2 – طريقة المرحلتين $Two - Phase\ Method$

أن أسلوب المرحلتين هو أسلوب بديل عن أسلوب (M) حيث يستخدم هذا الأسلوب عندما يكون هناك على الأقل قيد واحد على شكل مساواة أو متباينات على شكل أكبر أو يساوي, اذ تضاف المتغيرات الأصطناعية والتي ير مز لها (R_i) على القيود من النوع أعلاه وذلك للحصول على المصفوفة الأحادية والتي هي شرط الحل الأساسي الأولي المقبول. وهي أبسط من الطريقة السابقة من خلال الحصول على قيمة دالة الهدف الجديدة (f) مساوية للصفر ويتم الحل باستخدام مرحلتين هما:

المرحلة الأولى:

1 – تحويل النموذج من الصيغة القانونية الى الصيغة القياسية مع أضافة المتغيرات الأصطناعية فقط الى النموذج.

2 – صياغة دالة هدف جديدة (f) بالأعتماد على المتغيرات الأصطناعية (R_i).

$$f = R_1 + R_2 + \cdots + R_n$$

3 – تكوين جدول يتضمن الحل الأولي بالأعتماد على المتغيرات (R_i, S_i, x_j) في قيود النموذج ودالة الهدف ونتبع خطوات الحل السابقة الى أن نحصل على $(f = 0, c_j \leq 0)$.

المرحلة الثانية:

1 – أعتماد الحل الأساسي النهائي في الخطوة (3) من المرحلة الأولى بعد أستبعاد (R_i) ودالة الهدف (f).

2 – أعتماد دالة الهدف الأصلية (x_0) وتحسين قيمتها للحصول على الحل الأمثل.

3 – يكون الحل الأمثل عندما $(c_j \leq 0)$.

<u>مثال (2 - 10):</u>

جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالي باستخدام طريقة المرحلتين .

$$Min\ \ x_0 = 6x_1 + 4x_2$$

s.to

$$2x_1 + 3x_2 \geq 8$$

$$x_1 + x_2 \geq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

الحل:

نحول القيود الى (=) بطرح (slack variable).

$$Min\ \ x_0 = 20x_1 + 15x_2 - 0S_1 - 0S_2$$

s.to

$$2x_1 + 3x_2 - S_1 = 10$$

$$4x_1 \qquad\quad - S_2 = 10$$

$$x_1, x_2,\ S_1, S_2 \geq 0$$

يضاف لكل قيد طرح منه (S_i) متغير اصطناعي (R_i) وكالآتي:

$$2x_1 + 3x_2 - S_1 +\ R_1 = 10$$

$$4x_1 \qquad\quad - S_2 +\ R_2 = 10$$

$$x_1, x_2,\ S_1, S_2,\ R_1,\ R_2\ \geq 0$$

$$R_1 = 10 - 2x_1 - 3x_2 + S_1$$

$$R_2 = 10 - 4x_1 + S_2$$

$$f =\ R_1 +\ R_2 = 10 - 2x_1 - 3x_2 + S_1 + 10 - 4x_1 + S_2$$

$$f = 20 - 6x_1 - 3x_2 + S_1 + S_2$$

$$f + 6x_1 + 3x_2 - S_1 - S_2 = 20$$

جدول الحل الأساسي سيكون:

	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2	R.H.S	Ratio
R_1	2	3	-1	0	1	0	10	5
R_2	4	0	0	-1	0	1	10	2.5

f	6	3	-1	-1	0	0	20	

المتغير الداخل الذي يقابل أكبر قيمة موجبة في دالة الهدف (f) هو (x_1) والخارج الذي يمثل أقل قيمة موجبة في عمود النسبة هو(R_2) والقيمة المحورية هي (4).

$$Pivot\ Equation = [1, 0,0, -0.25,0,0.25,2.5]$$

$$New\ (R_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} - \left\{ 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -0.25 \\ 0 \\ 0.25 \\ 2.5 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 0.5 \\ 1 \\ -0.5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$New\ (f) = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} - \left\{ -6 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -0.25 \\ 0 \\ 0.25 \\ 2.5 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 0.5 \\ 0 \\ -1.5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

جدول الحل الثاني سيكون:

	x_1	$\boldsymbol{x_2}$	S_1	S_2	R_1	R_2	R.H.S	Ratio
$\boldsymbol{R_1}$	**0**	**3**	**-1**	**0.5**	**1**	**-0.5**	**5**	**1.67**
x_1	1	**0**	0	-0.25	0	0.25	2.5	∞
f	0	**3**	-1	0.5	0	-1.5	5	

المتغير الداخل (x_2), والمتغير الخارج (R_1), القيمة المحورية (3).

$$Pivot\ Equation = [0, 1, -0.33,0.17,0.33, -0.17,1.67]$$

$$New\ (x_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -0.25 \\ 0 \\ 0.25 \\ 2.5 \end{bmatrix} - \left\{ 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -0.33 \\ 0.17 \\ 0.33 \\ -0.17 \\ 1.67 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -0.25 \\ 0 \\ 0.25 \\ 2.5 \end{bmatrix}$$

$$New\ (f) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 0.5 \\ 0 \\ -1.5 \\ 5 \end{bmatrix} - \left\{ 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -0.33 \\ 0.17 \\ 0.33 \\ -0.17 \\ 1.67 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

جدول الحل الثالث سيكون:

	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2	R.H.S
x_2	0	1	-0.33	0.17	0.33	-0.17	1.67
x_1	1	0	0	-0.25	0	0.25	2.5
f	0	0	0	0	0.5	-1	0

بما أن قيمة (f) مساوية للصفر فيتم أعتماد نتائج الجدول الثالث بعد استبعاد المتغيرات الأصطناعية (R_2, R_1) ودالة الهدف (f) من الجدول أعلاه مع أعتماد دالة الهدف الأصلية والتي هي:

$$Min\ \ x_0 = 20x_1 + 15x_2 + 0S_1 + 0S_2$$

نقوم بتحسين قيمة دالة الهدف للحصول على الحل الأمثل النهائي وكما يأتي:

	x_1	x_2	S_1	S_2	R.H.S
x_1	0	1	-0.33	0.17	1.67
x_2	1	0	0	-0.25	2.5
x_0	20	15	0	0	0

$$x_2 - 0.33\ S_1 + 0.17\ S_2 = 1.67 \qquad \ldots (1)$$

$$x_1 \qquad\qquad - 0.25\, S_2 = 1.67 \qquad \ldots(2)$$

$$x_1 = 2.5 + 0.25\, S_2$$

$$x_2 = 1.67 + 0.33\, S_1 - 0.17\, S_2$$

نعوض النتيجتين في دالة الهدف الأصلية نحصل على:

$$x_0 = 20(2.5 + 0.25\, S_2) + 15(1.67 + 0.33\, S_1 - 0.17\, S_2)$$

$$x_0 = 75.05 + 4.95\, S_1 + 2.45\, S_2$$

$$x_0 - 4.95\, S_1 - 2.45\, S_2 = 75.05$$

وبذلك سيكون جدول الحل النهائي هو:

	x_1	x_2	S_1	S_2	R.H.S
x_1	0	1	-0.33	0.17	1.67
x_2	1	0	0	-0.25	2.5
x_0	0	0	-4.95	-2.45	75.05

من الجدول أعلاه نجد أن جميع معاملات دالة الهدف هي أقل أو تساوي صفر وبذلك يكون الحل الأمثل هو:

$$x_1 = 2.5, \;\; x_2 = 1.67, \;\; x_0 = 75.05$$

مثال (2 - 11):

جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالي باستخدام طريقة المرحلتين.

$$Min \;\; x_0 = 3x_1 + 8x_2$$

s.to

$$x_1 + x_2 = 200$$

$$x_1 \qquad \le 80$$

$$x_2 \qquad \ge 60$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

الحل:

نكتب المسألة بالصيغة القياسية:

$$Min\ \ x_0 = 3x_1 + 8x_2 + 0S_1 + 0S_2$$

s.to

$$x_1 + x_2 = 200$$

$$x_1 + S_2 = 80$$

$$x_2 - S_3 = 60$$

$$x_1, x_2, S_2, S_3 \geq 0$$

المرحلة الأولى

$$Min\ \ x_0 = R_1 + R_3$$

s.to

$$x_1 + x_2 + R_1 = 200$$

$$x_1 + S_2 = 80$$

$$x_2 - S_3 + R_3 = 60$$

$$x_1, x_2, S_2, S_3, R_1, R_3 \geq 0$$

B.V.C	B.V	x_1	$\boldsymbol{x_2}$	S_3	R_1	S_2	R_3	Sol.
1	R_1	1	**1**	0	1	0	0	200
0	S_2	1	**0**	0	0	1	0	80
1	$\boldsymbol{R_3}$	**0**	**1**	**-1**	**0**	**0**	**1**	**60**
x_0		1	**2**	-1	0	0	0	260
1	R_1	**1**	0	1	1	0	-1	140
0	$\boldsymbol{S_2}$	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**80**
0	x_2	**0**	1	-1	0	0	1	60
x_0		**1**	0	1	0	0	-2	140
1	$\boldsymbol{R_1}$	**0**	**0**	**1**	**1**	**-1**	**-1**	**60**
0	x_1	1	0	**0**	0	1	0	80

0	x_2	0	1	**-1**	0	0	1	60
x_0		0	0	**1**	0	-1	-2	60
0	S_3	0	0	1	1	-1	-1	60
0	x_1	1	0	0	0	1	0	80
0	x_2	0	1	0	1	-1	0	120
x_0		0	0	0	-1	0	-1	0

بما أن $(x_0 = 0)$ فأن الحل مقبول.

المرحلة الثانية

B.V.C	B.V	x_1	$\boldsymbol{x_2}$	S_3	S_2	Sol.
0	S_3	0	0	1	-1	60
3	x_1	1	0	0	1	80
8	x_2	0	1	0	-1	120
x_0		0	0	0	-5	1200

بما أن $(x_0 \leq 0)$ فأن الحل أمثل.

$$x_1 = 80, x_2 = 120, x_0 = 1200$$

النموذج المقابل:

يطلق على صيغة النموذج الرياضي الذي يمثل مشكلة ما بالنموذج الاولي (Primal Model)، ولكل نموذج اولي صيغة نموذج وحيدة تسمى بالنموذج المقابل (Dual Model)، ويمكن حل النموذج المقابل ومن هذا الحل يمكن التوصل للحل الامثل لنموذج البرمجة الخطية الاولي.

أهم فوائد النموذج المقابل (أي الغاية من صياغة النموذج المقابل) الاتي:

1- يساعد النموذج المقابل على اختزال خطوات الحل في بعض الاحيان، أذ يكون عدد القيود للنموذج المقابل أقل من عدد قيود النموذج الاولي في بعض الاحيان.

2- في حالة كون احد متغيرات النموذج الاولي ذو قيمة سالبة فان حل النموذج الاولي يكون غير ممكن، بينما النموذج المقابل له يكون له حل .

3- بالامكان اضافة قيود جديده للمشكلة وايجاد حل أمثل لها وفق القيود المضافة.

من أهم الصفات المشتركة للنموذج الاولي والنموذج المقابل له هو ان الحل لأي نموذج منهما له علاقة مباشرة بحل النموذج الآخر، ذلك يعني أنه في حالة وجود حل اساسي ممكن للنموذج الاولي فأن هناك حلا اساسيا ممكنا للنموذج المقابل له، واذا كان لأي من النموذجين حلا اساسيا فأن لهما حلا أمثل. يمكن القول بأن النموذج المقابل هو مقلوب النموذج الاولي أو بالعكس.

صياغة النموذج المقابل للنموذج الاولي تكون وفق الخطوات الاتية:

1- تعريف متغيرات جديده غير سالبة للنموذج المقابل يكون عددها مساوي لعدد قيود النموذج الاولي.

2- تعكس دالة الهدف بحيث تعظيم الهدف للنموذج الاولي يصبح تصغير لدالة الهدف للنموذج المقابل له، وتصغير دالة الهدف للنموذج الاولي يصبح تعظيم لدالة الهدف للنموذج المقابل له.

3- تعكس اتجاه متباينات القيود، فاذا كانت قيود النموذج الاولي متباينات اكبر او تساوي فتصبح قيود النموذج المقابل متباينات اقل او تساوي، واذا كانت قيود النموذج الاولي متباينات أقل او تساوي فتصبح قيود النموذج المقابل متباينات أكبر او تساوي. مع ملاحظة أنه اذا كانت قيود النموذج الاولي متباينات مختلفة الاتجاه فيجب توحيدها الى متباينات باتجاه واحد فقط وذلك بظرب طرفي المتباينة بـ (1-) ، أما اذا كان هناك قيود في النموذج الاولي بشكل معادلات عندها كل قيد بهيئة معادلة يكتب بدلالة قيدين احدهما أكبر أو يساوي والثاني أصغر أو يساوي ثم بعد ذلك توحد اتجاهات القيود.

4- معاملات المتغيرات في دالة الهدف للنموذج الاولي تصبح قيم الثوابت (قيم الطرف الايمن) لقيود النموذج المقابل.

5- ثوابت قيود النموذج الاولي تصبح معاملات المتغيرات في دالة هدف النموذج المقابل.