النموذج الســادس

نظام الانتظار $(M/M/C):(GD/N/N)$

يسمى هذا النظام بنظام خدمة المكائن حيث يتوفر في النظام مكائن عددها (N) تُقدَم لها الخدمة من قبل (C) من مراكز الخدمة (المُصلحين) حيث نجد في هذا النظام ما يلي:

1- معدلات الوصول والخدمة يتبعان توزيـــع بواســـون.
2- أزمنة الوصول والخدمة تتبع التـــوزيع الأُســـي.
3- عدد قنوات الخدمة هي (C) أي قنوات خدمة متعددة.
4- طاقة النظام ومصدر الطلب على الخدمة محدودين وتساوي (N).

إن معدلات الوصول والخدمة لهذا النظام تأخذ الصيغ التالية:

- إذا كانت (N) تمثل حجم المجتمع و (n) تمثل عدد الزبائن المحتملة في صف الانتظار فإن أي وصول جديد لهذا النظام سيتولد من المقدار $(N-n)$ أي أن:

$$\lambda_n = \begin{cases} (N-n)\lambda & ,0 \le n < N \\ 0 & ,n = N \end{cases}$$

$$M_n = \begin{cases} nM & ,0 \le n < C \\ CM & n \ge C \end{cases}$$

وبالاعتماد على الصيغ الواردة في نظام الانتظار الثالث $(M_n/M_n/C):(GD/\infty/\infty)$ والخاصة بإيجاد قيمة (P_n) وهي:

$$\boxed{P_n = \frac{\lambda_\circ \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{M_1 M_2 \cdots M_n} P_\circ}$$

وباستخدام قيم (λ_n) و (M_n) نجد أن الـ (P_n) لهذا النظام ستكون بالشكل التالي:

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{\frac{N!}{(N-n)!}}{n!}\left(\dfrac{\lambda}{M}\right)^n P_\circ & ,0 \le n < C \\[2ex] \dfrac{\frac{N!}{(N-n)!}}{C^{n-C}\, C!}\left(\dfrac{\lambda}{M}\right)^n P_\circ & ,C \le n \le N \end{cases}$$

أو نستطيع كتابة صيغة الـ (P_n) على النحو التالي:

$$P_n = \begin{cases} C_n^N \rho^n P_\circ & ,0 \le n < C \\[2ex] C_n^N \dfrac{n!}{C^{n-C}\, C!} \rho^n P_\circ & ,C \le n < N \end{cases} \qquad \text{Where: } C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!\,(r!)}$$

وباستخدام الشرط التالي (مجموع الاحتمالات يساوي واحد):

$$\sum_{n=0}^{N} P_n = 1 \Rightarrow \left[\sum_{n=0}^{C-1} C_n^N \rho^n + \sum_{n=C}^{N} C_n^N \frac{n!}{C^{n-C}\, C!} \rho^n\right] = 1$$

$$\therefore P_\circ = \left[\sum_{n=0}^{C-1} n\, C_n^N \rho^n + \frac{1}{C!}\sum_{n=C}^{N} n\, C_n^N \frac{n!}{C^{n-C}} \rho^n\right]^{-1}$$

مؤشرات نظام النظام $(M/M/C):(GD/N/N)$

1- عدد الوحدات المتوقعة في النظام (Ls):

$$\therefore Ls = P_\circ \left[\sum_{n=0}^{C-1} n\, C_n^N \rho^n + \frac{1}{C!}\sum_{n=C}^{N} n\, C_n^N \frac{n!}{C^{n-C}} \rho^n\right]$$

2- عدد الوحدات المتوقعة في صف الانتظار (Lq):

$$\therefore Lq = Ls - \frac{\lambda_e}{M} \quad \text{where } \lambda_e = \lambda(N - Ls)$$

$$= Ls - \frac{\lambda(N-Ls)}{M} \Rightarrow Ls - \rho(N - Ls)$$

3- وقت الانتظار المتوقع في النظام (Ws):

$$Ws = \frac{Ls}{\lambda_e} \Rightarrow \frac{Ls}{\lambda(N-Ls)} \quad \text{or} \quad Ws = Wq + \frac{1}{M}$$

4- وقت الانتظار المتوقع في الصف (Wq):

$$Wq = \frac{Lq}{\lambda_e} \Rightarrow \frac{Lq}{\lambda(N-Ls)}$$

5- عدد قنوات الخدمة العاطلة عن العمل $(\bar{C})$:

$$\bar{C} = \sum_{n=0}^{C} (C-n) P_n$$

مثال: في مُنشأة صناعية توجد ورشة لتصليح مكائن المنشأة التي يبلغ عددها (5) مكائن. يعمل في الورشة مُصلحان حيث تتعطل المكائن تبعاً لتوزيـــع بواســـون بمعدل ماكنة واحدة في الساعة وأن زمن تصليح الماكنة يتبع التوزيع الأُســـي بمعدل (30) دقيقة لكل ماكنة. جد ما يلي:

1- احتمال عدم وجود أي ماكنة في الورشة.

2- احتمال وجود ماكنة واحدة أو اثنتان أو ثلاثة أو أربعة أو خمس مكائن في الورشة.

3- العدد المتوقع للمُصلحين العاطلين عن العمل.

4- العدد المتوقع للمُصلحين العاملين.

5- العدد المتوقع للمكائن في الورشة وفي الصف.

6- زمن الانتظار المتوقع لكل ماكنة في الورشة وفي الصف.

الحل:

$(M/M/2):(GD/5/5)$

$\lambda = 1$ ماكنة/ساعة

$M = \frac{1}{30} * 60 = 2$ ماكنة/ساعة