مثال: حدد ما أذا كانت الدوال الاتية تمثل متعددات الحدود أم لا. وأذكر درجتها ونوعها

ليست متعددة حدود لان أس المتغير عدد سالب $f(x) = \frac{x^{-2}}{5} + x^3 + 3$

ليست متعددة حدود لان المتغير داخل جذر $f(x) = \sqrt{x} + x^2 + 5$

ليست متعددة حدود لان أس المتغير عدد داخل جذر $f(x) = x^{\sqrt{3}}$

ليست متعددة حدود لان المتغير في المقام $f(x) = \frac{1}{x^5+2} + x^2 + 6$

ليست متعددة حدود لان أس المتغير عدد كسري $f(x) = x^{3/2} - 3x$

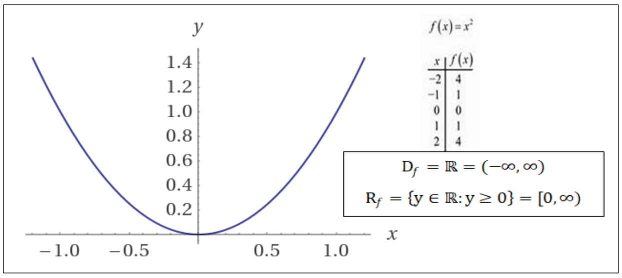
متعددة حدود من الدرجة الخامسة $f(x) = x^5 - \sqrt{2}\,x^4 + 1$

متعددة حدود من الدرجة الثالثة وتسمى دالة تكعيبية $f(x) = x^3 + 6$

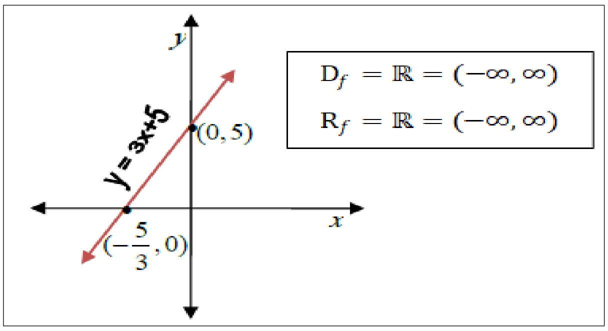
متعددة حدود من الدرجة الاولى وتسمى دالة خطية $f(x) = x - 1$

مثال: حدد المجال والمدى للدالة $y = f(x) = x^2$ وارسم المخطط البياني لها.

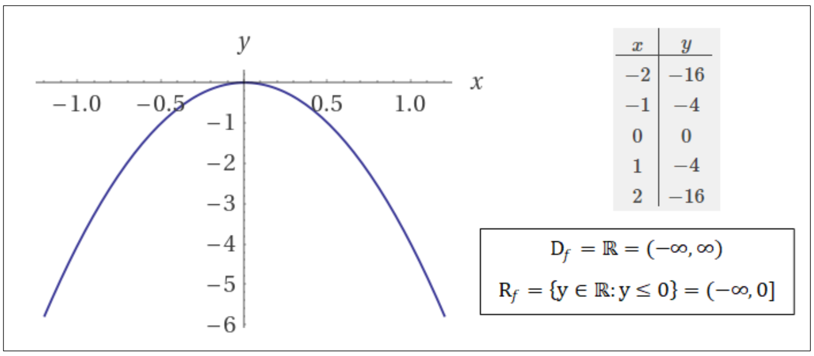
الحل: هذه الدالة متعددة حدود من الدرجة الثانية (دالة تربيعية) لذلك مجالها هو مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ وأن مدى هذه الدالة هو مجموعة الاعداد الحقيقية غير السالبة، أي أن المدى هو الفترة $[0, \infty)$.



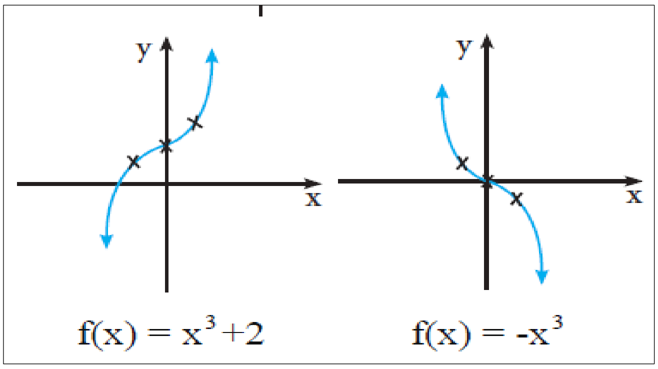
مثال: جد المجال والمدى ثم ارسم منحنى الدالة $y = f(x) = 3x + 5$.



مثال: حدد المجال والمدى ثم ارسم المخطط البياني للدالة $y = f(x) = -4x^2$.



مثال: عين المجال والمدى ثم ارسم المخطط البياني للدالتين $f(x) = x^3 + 2$, $f(x) = -x^3$.



تعريف: الدالة النسبية (الكسرية)   rational function

يقال أن الدالة $f: \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ نسبية أذا كان، لكل $x \in \mathrm{X}$

$$f(x) = \frac{\mathrm{g}(x)}{\mathrm{h}(x)} \, ,$$

حيث أن كلاً من $\mathrm{g}(x)$, $\mathrm{h}(x)$ متعددة حدود، وأن $\mathrm{h}(x) \neq 0$ لكل $x \in \mathrm{X}$.

أي أن الدالة النسبية هي دالة بسطها ومقامها دوال متعددات حدود.

مجال الدالة النسبية مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ما عدا قيم x التي تجعل المقام صفراً. أي أن المجال هو

$\mathrm{X} \subseteq \mathbb{R} - \{x : x \in \mathbb{R}, \mathrm{h}(x) = 0\}$ or $\mathrm{X} \subseteq \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}, \mathrm{h}(x) = 0\}$

لإيجاد مجال الدالة النسبية (أو الكسرية) نتبع الخطوات الاتية:

- نساوي المقام بالصفر
- نحلل المقام اذا أحتجنا لذلك
- نوجد قيم x التي تجعل المقام= صفر
- المجال هو $\mathbb{R} - \{\text{أصفار المقام}\}$

مثال: كل من الدوال الاتية نسبية (أو كسرية):

$$f(x) = \frac{3x}{x^2 + 4x + 5} \, , \qquad \mathrm{D}_f = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$$

$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x - 2} \, , \qquad \mathrm{D}_f = \mathbb{R} - \{2\} \text{ or } \mathrm{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$f(x) = \frac{x^3 - 3}{x^2 - 1} \, , \qquad \mathrm{D}_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\} \text{ or } \mathrm{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x - 3}{x^3 - 1} \, , \qquad \mathrm{D}_f = \mathbb{R} - \{1\} \text{ or } \mathrm{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

تعريف: الدالة الجذرية root function

تسمى الدالة $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ دالة جذرية بحيث $g(x)$ متعددة حدود وأن $n \in N , n \geq 2$.

مجال هذه الدالة هو:

- جميع قيم x بحيث $g(x) \geq 0$ عندما يكون n عدد زوجي.
- جميع الاعداد الحقيقية $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ عندما يكون n عدد فردي.

مثال: الدالة $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{x+2}} - x + 3$ **لا تمثل** دالة جذرية.

مثال: الدالة $f(x) = \sqrt{x+3}$ تمثل دالة جذرية. لايجاد مجالها نضع

$$x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$$

مجال هذه الدالة هو:

$$D_f = \{x : x \in \mathbb{R} , x \geq -3\} = [-3, \infty)$$

مثال: الدالة $f(x) = \sqrt{x-5}$ تمثل دالة جذرية. لايجاد مجالها نضع

$$x - 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 5$$

مجال هذه الدالة هو:

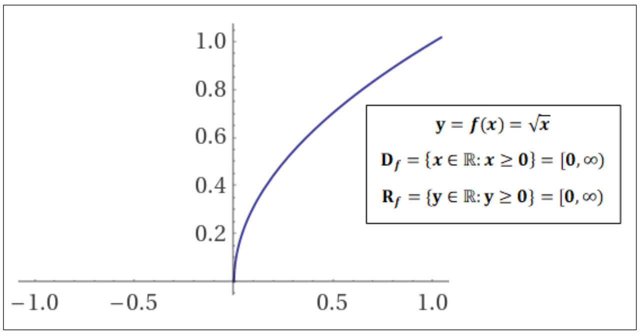
$$D_f = \{x : x \in \mathbb{R} , x \geq 5\} = [5, \infty)$$

مثال: الدالة $f(x) = \sqrt[3]{x+6}$ تمثل دالة جذرية.

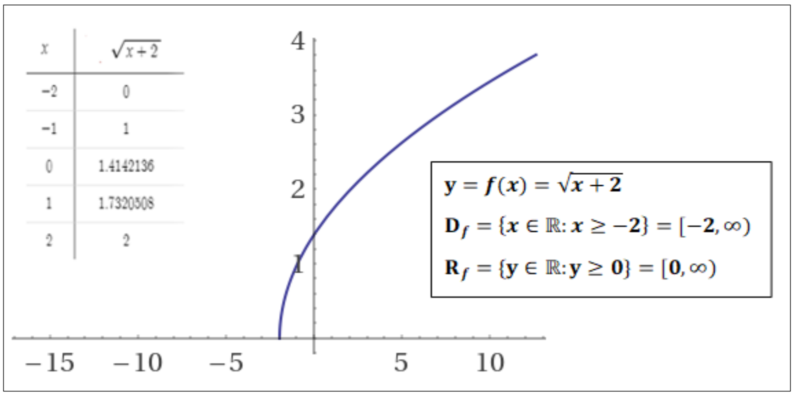
مجال هذه الدالة هو جميع الاعداد الحقيقية لان دليل الجذر فردي

$$D_f = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$$

مثال: عين المجال والمدى وأرسم بيان الدالة $y = f(x) = \sqrt{x}$.



مثال: جد المجال والمدى للدالة $f(x) = \sqrt{x+2}$ ، ثم أرسم المخطط البياني لها.

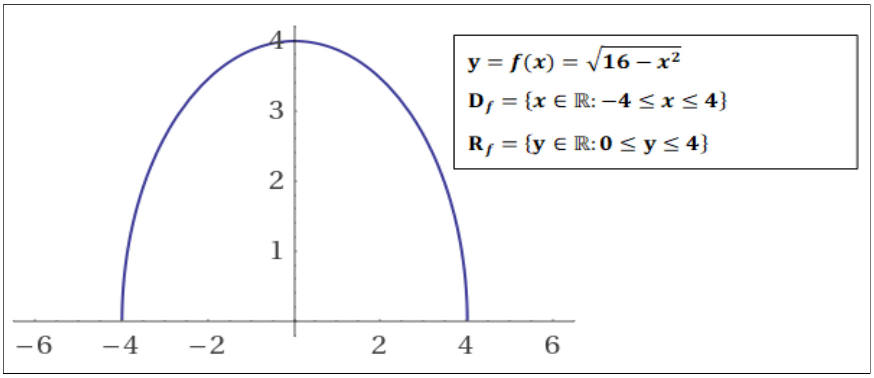


مثال: حدد المجال والمدى للدالة $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ ، ثم أرسم المخطط البياني لها.

الحل: $16 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -x^2 \geq -16 \Rightarrow x^2 \leq 16 \Rightarrow -4 \leq x \leq 4$

أذاً مجال الدالة يكون:

$D_f = \{x \in \mathbb{R}: -4 \leq x \leq 4\}$ or $D_f = [-4, 4]$



مثال: حدد المجال والمدى للدالة $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$ ، ثم أرسم المخطط البياني لها.

الحل: لايجاد المجال نضع $x^2 + 3x + 2 \geq 0$

نجد النقاط الحدودية وذلك بتحويل المتباينة (المتراجحة) الى معادلة، أي نساوي المقدار بالصفر

لايجاد قيم x $\quad x^2 + 3x + 2 = 0$

فنحصل على $\quad (x + 2)(x + 1) = 0$

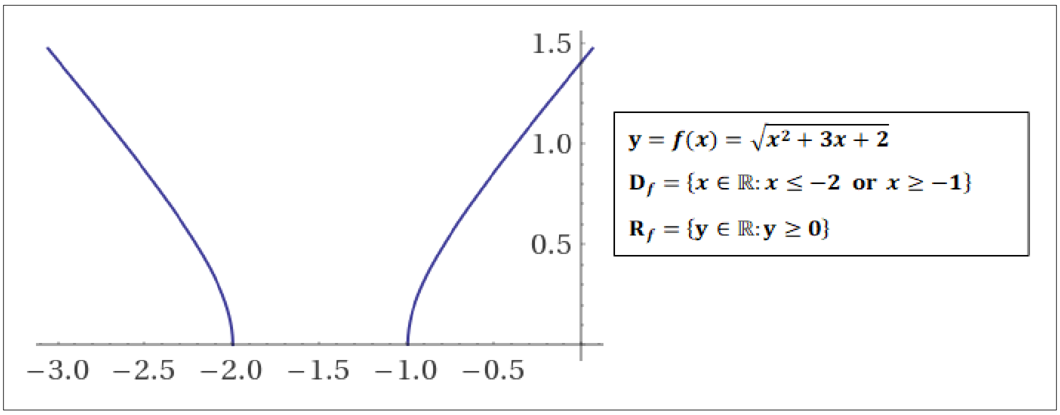
$\Rightarrow x = -2 \quad \text{or} \quad x = -1$

وعليه فان الفترات المحتملة لمجموعة الحل هي:

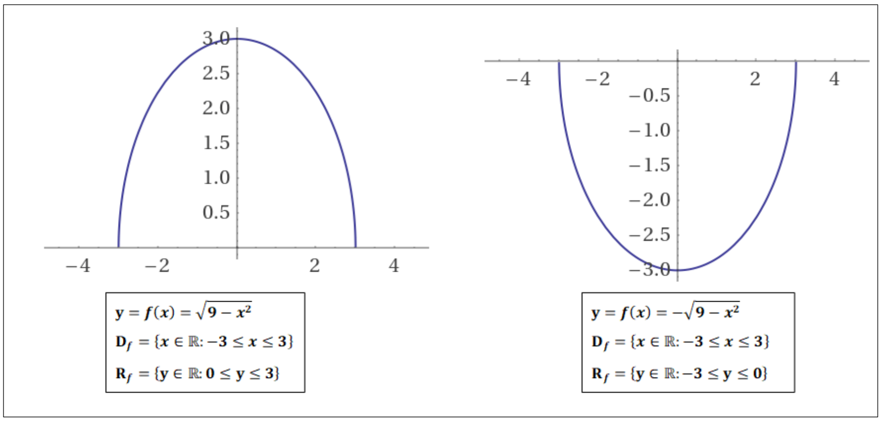
$(-\infty, -2]\,, \quad [-2, -1]\,, \quad [-1, \infty)$

x	$-\infty$	بينهما	-2	بينهما	-1	بينهما	∞
$x^2 + 3x + 2$		+	0	−	0	+	

اذاً مجال الدالة هو $\quad D_f = (-\infty, -2] \cup [-1, \infty)$.



مثال: حدد المجال والمدى للدالتين $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ و $f(x)=-\sqrt{9-x^2}$ ، ثم أرسم المخطط البياني لكل منهما.



مثال: عين المجال والمدى للدالة $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$

الحل: بما أن المقام دالة جذرية فأن

$$\sqrt{2x-x^2}>0 \Longrightarrow 2x-x^2>0$$

نجد النقاط الحدودية وذلك بتحويل المتباينة الى معادلة

$$2x-x^2=0 \Longrightarrow x(2-x)=0 \Longrightarrow x=0\,,2$$

وعليه الفترات المحتملة لمجموعة الحل هي:

$$(-\infty,0)\,,\qquad (0,2)\,,\qquad (2,\infty)$$

الفترة	إشارة $2x-x^2$
$(-\infty,0)$	سالبة
$(0,2)$	موجبة
$(2,\infty)$	سالبة

$$\Longrightarrow D_f=(0,2)\quad \text{and}\quad R_f=\{y\in\mathbb{R}:y>0\}=(0,\infty)$$

مثال: حدد المجال والمدى للدالة $f(x)=\sqrt{\frac{x}{x-3}}$

الحل: المقام يجب ان لا يساوي الصفر، أي أن $x\neq 3$. فلايجاد المجال نضع

$$\frac{x}{x-3}\ge 0 \Longrightarrow x\ge 0$$

وعليه الفترات المحتملة لمجموعة الحل هي: $(-\infty,0],\ [0,3)\,,\ (3,\infty)$

الفترة	اشارة $\frac{x}{x-3}$
$(-\infty,0]$	موجبة
$[0,3)$	سالبة
$(3,\infty)$	موجبة

$$\Longrightarrow D_f=(-\infty,0]\cup(3,\infty)$$

ولأيجاد المدى لدينا $y=\sqrt{\frac{x}{x-3}}\geq 0$ لجميع قيم x ، أي أن

$$y^2=\frac{x}{x-3}\Rightarrow y^2(x-3)=x\Rightarrow y^2x-3y^2=x\Rightarrow y^2x-x=3y^2$$
$$\Rightarrow x(y^2-1)=3y^2\Rightarrow x=\frac{3y^2}{y^2-1}$$
$$y^2-1\neq 0\Rightarrow y\neq \mp 1$$
$$\Rightarrow R_f=\{y\in\mathbb{R}: y\neq\mp 1\}=\mathbb{R}-\{1,-1\}=\mathbb{R}\backslash\{1,-1\}$$

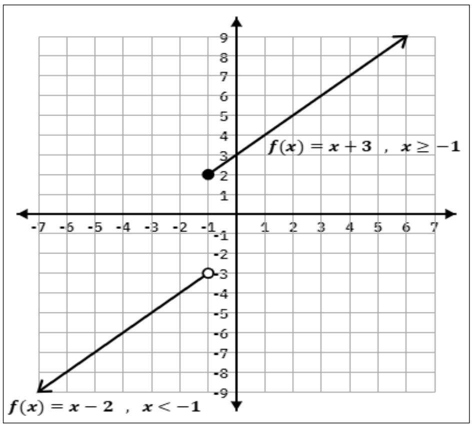
الدوال المعرفة مقطعيًا (الدالة المتعددة التعريف) Piecewise defined functions

الدالة التي تكتب باستعمال عبارتين أو أكثر تسمى دالة متعددة التعريف. وعند تمثيل هذه الدالة بيانياً توضع دائرة صغيرة مظللة عند الطرف لتشير إلى أن النقطة تنتمي إلى التمثيل البياني، وتوضع دائرة غير مظللة لتشير إلى أن النقطة لا تنتمي إلى التمثيل البياني. وهذا النوع من الدوال له صور متعددة معرفة على أكثر من مجال واحد.

مثال: مثل الدالة الاتية بيانياً وحدد كلاً من مجالها ومداها.

$$f(x)=\begin{cases}x-2 & , \quad x<-1\\ x+3 & , \quad x\geq -1\end{cases}$$

الحل:



بما أن الدالة معرفة عند جميع قيم x ، لذا فالمجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية. أي أن

$D_f=\mathbb{R}$

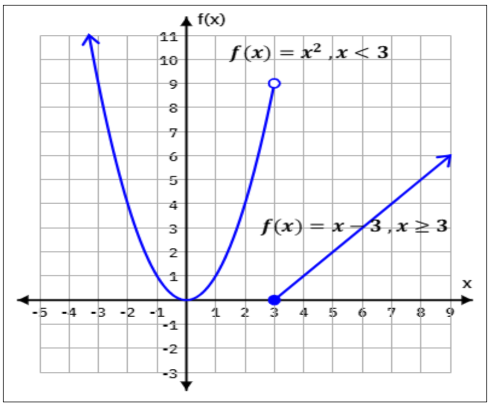
ولايجاد المدى نلاحظ أن قيم الدالة $f(x)$ هي جميع الاعداد الحقيقية الأقل من -3 وكل الاعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي 2 ، لذا فأن المدى هو:

$R_f=\{f(x): f(x)<-3 \quad \text{or} \quad f(x)\geq 2\}$

مثال: أرسم منحنى الدالة وحدد المجال والمدى

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & , \quad x<3\\ x-3 & , \quad x\geq 3\end{cases}$$

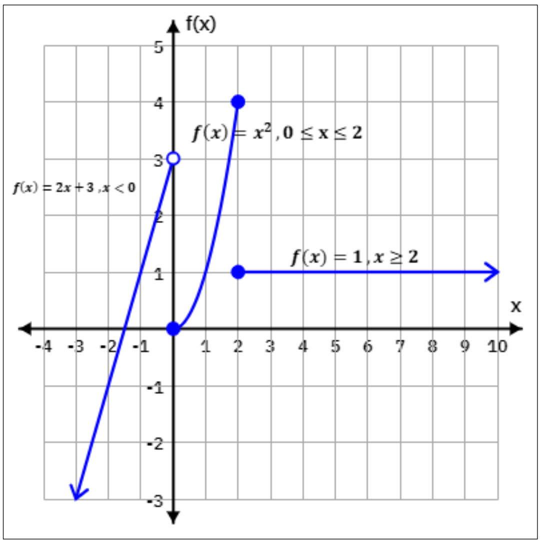
الحل: واضح أن $D_f=\mathbb{R}$ وان $R_f=[0,\infty)$.



مثال: أرسم منحنى الدالة وحدد المجال والمدى

$$f(x)=\begin{cases}2x+3 & , \quad x<0\\ x^2 & , \quad 0\le x\le 2\\ 1 & , \quad x\ge 2\end{cases}$$

مجال هذه الدالة هو $D_f=\mathbb{R}$ ومداها هو $R_f=(-\infty,4]$.



عمليات جبرية على الدوال Algebraic Operations on Functions

أذا كانت f و g دالتين، فأن:

$(kf)(x)=k\,f(x)$ لكل $x\in D_f$ حيث أن k عدد حقيقي.

$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x)$ لكل $x\in D_f\cap D_g$

$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$ لكل $x\in D_f\cap D_g$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ لكل $x\in D_f\cap D_g$ بشرط أن $g(x)\neq 0$.

مثال: لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ و $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ حيث $f(x)=x^2$ و $g(x)=x+2$ ، فأن

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x^2+x+2$.

$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=x^2-(x+2)=x^2-x-2$.

$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=x^2(x+2)=x^3+2x^2$.

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^2}{x+2} \quad , \quad x\neq -2$.

مثال: أذا كانت $f(x)=5x-2 \quad , \quad g(x)=2x^2+4x-3$ ، فأوجد كل مما يأتي:

$(f+g)(x)$ ، $(f-g)(x)$ ، $(f\cdot g)(x)$ ، $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

مثال: أذا كانت $f(x)=\sqrt{4-x^2} \quad , \quad g(x)=3x+1$ ، فأوجد كل مما يأتي:

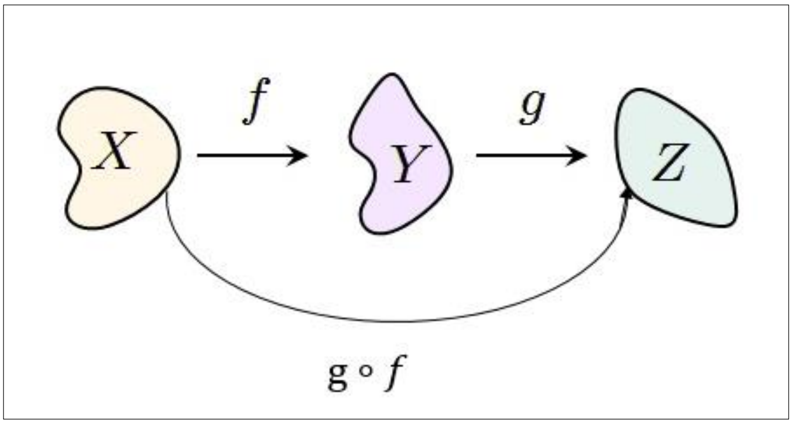
$(f+g)(x)$ ، $(f-g)(x)$ ، $(f\cdot g)(x)$ ، $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

تركيب الدوال Composition of Functions

لتكن $f: \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ و $\mathrm{g}: \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ دالتين. فأن تركيب f مع g هو دالة (دالة مركبة) $\mathrm{g} \circ f$ مجالها X ومجالها المقابل Z ، وتعرف بالشكل:

$$(\mathrm{g} \circ f)(x) = \mathrm{g}(f(x)), \quad x \in \mathrm{X}, \qquad f(x) \in \mathrm{Y}$$

حيث أن $\circ$ هو رمز تركيب دالتين.



حيث أن $\mathrm{D_g} \cap \mathrm{D}_f \neq \emptyset$ و $\mathrm{D}_{\mathrm{g}\circ f} = \mathrm{D}_f \cap \mathrm{D}$ ، حيث D مجال الدالة الناتجة من التركيب $\mathrm{g} \circ f$.

مثال: جد $(\mathrm{g} \circ f)(x), (f \circ \mathrm{g})(x)$ ، للدالتين، اذا كان ذلك ممكناً:

$$f = \{(1,8),(0,13),(14,9),(15,11)\}\ ,\ \mathrm{g} = \{(8,15),(5,1),(10,14),(9,0)\}$$

الحل: لايجاد $(f \circ \mathrm{g})(x)$ ، نوجد قيم $\mathrm{g}(x)$ أولاً ثم نستعملها كقيم من مجال الدالة f لايجاد $f(\mathrm{g}(x))$

$$\mathrm{g}(8) = 15 \ ,\ \mathrm{g}(5) = 1 \ ,\ \mathrm{g}(10) = 14 \ ,\ \mathrm{g}(9) = 0$$
$$(f \circ \mathrm{g})(8) = f(\mathrm{g}(8)) = f(15) = 11$$
$$(f \circ \mathrm{g})(5) = f(\mathrm{g}(5)) = f(1) = 8$$
$$(f \circ \mathrm{g})(10) = f(\mathrm{g}(10)) = f(14) = 9$$
$$(f \circ \mathrm{g})(9) = f(\mathrm{g}(9)) = f(0) = 13$$
$$\therefore\ f \circ \mathrm{g} = \{(8,11),(5,8),(10,9),(9,13)\}$$

لايجاد $(\mathrm{g} \circ f)(x)$، نوجد قيم $f(x)$ أولاً ثم نستعملها كقيم من مجال الدالة f لايجاد $\mathrm{g}(f(x))$

$$f(1) = 8 \ ,\ f(0) = 13 \ ,\ f(14) = 9 \ ,\ f(15) = 11$$

$$(\mathrm{g} \circ f)(1) = \mathrm{g}(f(1)) = \mathrm{g}(8) = 15$$

$(\mathrm{g} \circ f)(0) = \mathrm{g}(f(0)) = \mathrm{g}(13) =$ غير معرفة

$$(\mathrm{g} \circ f)(14) = \mathrm{g}(f(14)) = \mathrm{g}(9) = 0$$

$(\mathrm{g} \circ f)(15) = \mathrm{g}(f(15)) = \mathrm{g}(11) =$ غير معرفة

بما أن 13 ، 11 لا ينتميان لمجال الدالة g فأن الدالة $\mathrm{g} \circ f$ غير معرفة عند $x = 11$ و $x = 13$ ، وبذلك فأن

$$\mathrm{g} \circ f = \{(1,15),(14,0)\}$$