

## النموذج المقابل او الثنائي (Dual Model)

يطلق على صيغة النموذج الرياضي الذي يمثل مشكلة ما بالنماذج الاولى ( Primal Model )، ولكل نموذج اولي صيغة نموذج وحيدة تسمى بالنماذج المقابل ( Dual Model )، ويمكن حل النموذج المقابل ومن هذا الحل يمكن التوصل للحل الامثل لنماذج البرمجة الخطية الاولى. أهم فوائد النموذج المقابل ( أي الغاية من صياغة النموذج المقابل ) الاتي:

- 1- يساعد النموذج المقابل على اختزال خطوات الحل في بعض الاحيان، اذ يكون عدد القيود للنموذج المقابل أقل من عدد قيود النموذج الاولى في بعض الاحيان.
- 2- في حالة كون احد متغيرات النموذج الاولى ذو قيمة سالبة فان حل النموذج الاولى يكون غير ممكن، بينما النموذج المقابل له يكون له حل .
- 3- بالامكان اضافة قيود جديدة للمشكلة وايجاد حل امثل لها وفق القيود المضافة.

من أهم الصفات المشتركة للنموذج الاولى والنموذج المقابل له هو ان الحل لأي نموذج منهما له علاقة مباشرة بحل النموذج الآخر، ذلك يعني أنه في حالة وجود حل اساسي ممكن للنموذج الاولى فإن هناك حل اساسي ممكن للنموذج المقابل له، واذا كان لأي من النماذجين حل اساسي فأن لهما حل امثل. يمكن القول بأن النموذج المقابل هو مقلوب النموذج الاولى أو بالعكس.

صياغة النموذج المقابل للنموذج الاولى تكون وفق الخطوات الاتية:

- 1- تعريف متغيرات جديدة غير سالبة للنموذج المقابل يكون عددها مساوي لعدد قيود النموذج الاولى.
- 2- تعكس دالة الهدف بحيث تعظيم الهدف للنموذج الاولى يصبح تصغير دالة الهدف للنموذج المقابل له، وتصغير دالة الهدف للنموذج الاولى يصبح تعظيم دالة الهدف للنموذج المقابل له.
- 3- تعكس اتجاه متباينات القيود، فاذا كانت قيود النموذج الاولى متباينات اكبر او تساوي فتصبح قيود النموذج المقابل متباينات اقل او تساوي، واذا كانت قيود النموذج الاولى متباينات اقل او تساوي فتصبح قيود النموذج المقابل متباينات أكبر او تساوي. مع ملاحظة أنه اذا كانت قيود النموذج الاولى متباينات مختلفة الاتجاه فيجب توحيدها الى متباينات باتجاه واحد فقط وذلك بظرف طرفي المتباينة ب ( 1- ) ، أما اذا كان هناك قيود في النموذج الاولى بشكل معادلات عندها كل قيد بهيئة معادلة يكتب بدلالة قيدين احدهما اكبر أو يساوي والثاني أصغر أو يساوي ثم بعد ذلك توحد اتجاهات القيود.
- 4- معاملات المتغيرات في دالة الهدف للنموذج الاولى تصبح قيم الثوابت ( قيم الطرف اليمين ) لقيود النموذج المقابل.

## بحوث العمليات(2)/ملزمة رقم (1)/دكتور عدي العبيدي

- 5- ثابتت قيود النموذج الاولى تصبح معاملات المتغيرات في دالة هدف النموذج المقابل.
- 6- مبدلة مصفوفة معاملات المتغيرات لقيود النموذج الاولى تصبح مصفوفة معاملات المتغيرات لقيود النموذج المقابل. أي معاملات العمود  $j$  في قيود النموذج الاولى تصبح معاملات الصفر في قيود النموذج الاولى.

لنفرض لدينا النموذج الاولى بثلاث متغيرات هو

$$\text{Min. } Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3$$

S.T.

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 \leq b_1$$

$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + a_{23} X_3 \geq b_2$$

$$a_{31} X_1 + a_{32} X_2 + a_{33} X_3 = b_3$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

اول خطوة نعيد كتابة القيد الثالث بدلالة قيدين وكالاتي

$$\text{Min. } Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3$$

S.T.

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 \leq b_1$$

$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + a_{23} X_3 \geq b_2$$

$$a_{31} X_1 + a_{32} X_2 + a_{33} X_3 \leq b_3$$

$$a_{31} X_1 + a_{32} X_2 + a_{33} X_3 \geq b_3$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

بعدها توحد اتجاهات القيود بضرب طرفي القيدين الثاني والرابع بـ ( -1 ) لتصبح القيود كالاتي :

$$\text{Min. } Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3$$

S.T.

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 \leq b_1$$

$$-a_{21} X_1 - a_{22} X_2 - a_{23} X_3 \leq -b_2$$

$$a_{31} X_1 + a_{32} X_2 + a_{33} X_3 \leq b_3$$

$$-a_{31} X_1 - a_{32} X_2 - a_{33} X_3 \leq -b_3$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

نفرض متغيرات النموذج المقابل ( عددها 4 ) هي

النموذج المقابل يكون كالاتي :

$$\text{Max. } W = b_1 Y_1 - b_2 Y_2 + b_3 Y_3 - b_3 Y_4$$

S.T.

$$a_{11} Y_1 - a_{21} Y_2 + a_{31} Y_3 - a_{31} Y_4 \geq C_1$$

$$a_{12} Y_1 - a_{22} Y_2 + a_{32} Y_3 - a_{32} Y_4 \geq C_2$$

$$a_{13} Y_1 - a_{23} Y_2 + a_{33} Y_3 - a_{33} Y_4 \geq C_1$$

$$Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 \geq 0$$

مثال (1): حول نموذج البرمجة الخطية الاولى التالي الى النموذج المقابل:

$$\text{Min. } Z = 16 X_1 + 25 X_2$$

S.T.

$$X_1 + 7 X_2 \geq 4$$

$$X_1 + 5 X_2 \geq 5$$

$$2X_1 + 3 X_2 \geq 9$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل:

عدد قيود النموذج الاولى تساوي 3 ، لذا نفرض ثلاثة متغيرات للنموذج المقابل (  $Y_1, Y_2, Y_3$  )

$$\text{Max. } W = 4 Y_1 + 5 Y_2 + 9 Y_3$$

S.T.

$$Y_1 + Y_2 + 2 Y_3 \leq 16$$

$$7 Y_1 + 5 Y_2 + 3 Y_3 \leq 25$$

$$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$$

مثال (2): حول نموذج البرمجة الخطية الاولى التالي الى النموذج المقابل:

$$\text{Max. } Z = X_1 + X_2 - X_3 - X_4$$

S.T.

$$3X_1 - 2X_2 + X_3 + 5X_4 \leq 18$$

$$5X_1 + 6X_3 \leq 20$$

$$X_1 - X_2 + 4 X_3 + X_4 \geq 9$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

الحل:

يتم اولاً توحيد القيود بحيث تكون جميعها باتجاه واحد، يمكن ضرب القيد الثالث ب (-1) لتصبح

قيود النموذج كالتالي :

$$3X_1 - 2X_2 + X_3 + 5X_4 \leq 18$$

$$5X_1 + 6X_3 \leq 20$$

$$-X_1 + X_2 - 4 X_3 - X_4 \leq -9$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

عدد قيود النموذج الاولى تساوي 3 ، لذا نفرض ثلاثة متغيرات للنموذج المقابل (  $Y_1, Y_2, Y_3$  )

$$\text{Min. } W = 18 Y_1 + 20 Y_2 - 9 Y_3$$

S.T.

$$3 Y_1 + 5 Y_2 - Y_3 \geq 1$$

$$-2 Y_1 + Y_3 \geq 1$$

$$Y_1 + 6 Y_2 - 4 Y_3 \geq -1$$

$$5Y_1 - Y_3 \geq -1$$

$$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$$

مثال (3): حول نموذج البرمجة الخطية الاولى التالي الى النموذج المقابل:

$$\text{Max. } Z = 2X_1 + X_2 + X_3$$

S.T.

$$X_1 + X_2 + X_3 \geq 6$$

$$3X_1 - 2X_2 + 3X_3 = 3$$

$$-4X_1 + 3X_2 - 6X_3 = 1$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

الحل:

القيدين الثاني والثالث يتم كتابة كل منهما بدلالة قيدين وكالاتي:

$$X_1 + X_2 + X_3 \geq 6$$

$$3X_1 - 2X_2 + 3X_3 \geq 3$$

$$3X_1 - 2X_2 + 3X_3 \leq 3$$

$$-4X_1 + 3X_2 - 6X_3 \geq 1$$

$$-4X_1 + 3X_2 - 6X_3 \leq 1$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

توحد القيود كالتالي :

$$-X_1 - X_2 - X_3 \leq -6$$

$$-3X_1 + 2X_2 - 3X_3 \leq -3$$

$$3X_1 - 2X_2 + 3X_3 \leq 3$$

$$4X_1 - 3X_2 + 6X_3 \leq -1$$

$$-4X_1 + 3X_2 - 6X_3 \leq 1$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

اصبح لدينا خمسة قيود لذا نفرض خمسة متغيرات للنموذج المقابل (

$$\text{Min. } W = -6Y_1 - 3Y_2 + 3Y_3 - Y_4 + Y_5$$

S.T.

$$-Y_1 - 3Y_2 + 3Y_3 + 4Y_4 - 4Y_5 \geq 2$$

$$-Y_1 + 2Y_2 - 2Y_3 - 3Y_4 + 3Y_5 \geq 1$$

$$-Y_1 - 3Y_2 + 3Y_3 + 6Y_4 - 6Y_5 \geq 1$$

$$Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5 \geq 0$$