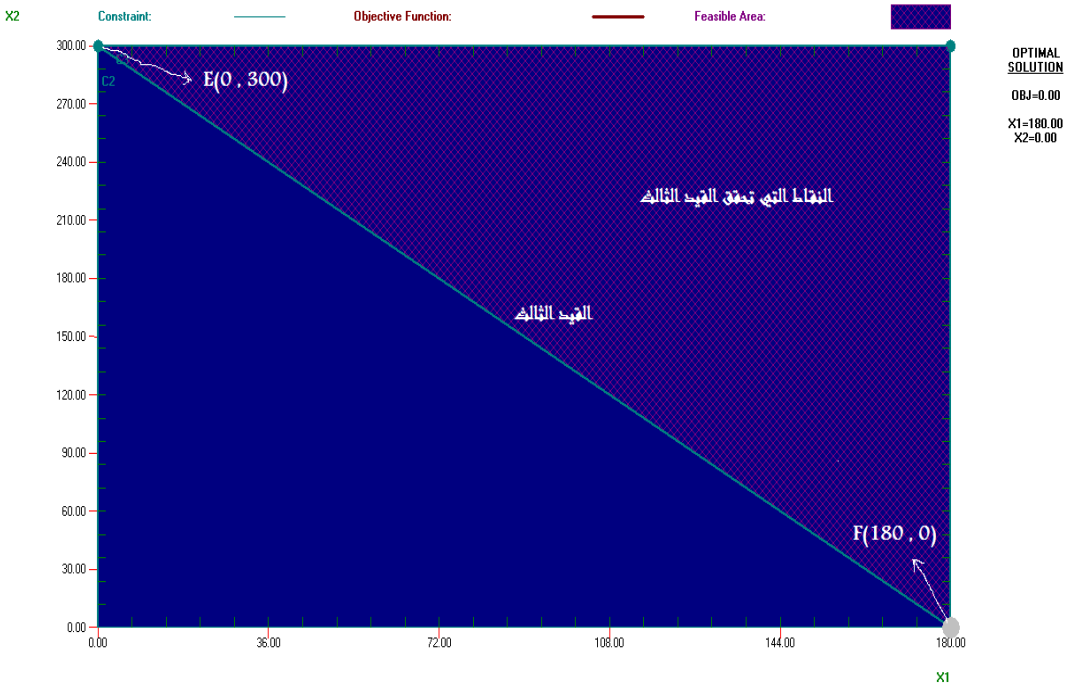
شكل (2): الرسم البياني للقيد الثاني

رسم القيد الثالث: $5\,X_1 + 3\,X_2 = 900$

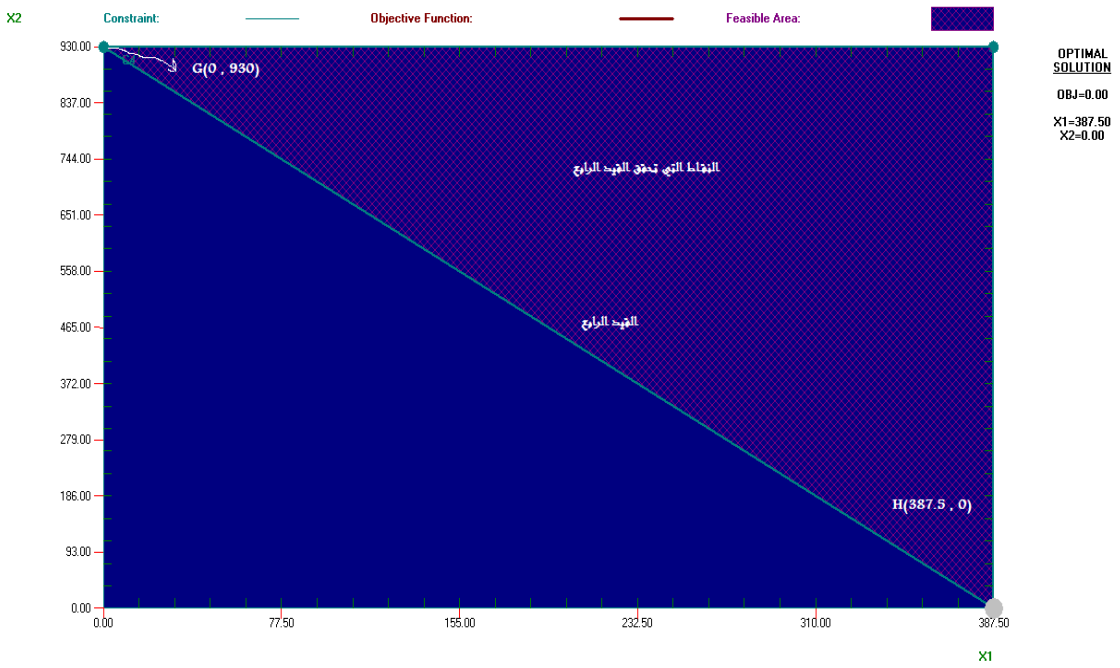
النقطة	X_1	X_2
E	0	300
F	180	0



شكل (3) : الرسم البياني للقيد الثالث

رسم القيد الرابع: $0.6\,X_1 + 0.25\,X_2 = 232.5$

النقطة	X_1	X_2
G	0	930
H	387.5	0



شكل (4) : الرسم البياني للقيد الرابع

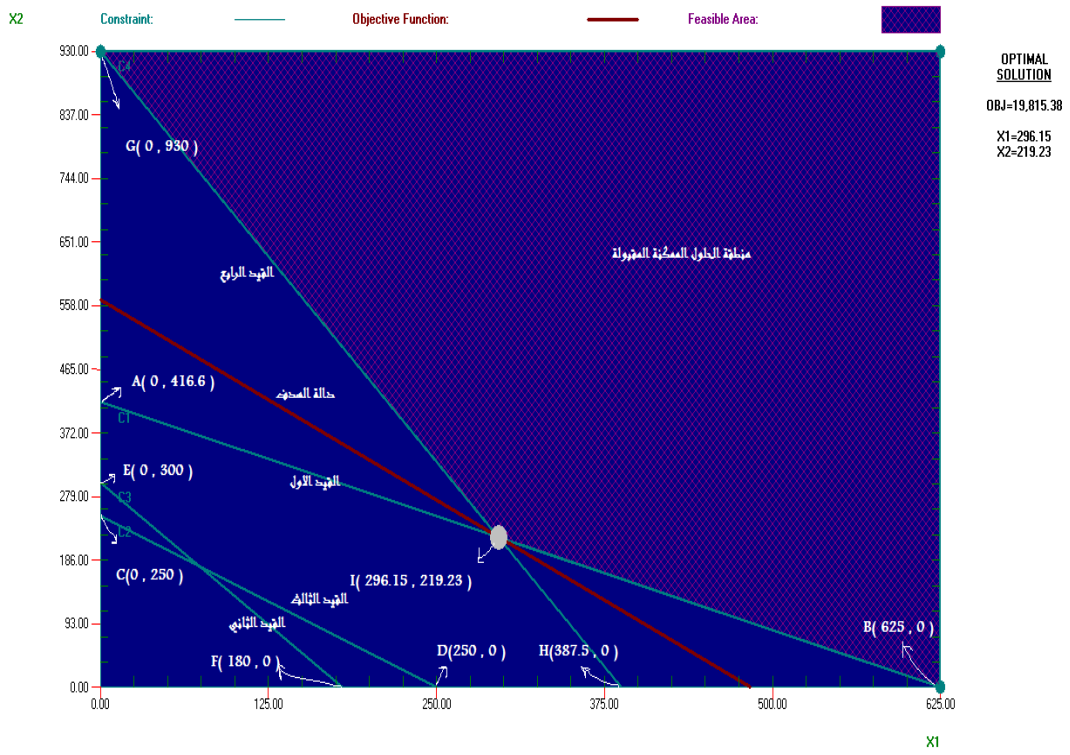
من الرسوم البيانية للقيود الاربعة نلاحظ ان النقاط الواقعة على الخط المستقيم واعلى الخط المستقيم هي التي تحقق تلك القيود وذلك لان القيود بهيئة اكبر او تساوي.

الرسم البياني التالي يبين رسم القيود الاربعة وتحديد منطقة الحلول الممكنة.

منطقة الحلول الممكنة المقبولة (المنطقة المظللة بالمربعات الصغيرة) هي تلك المنطقة المشتركة بين القيود الاربعة (اي التي تحقق تلك القيد في آن واحد) وهي المنطقة المحددة بالنقاط (G , I , B) وتلك النقاط هي التي تسمى بالنقاط المتطرفة ، النقطتين (G , B) احداثياتها محددة اما النقطة (I) والتي تمثل نقطة تقاطع القيدين الاول والرابع احداثياتها غير محسوبة ويجب حسابها عن طريق حل معادلتي القيدين المذكورين انيا واستخراج قيمة كل من X_1 و X_2 اللتان تحققان القيدين في ان واحد.

ملاحظة : يترك استخراج احداثيات النقطة I كتمرين للطالب ، علما ان احداثيات هذه النقطة هي (296.6 , 219.2) ويتم ايجادها بحل المعادلتين الاتيتن انيا:

$$2X_1 + 3X_2 = 1250$$
$$0.6X_1 + 0.25X_2 = 232.5$$



شكل (5): الرسم البياني لقيود النموذج ومنطقة الحلول الممكنة المقبولة

لايجاد الحل الامثل نعوض النقاط المتطرفة في دالة الهدف والنقطة التي احداثياتها تحقق اقل قيمة لدالة الهدف تمثل الحل الامثل :

النقاط المتطرفة	قيمة دالة الهدف $Z = 41\ X_1 + 35\ X_2$
G (0 , 930)	$Z = 41 * 930 = 32550$
I (296.15 , 219.23)	$Z = 41 * 296.15 + 35 * 219.23 = 19815.2$
B (625 , 0)	$Z = 41 * 625 = 25625$

نلاحظ من الجدول اعلاه ان اقل قيمة لدالة الهدف هي 19833 والتي تمثل اقل كلفة للانتاج وتحققها احداثيات النقطة (296.15 , 219.23) I ، ذلك يعني ان الحل الامثل هو $X_1 = 296.15$ و $X_2 = 219.23$ بما يحقق اقل قيمة لدالة الهدف $Min.\ Z = 19815.2$ ، أي ان البرنامج الانتاجي الامثل لانتاج العلف الحيواني هو :

انتاج 296.15 كغم من العلف الاول و 219.23 كغم من العلف الثاني بما يحقق اقل كلفة ممكنة وتساوي 19815.2 دينار .

بملاحظة الشكل (5) نجد ان القيدين الثاني والثالث لا يؤثران على الحل الامثل للمشكلة اذ انهما لا يشتركان مع القيدين الاول و الرابع في تحديد منطقة الحلول الممكنة بالرغم من ان نقاط تلك المنطقة تحققهما لذا يسمى هذين القيدين بالقيدين الملغاة (Redundant constraints) .

حالات خاصة لمشكلات البرمجة الخطية:

هناك حالات خاصة يمكن ان نلاحظها عند حل نموذج البرمجة الخطية والتي تعد حالات خاصة لحلول تلك النماذج وهي :

1- تعدد الحلول المثلى: Multiple Optimal Solution

من المفروض ان نحصل على حل أمثل واحد عند حل نموذج البرمجة الخطية، ولكن هناك حاللة خاصة وهي حصولنا على أكثر من حل أمثل (أي تعدد الحلول المثلى) ، تحصل هذه الحالة عندما توازي احد القيود الهيكلية المحددة لمنطقة الحلول الممكنة دالة الهدف الخطية، ويمكن ملاحظة هذه الحالة مباشرة من النموذج عندما نجد ان معاملات احد القيود الهيكلية من مضاعفات معاملات دالة الهدف المناضرة لها عندها نتوقع حلول متعددة مثلى لهذا النموذج، وكما موضح في المثال الاتي:

مثال (3):

اوجد الحل الامثل لنموذج البرمجة الخطية الآتي :

$$\text{Max. } Z = 2X_1 + 4X_2$$

$$\text{S.T.}$$

$$5X_1 + X_2 \leq 400$$

$$4X_1 + 8X_2 \leq 480$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل:

نلاحظ ان معاملات القيد الثاني هي من مضاعفات معاملات دالة الهدف المناضرة لها، لذا نتوقع حصول حلول متعددة مثلى لهذه المشكلة . سوف نتبع طريقة الرسم البياني لحل هذا النموذج:

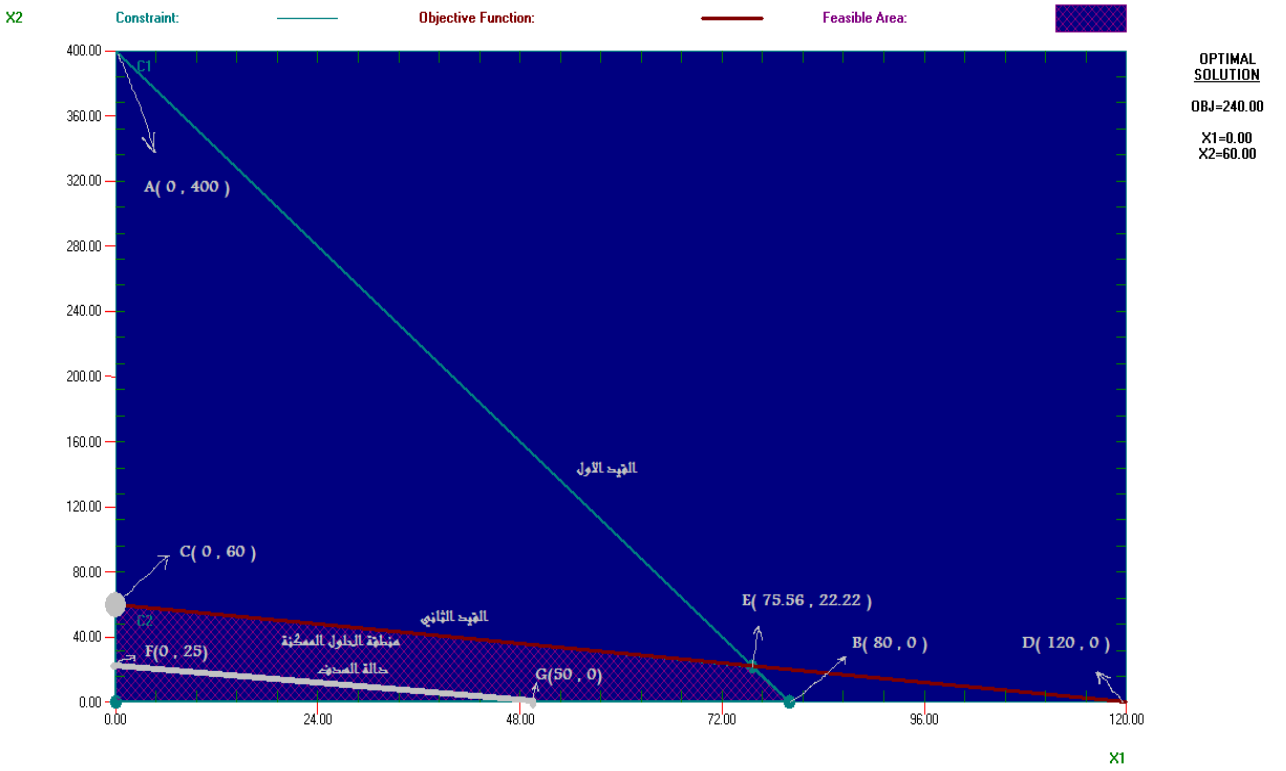
نحدد نقاط القيود :

النقطة	القيد الاول $5X_1 + X_2 = 400$	
	X_2	X_1
A	400	0
B	0	80

النقطة	القيد الثاني $4X_1 + 8X_2 = 480$	
	X_2	X_1
C	60	0
D	0	120

نرسم القيد الاول بتثبيت النقطتين (A(0 , 40 و (B(80 , 0 ، والقيد الثاني بتثبيت النقطتين

(C(0 , 60 و (D(120 , 0 وكما مبين في الشكل الاتي :



شكل (6): الرسم البياني لقيود نموذج البرمجة الخطية ومنطقة الحلول الممكنة

من الشكل(6) نلاحظ ان منطقة الحلول الممكنة هي المحددة بالنقاط المتطرفة (O , C , E , B) علما ان النقطة (E (75.56 , 22.22 هي نقطة تقاطع القيدين الاول والثاني (تم الحصول على احداثياتها بحل معادلتي القيدين انيا ويترك ايجاد احداثياتها كتمرين للطالب) . و لايجاد الحل الامثل نعوض احداثيات النقاط المتطرفة في دالة الهدف وكما مبين بالجدول الآتي:

النقاط المتطرفة	قيمة دالة الهدف $Max.\ Z = 2\ X_1 + 4\ X_2$
O (0 , 0)	$Z = 0$
C (0 , 60)	$Z = 0 + 4 * 60 = 240$
E (75.56 , 22.22)	$Z = 2 * 75.56 + 4 * 22.22 = 240$
B (80 , 0)	$Z = 2 * 80 + 0 = 160$

من الجدول اعلاه نلاحظ ان اكبر قيمة لدالة الهدف هي 240 وهذه القيمة تحققها احداثيات النقطتين (0 , 60) C و (75.56 , 22.22) E ، وذلك يعني هناك اكثر من حل من بين الحلول الممكنة يحقق الحل الامثل ، وفي الحقيقة كل نقطة تقع على قطعة المستقيم CE تعطي نفس قيمة دالة الهدف وهي (240) والتي تمثل اكبر قيمة للهدف القيمة المثلى ، وهذا ما توقعناه من ملاحظة ان معاملات القيد الثاني هي من مضاعفات معاملات دالة الهدف المناضرة لها، ويمكن ملاحظة ذلك برسم الخط المستقيم الذي يمثل دالة الهدف على افتراض أي قيمة للهدف محصورة بين (0) و (240) ولتكن مثلا ($Z = 100$) ، أي رسم معادلة الخط المستقيم ($2\ X_1 + 4\ X_2 = 100$) وكالاتي:

النقطة	$2\ X_1 + 4\ X_2 = 100$	
	X_2	X_1
F	400	0
G	0	80

و رسم الخط المستقيم الممثل لدالة الهدف عندما ($Z = 100$) مبين في الشكل (6)، أذ نلاحظ ان قطعة المستقيم FG والتي تمثل دالة الهدف توازي قطعة المستقيم CE التي تمثل ذلك الجزء من القيد الثاني المحدد لمنطقة الحلول الممكنة.

ملاحظة يمكن للطالب ان يأخذ أي نقطة واقعة على قطعة المستقيم CE وتعويض احداثياتها في دالة الهدف ليتحقق من انها تساوي اكبر قيمة للهدف (والتي تساوي 240).

2- الحلول غير المحدودة : Unbounded Solutions

قد نحصل عند حل مشكلات البرمجة الخطية على حلول ممكنة غير محدودة وهي حالة خاصة نادرة الحدوث في الحياة العملية، ونلاحظ هذه الحالة الخاصة في الرسم البياني عندما نحصل على منطقة حلول ممكنة غير محدودة وكما موضح بالمثال الاتي:

مثال (4) :

اوجد الحل الامثل لنموذج البرمجة الخطية الآتي :

$$\text{Max. } Z = 10X_1 + 23X_2$$

S.T.

$$3X_1 + 5X_2 \geq 75$$

$$X_2 \leq 12$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل:

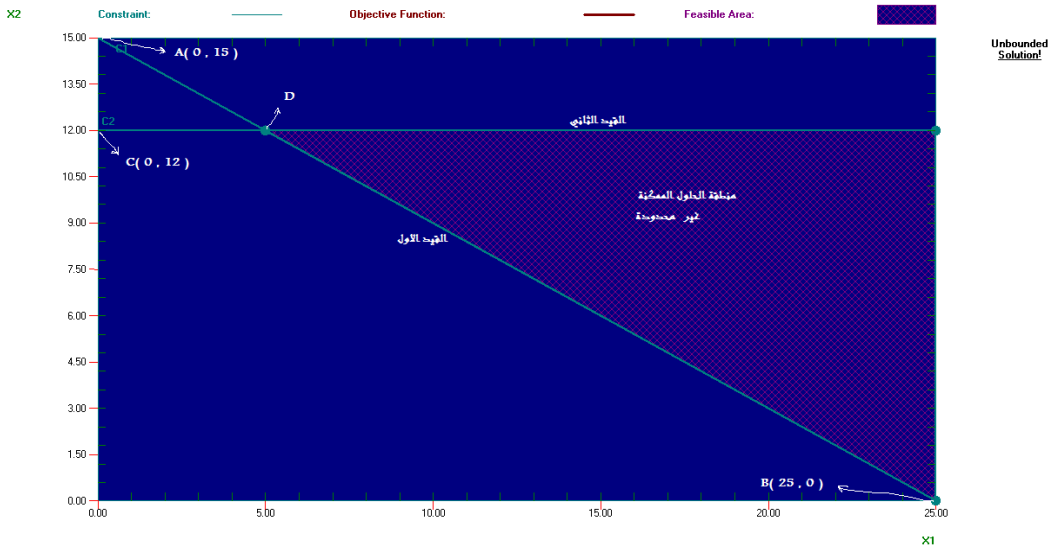
نرسم القيدين الاول والثاني ونحدد منطقة الحلول الممكنة:

النقطة	القيد الاول $3X_1 + 5X_2 = 75$	
	X_2	X_1
A	15	0
B	0	25

القيد الاول يمثل بالمستقيم المار بالنقطتين $A(0,15)$ و $B(25,0)$

اما القيد الثاني فيمثل بالمستقيم المار بالنقطة $C(0,12)$ والموازي للمحور الافقي X_1 .

وكما مبين بالشكل الآتي :



شكل (7): الرسم البياني لقيدي النموذج ومنطقة الحلول الممكنة

نلاحظ من الشكل (7) ان منطقة الحلول الممكنة (المنطقة المشتركة بين القيدين) غير محدودة (مفتوحة) وعليه ليس للمشكلة حل امثل ، أذ كلما ابتعدنا عن نقطة الاصل نحصل على حل يعطي قيمة اعلى لدالة الهدف .

3- عدم وجود حلول مقبولة: No Feasible Solutions

اذا كانت منطقة الحلول الممكنة الناتجة من تقاطع قيود نموذج البرمجة الخطية عبارة عن مجموعة خالية فاننا لن نحصل على حلول ممكنة لمشكلة البرمجة الخطية، بمعنى آخر ليس هناك حلول ممكنة لنموذج البرمجة الخطية في حالة عدم وجود منطقة مشتركة بين قيود النموذج وبالتالي ليس هناك حل امثل للمشكلة، كما موضح بالمثال الآتي:

مثال (5):

اوجد الحل الامثل لنموذج البرمجة الخطية الآتي :

$$\text{Min. } Z = 20\,X_1 + 15\,X_2$$

S.T.

$$5\,X_1 + 10\,X_2 \leq 25$$

$$5\,X_1 + 10\,X_2 \geq 50$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

نرسم القيدين :

النقطة	القيد الاول $5\,X_1 + 10\,X_2 = 25$	
	X_2	X_1
A	2.5	0
B	0	5

النقطة	القيد الثاني $5\,X_1 + 10\,X_2 = 50$	
	X_2	X_1
C	5	0
D	0	10

القيد الاول يمثل بالمستقيم المار بالنقطتين (0 , 2.5) A و (5 , 0) B

اما القيد الثاني فيمثل بالمستقيم المار بالنقطة (0 , 5) C و (10 , 0) D .

وكما مبين بالشكل التالي ، اذ نلاحظ ان النقاط التي تحقق القيد الاول هي تلك النقاط التي تقع اسفل الخط المستقيم بالنقطتين (0 , 2.5) A و (5 , 0) B لأن القيد بهيئة متباينة أقل او تساوي، بينما النقاط التي تحقق القيد الثاني هي تلك النقاط التي تقع أعلى الخط المستقيم بالنقطتين (0 , 5) C و (10 , 0) D لأن القيد بهيئة متباينة أكبر او تساوي، لذا لاتوجد منطقة مشتركة بين القيدين وبالتالي ليس هناك منطقة حلول ممكنة مقبولة (أي لاتوجد حلول ممكنة لهذا النموذج :

: