجة متعددة الحدود صفر عليها دالة خطية. كما أن الدالة الذاتية هي دالة خطية.

مالحظة:منطلق أيدالةمتعددةالحدودهو مجموعة االعداد الحقيقية$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

تعريف:دالة أكبر عدد صحيح(أو دالة الصحيح ألعظم)greatest integer function

دالة أكبر عدد صحيح هي الدالة$\mathbb{R}$ $\to$ X :fبحيث أن لكل$x \in$ X

$f(x) = [\![x]\!]$

حيث أن$[\![x]\!]$هو أكبر عدد صحيح ال يزيد علىx. فمثال:

$[\![-0.5]\!] = -1$, $[\![-5]\!] = -5$, $[\![7]\!] = 7$, $[\![3.2]\!] = 3$

$[\![-5.5]\!] = -6$, $[\![-1.6]\!] = -2$, $[\![-1.2]\!] = -3$, $[\![1/3]\!] = 0$

واضح أنه أذا كان منطلق دالة أكبر عدد صحيح هو$\mathbb{R}$فأن مداها هو مجموعة االعداد

الصحيحةZ

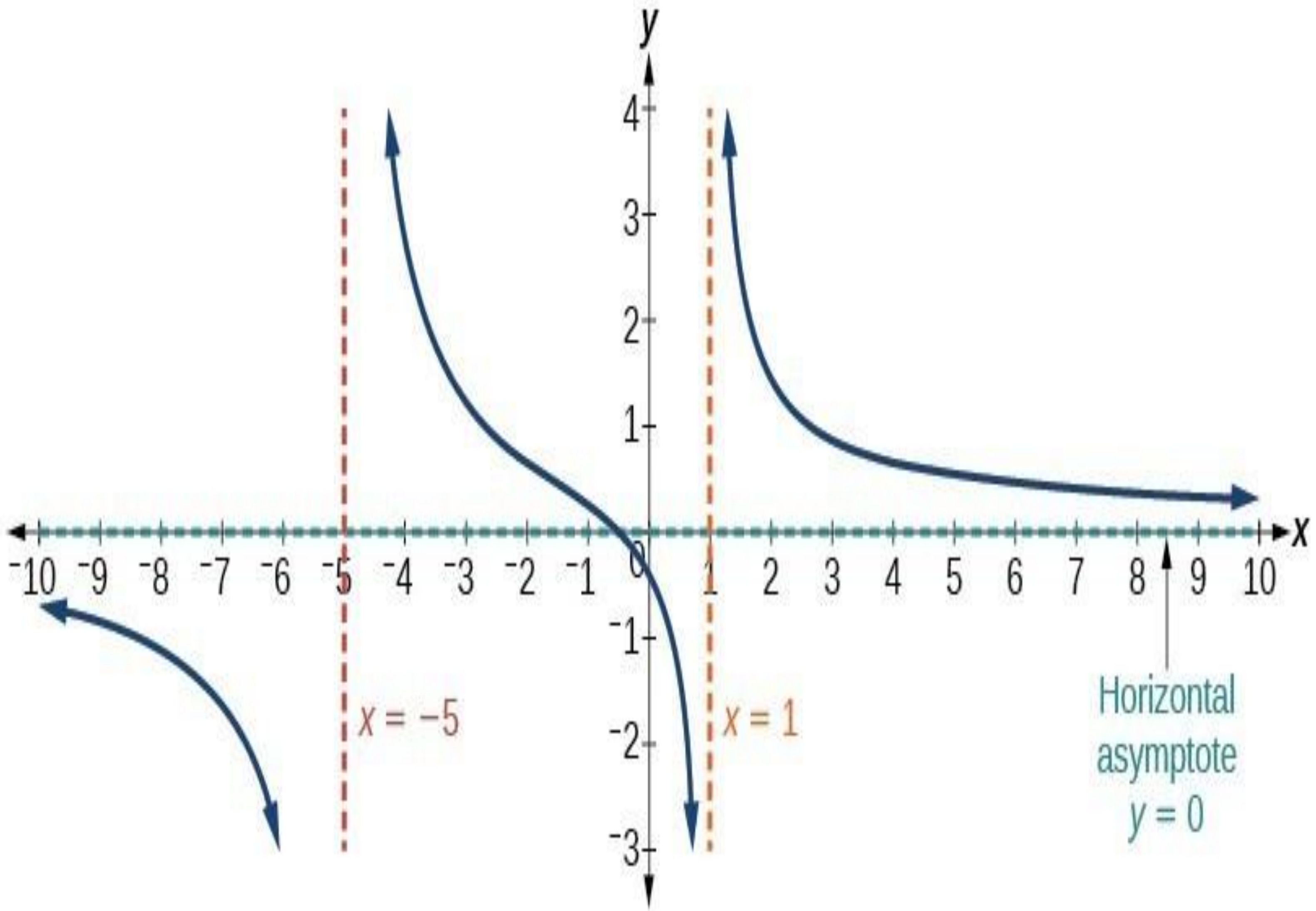
Identify horizontal asymptotes

While vertical asymptotes describe the behavior of a graph as the *output* gets very large or very small, horizontal asymptotes help describe the behavior of a graph as the *input* gets very large or very small. Recall that a polynomial's end behavior will mirror that of the leading term. Likewise, a rational function's end behavior will mirror that of the ratio of the leading terms of the numerator and denominator functions.

Case 1: If the degree of the denominator > degree of the numerator, there is a **horizontal asymptote** at $y = 0$.

Example: $f(x)=\frac{4x+2}{x^2+4x-5}$

In this case, the end behavior is $f(x)\approx\frac{4x}{x^2}=\frac{4}{x}$. This tells us that, as the inputs increase or decrease without bound, this function will behave similarly to the function $g(x)=\frac{4}{x}$, and the outputs will approach zero, resulting in a horizontal asymptote at $y = 0$. Note that this graph crosses the horizontal asymptote.



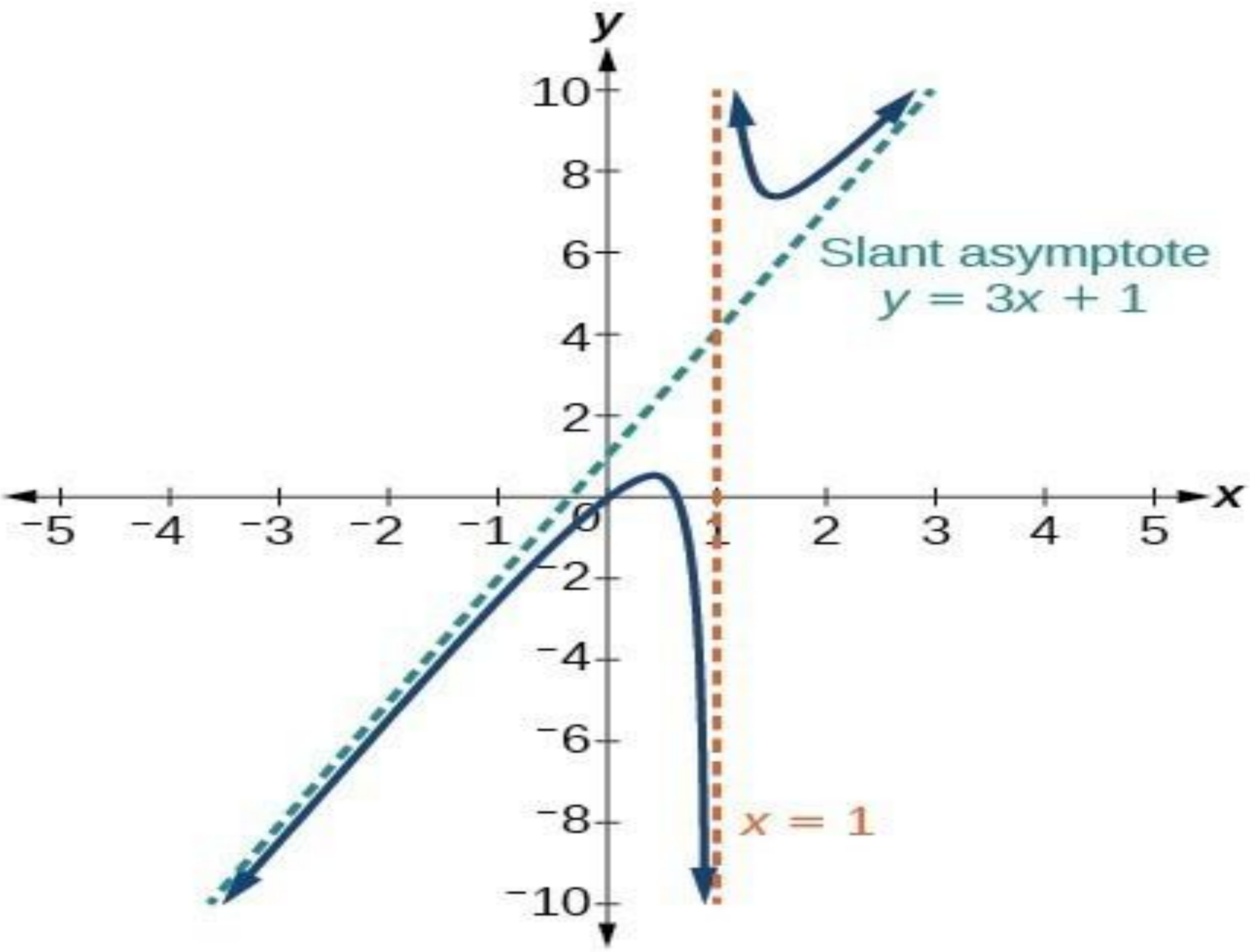
y
x
4
3
2
1
-1
-2
-3
-10
-9
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
x = −5
x = 1
Horizontal
asymptote
y = 0

Example: $f(x)=\frac{3x^2-2x+1}{x-1}$

In this case, the end behavior is $f(x)\approx\frac{3x^2}{x}=3x$. This tells us that as the inputs increase or decrease without bound, this function will behave similarly to the function $g(x)=3x$. As the inputs grow large, the outputs will grow and not level off, so this graph has no horizontal asymptote.

However, the graph of $g(x)=3x$ looks like a diagonal line, and since f will behave similarly to g, it will approach a line close to $y=3x$. This line is a slant asymptote.

To find the equation of the slant asymptote, divide $\frac{3x^2-2x+1}{x-1}$. The quotient is $3x+1$, and the remainder is 2. The slant asymptote is the graph of the line $g(x)=3x+1$.


y
x
10
8
6
4
2
0
−2
−4
−6
−8
−10
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
Slant asymptote
y = 3x + 1
x = 1