الفصل الاول

الحسابات التقريبية والاخطاء

الخوارزمية:- مجموعة من التوجيهات لتنفيذ عمليات حسابية مصممة بصورة منتظمة لحل المسالة الرياضية بعد عدد محدد من الخطوات.

الحلول العددية:- هو استخدام خوارزمية معينة لحل مسالة معينة تسمح لنا بايجاد الحل لاية دقة مطلوبة باستخدام عدد محدد من الخطوات.

التحليل العددي:- هو الموضع المتعلق بدراسة الطرق المستخدمة في ايجاد الحلول العددية والنظريات المتعلقة بها.

مصادر الاخطاء:-

1- اخطاء الصياغة:- عندما يراد تحليل مسالة معينة بطريقة رياضية غالبا ما ناخذ نموذجا مبسطا يصف المشكلة الاساسية ومن اجل ذلك قد نلجا الى اهمال بعض العوامل والمؤثرات من اجل تبسيط النموذج وفي نفس الوقت لا تؤثر على المظهر الاساسي للمسالة :
2- اخطاء الصلبة:- ان استخدام البيانات التي ليس لها قيمة دقيقة (مضبوطة) في الصيغ الرياضية تؤدي الى نتائج غير دقيقةايضا مثل ($\pi = 3.14$).
3- اخطاء البتر:- هو الخطأ الناشئ عن استبدال عملية منتهية بعملية لانهائية اي قطع سلسلة رياضية بعد عدد من الحدود مثال ذلك $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$.
4- اخطاء التدوير:- ان الكثير من الاعداد تحتوي على مراتب عشرية غير منتهية فعند تقريب هذه المراتب العشرية يؤدي الى اخطاء في الناتج.
5- اخطاء القطع:- وهو الخطاء الناتج عن بتر رقم معين من مرتبة معينة .
6- اخطاء التراكمية:- تتضمن بعض الطرق العددية لحل المعادلات الرياضية تكرار مجموعة من العمليات الحسابية ولخطوات متعاقبة، فاذا وجد خطأ في احدى التكرارات فان هذا الخطأ سيزداد لاعتماد الحسابات على القيم التقريبية المحسوبة في الخطوات السابقة.

انواع الاخطاء:-

لتكن x^* القيمة التقريبية للقيمة الحقيقية x فانه يوجد نوعان من الاخطاء:

1- الخطا المطلق (Absolute Errors)

يعرف الخطأ المطلق بانه حاصل طرح القيمة التقريبية للعدد x^* من القيمة الحقيقية له x ويرمز له e_x حيث

$$e_x = |x - x^*|$$

2- الخطأ النسبي (Relative Error)

يعرف الخطأ النسبي بانه النسبة بين قيمة الخطأ المطلق والقيمة الحقيقية له x ويرمز له بالرمز δ_x حيث

$$\delta_x = \frac{e_x}{x}$$

تمثيل الاعداد:-

يمكن تمثيل الاعداد الحقيقية بالشكل التالي:-

$$547 = 5 * 10^2 + 4 * 10^1 + 7 * 10^0$$
$$0.0085 = 8 * 10^{-3} + 5 * 10^{-4}$$
$$34.63 = 3 * 10^1 + 4 * 10^0 + 6 * 10^{-1} + 3 * 10^{-2}$$

وبشكل عام فان

$$x = \sum_{i=0}^{n} a_i * 10^i + \sum_{i=1}^{m} b_i * 10^{-i}$$

الاخطاء في العمليات الحسابية:-

لتكن x^* هي قيمة تقريبية للقيمة الحقيقية x والخطأ المطلق e_x والخطأ النسبي δ_x. ولتكن y^* قيمة تقريبية للقيمة الحقيقية y والخطأ المطلق e_y والخطأ النسبي δ_y. فان الاخطاء على العمليات الحسابية يتم كما يلي:-

1- عملية الجمع:-

$$\begin{aligned} e_{x+y} &= (x + y) - (x^* + y^*) \\ &= (x - x^*) + (y - y^*) \\ &= e_x + e_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{x+y} &= \frac{e_{x+y}}{x+y} = \frac{1}{x+y}(e_x + e_y) \\ &= \frac{1}{x+y}(x\delta_x + y\delta_y) \end{aligned}$$

2- عملية الطرح:- (واجب)

3- عملية الضرب:-

$$\begin{aligned} e_{x*y} &= xy - x^*y^* \\ &= xy - (x - e_x)(y - e_y) \\ &= xy - (xy - xe_y - ye_x + e_xe_y) \\ &= xe_y + ye_x - e_xe_y \\ &= xe_y + ye_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{x*y} &= \frac{e_x}{x} + \frac{e_y}{y} \\ &= \delta_x + \delta_y \end{aligned}$$

4- عملية القسمة:- (واجب)

الفصل الثاني

حل المعادلات غير الخطية

Solution of non-linear equations

سوف نتطرق الى عدد من الطرق العددية التي تهدف الى ايجاد قيم تقريبية لجذر المعادلة $f(x) = 0$ اي الى قيمة x^* بحيث تكون الدالة $f(x^*)$ قريبة من الصفر $f(x^*) \cong 0$.

ان جميع الطرق العددية هذه تحتاج الى قيمة تقريبية اولية لجذر المعادلة المطلوب ايجاد حلها, وتسمى الطرق العددية المستخدمة لايجاد الجذور بالطرق التكرارية وهذه الطرق تحتاج الى الجذر الابتدائي x_0 وهذا يمكن الحصول عليه من خلال تحديد موقع الجذر اولا (الفترة التي تقع فيها الجذر) ومن ثم ناخذ قيمة مقبولة للجذر.

طرق ايجاد مواقع الجذور:-

1-طريقة الرسم:- Graphical method

a- اذا كانت الدالة رسمها تحتوي على منحني واحد فقط فان موقع الجذر يكون عند التقاء الدالة مع محور x .

b- اذا كانت الدالة تحتوي على منحنيين او اكثر اي يمكن كتابة الدالة $f(x) = 0$ بالصيغة $f_1(x) = f_2(x)$, حيث f_1, f_2 دالتين يسهل رسمهما فاذا تقاطع المنحنيين في النقطة (x^*, y^*) فان x^* تعتبر جذرا للمعادلة.

2-طريقة التحليل:- Analytical method

ان هذا الاسلوب في تعيين مواقع الجذور يعتمد بالاساس على مبرهنة القيمة الوسطى والتي تنص على:

اذا كانت f دالة مستمرة حقيقية في الفترة $[a, b]$ وكانت قيمة كل من $f(a), f(b)$ مختلفتين في الاشارة فنه يوجد على الاقل جذر حقيقي واحد في الفترة $[a, b]$.

ان اختيار فترة تقسيم صغيرة يؤدي الى دقة في استخراج مواقع الجذور وعند اختيار فترة تقسيم كبيرة فانه يؤدي الى فقدان بعض الجذور المطلوبة.

اما اذا كانت المعادلة المعطاة تحتوي على دوال مثلثية فلا يمكن تحديد عدد جذورها (الموجبة والسالبة)لانها دوال غير منتهية.

اما اذا كانت المعادلة كثيرة الحدود ذات متغير واحد فانه فالغالب يمكن تحديد عدد جذورها الموجبة والسالبة وان كيفية تحديد عدد الجدور الموجبة والسالبة يعتمد على مايلي:-

1- عدد الجذور الكلية لمتعددة الحدود يساوي قيمة اكبر قوى للمتغير.
2- عدد الجذور الموجبة يساوي عدد التغير الحاصل في اشارة $f(x)$.
3- عدد الجذور السالبة يساوي عدد التغير الحاصل في اشارة $f(-x)$.

مثال:- اوجد عدد ومواقع الجذور الموجبة والسالبة لما ياتي:-

1- $\boldsymbol{f(x) = x^2 + x - 7}$

عدد الجذور الكلية =2

عدد الجذور الموجبة=1

عدد الجذور السالبة =1

$f(-x) = +x^2 + (-x) - 7$

-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
+	-	-	-	-	-	-	+	+

2- $\boldsymbol{f(x) = 2x - cosx - 2}$

لايمكن تحديد عدد الجذور لوجود دالة مثلثية ضمن الدالة $f(x)$

-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
-	-	-	-	-	+	+	+

الطرق العددية لحل المعادلات غير الخطية

سنستعرض في هذاالبند عددا من الطرق العددية لايجاد قيمة تقريبية لجذر المعادلة الغير خطية, كأن تكون كثيرة الحدود بمتغير واحد وذات قوى اكبر من (2) او معادلة معقدة يصعب حلها بالطرق الاعتيادية المعروفة.

1-طريقة تنصيف الفترات:- The Bisection method

لنفترض ان الفترة المغلقة $[a, b]$ معلومة, وان الدالة $f(x)$ مستمرة في الفترة وتحقق شرط التحليل (نظرية القيمة المتوسطة) اي ان الفترة المغلقة $[a, b]$ تحتوي على الاقل جذر واحد.

خوارزمية الطريقة:-

a) ايجاد قيمة x_0 من خلال الصيغة التالية $x_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$

b) ايجاد قيمة $f(x_0)$ بحيث

- اذا كانت $f(x_0) = 0$ فان x_0 هو جذر المعادلة
- اذا كانت $f(a_0).f(x_0) < 0$ فان $a_1 = a_0, x_0 = b_1$ اي ان الفترة التي تحتوي الجذر هي $[a_1, x_0]$ نحسب $x_1 = \frac{a_1+x_0}{2}$