3- Gaussian elimination method with finding the inverse to solve the linear system.

طريقة اكذف لكاوس مع ايجاد المعكوس كل النظام الاخطر

خطوات الحل:

$$[A;I;B] \longrightarrow [I;A^{-1};X]$$

عمليات ابتدائية على الصفوف فقط

Ex: Find the solution to the following system using the Gaussian elimination method.

$$2x_1 + 3x_2 = 28$$
$$x_1 + 2x_2 = 17$$

Sol:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 28 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$[A;I;B] \sim [I;A^{-1};X]$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc|c} 2 & 3 & 1 & 0 & 28 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 17 \end{array}\right]$$

تبديل $R_2 \leftrightarrow R_1$

$$\left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 17 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 28 \end{array}\right] \quad -2R_1 + R_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 17 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -6 \end{array}\right] \quad -1R_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 17 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 6 \end{array}\right] \quad -2R_2+R_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 6 \end{array}\right]$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

عشرين اكل

واجب لكل الطلاب

Find the solution of the linear system using

1- Gramer's method
2- the matrix method
3- Gaussian elemination method.

$$X_1 - 3X_2 = 5$$
$$-X_2 + X_3 = -1$$
$$6X_1 + 2X_3 = 0$$

اذن الحالة الاولى عندما $m = n$, $|A| \neq 0$ فان
الحل وحيد وطريقة الحل هي

١- كرامر ٢- اكذف كاوس ٣- الطريقة المصفوفية ٤- ايجاد المعكوس

1- Gramer's 2- Gaussian elimination 3- the matrix 4- with finding inverse

الحالة الثانية

The second case

When $m > n$

اي عدد المعادلات m هو اكبر من عدد المتغيرات (المجاهيل) n هنالك حالتين اما حل وحيد (One Solution) او ليوجد حل نهائيا

There is no solution

Ex1 $2X_1 - 3X_2 = 1$ — ①
$X_1 + X_2 = 0$ — ②
$5X_1 + X_2 = 3$ — ③

$m = 3, n = 2$ $\therefore m > n$

كل المعادلتين اثنين

$2X_1 - 3X_2 = 1$
$(X_1 + X_2 = 0) * 2$
$2X_1 - 3X_2 = 1$
$+2X_1 + 2X_2 = 0$
$-5X_2 = 1 \longrightarrow \boxed{X_2 = -1/5}$

بالتعويض

نعوض عن x_2 في المعادلة (2)

$$x_1 - \frac{1}{5} = 0 \longrightarrow \boxed{x_1 = \frac{1}{5}}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

التحقيق

$2(\frac{1}{5}) + 3(\frac{1}{5}) = \frac{5}{5} = 1$ ← المعادلة الاولى

$\frac{1}{5} - \frac{1}{5} = 0$ ← المعادلة الثانية

$1 - \frac{1}{5} \neq 3$ المعادلة الثالثة لاتتحقق

∴ النظام غير متسق ولايوجد حل

There is no solution

Ex(2)

$$2x_1 - 3x_2 = 1 \quad \text{(1)}$$
$$x_1 + x_2 = 0 \quad \text{(2)}$$
$$3x_1 - 2x_2 = 1 \quad \text{(3)}$$

$m = 3, n = 2 \longrightarrow m > n$

كل المعادلتين الاولى والثانية تحتوي على المتغيرين

نجد $x_2 = -\frac{1}{5}$ ، $x_1 = \frac{1}{5}$

نعوض عن قيمة x_1, x_2 في المعادلات الثلاثة اعلاه

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1 \text{ ✓}$$

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{5} = 0 \text{ ✓}$$

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1 \text{ ✓}$$

∴ النظام متسق اذ يوجد حل وحيد $x_1 = \frac{1}{5}, x_2 = -\frac{1}{5}$

اذا كانت $m > n$ ماذا كان $|A^TA| \neq 0$

نستخدم القانون التالي في ايجاد الحل

$$X = (A^TA)^{-1} A^TB \quad \text{(X)}$$

Ex: Find the solution of the system

$$X_1 + 2X_2 = 3$$
$$2X_1 + 3X_2 = 4$$
$$3X_1 + 5X_2 = 7$$

نحل النظام بالطريقتين إما بالطريقة الثانية كمثال السابق او باستخدام القانون

$$X = (A^TA)^{-1} A^TB$$

بشرط $|A^TA| \neq 0$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^TA = \underset{2\times3}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}} \underset{3\times2}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1+4+9 & 2+6+15 \\ 2+6+15 & 4+9+25 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^TA = \begin{bmatrix} 14 & 23 \\ 23 & 38 \end{bmatrix}$$

نجد المحدد لـ A^TA

$$|A^TA| = \{(14\times38) - (23\times23)\} = 3 \neq 0$$

اذن تطبق القانون

68 $A^TA = \begin{bmatrix} 14 & 23 \\ 24 & 38 \end{bmatrix}$

$X = (A^TA)^{-1} A^TB$

$adj(A^TA) = \begin{bmatrix} 38 & -23 \\ -23 & 14 \end{bmatrix}$ ب

$\therefore (A^TA)^{-1} = \frac{adj(A^TA)}{|A^TA|} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 38 & -23 \\ -23 & 14 \end{bmatrix}$

$\therefore X = \frac{1}{3} \underset{2\times2}{\begin{bmatrix} 38 & -23 \\ -23 & 14 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \underset{3\times1}{\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}}$

2×3

نضرب اول × ثاني

$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 38 & -23 \\ -23 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3+8+21 \\ 6+12+35 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 38 & -23 \\ -23 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 32 \\ 53 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$