(51)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \frac{1}{3} R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \frac{1}{2} R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right] R_3 + R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right] -2R_3 + R_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right]$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2/3 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} (*)$$

Find the inverse of the matrix using the Gaussian elimination

واجب

① $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & -2 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

$D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

ملاحظة مهمة جداً

لايجاد المعكوس بطريقة الحذف لكاوس هنالك ثلاث حالات

١- الحالة الاولى :- ان يكون العنصر a_{11} هو واحد عندئذٍ نقوم بتصفير العنصر a_{21} و a_{31} وكما هو واضح في المثالين السابقين

٢- الحالة الثانية :- في حالة عدم وجود واحد في العنصر الاول اي ان $(a_{11} \neq 1)$ عندئذٍ نقوم بجعل العنصر الاول واحد وذلك من خلال قسمته على الرتبة وكما في المثال التالي

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

جد المعكوس للمصفوفة A باستخدام طريقة الحذف لكاوس

Sol// العنصر الاول $a_{11} = 2$ ولايوجد واحد في المصفوفة عندئذٍ نضرب العنصر الاول في $\frac{1}{2}$

$$[A:I] = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \frac{1}{2}R_1 \\ \text{ضرب العنصر الاول في } \frac{1}{2} \end{matrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] -3R_1 + R_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 3 & 4 & -3/2 & 1 \end{array}\right] -2R_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right] -3/2\,R_2 + R_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right] \longrightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

٣- عند وجود واحد في الصف الثاني وليس الاول حينئذٍ نقوم بتبديل الصف الثاني مع الاول

جد المعكوس باستخدام طريقة الصف لكاوس $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

Sol2 $[A\,|\,I]=\left[\begin{array}{cc|cc}2 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{array}\right]$ تبديل R مع R_2

$$\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 1 & 0\end{array}\right]\xrightarrow{-2R_1+R_2}\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 1 & -2\end{array}\right]^{-1/2R_2}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1/2 & 1\end{array}\right]-R_2+R_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 1 & -1/2 & 1\end{array}\right]$$

Ex(2) $A=\begin{bmatrix}2 & 6\\ 3 & 8\end{bmatrix}$ Using Gauss for finding the invers

Sol2

$$[A\,;I]=\left[\begin{array}{cc|cc}2 & 6 & 1 & 0\\ 3 & 8 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{1/2\,R_1}\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 3 & 1/2 & 0\\ 3 & 8 & 0 & 1\end{array}\right]^{-3R_1+R_2}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 3 & 1/2 & 0\\ 0 & -1 & -3/2 & 1\end{array}\right]-1R_2\longrightarrow\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 3 & 1/2 & 0\\ 0 & 1 & 3/2 & -1\end{array}\right]^{-3R_2+R_1}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -4 & 3\\ 0 & 1 & 3/2 & -1\end{array}\right]$$

System of Linear equations منظومة المعادلات الخطية

المعادلات الخطية : هي معادلات ذات مجاهيل من الدرجة الاولى والبسط صورة لها هي شكل

$$aX = b \rightarrow X = \frac{b}{a}$$

حيث ان (a, b) اعداد حقيقية (موجبة، سالبة) صفر عشرية) حيث ان (a, b) هي ثوابت والمتغيرات X وعليه يمكن كتابة ~~المعادلة~~ منظومة المعادلات الخطية والتي تحتوي على (المجاهيل $= n$) و (المعادلات $= m$) بالشكل التالي

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \cdots + a_{nm}X_n = b_m \end{cases}$$

هذه هي الصيغة العامة لمنظومة المعادلات الخطية والتي تتكون من n من المجاهيل و m من المعادلات

مثال : كون نظام من معادلتين وثلاث متغيرات

$$m = 2,\ n = 3$$

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 = b_1$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 = b_2$$

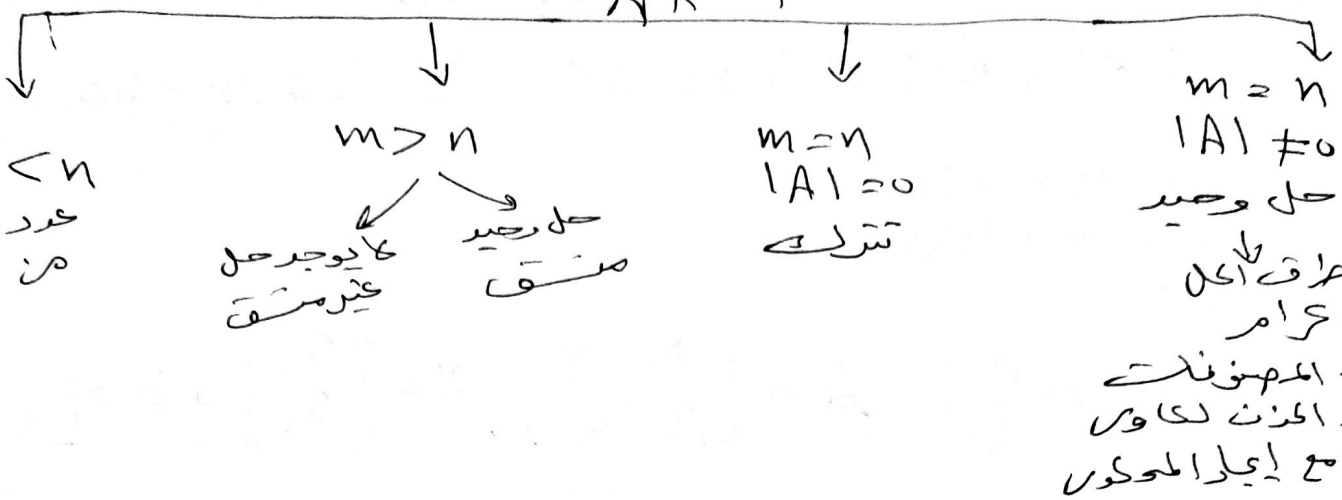
اذا كان الطرف الايمن من المعادلات كلها يساوي الصفر عندئذ يسمى النظام الخطي بالنظام المتجانس وفيما عدا ذلك يسمى النظام بالنظام الخطي الغير متجانس

متجانس $AX = 0$

غير متجانس $AX = B$

كل النظام الخطي المتجانس الغير

$AX = B$



الان سوف نجد الحل للنظام الخطي الغير متجانس

وعندما $m=n$ ، $|A| \neq 0$ هنالك ثلاث طرق للحل

وهي

١- طريقة كرامر ٢- طريقة المحذوفات ٣- طريقة الاختزال لجاوس مع ايجاد المحور

١- طريقة كرامر

Gramer's method

نستخدم هذه الطريقة عندما $m=n$ ، $|A| \neq 0$ وكذلك عندما يكون النظام صغير (متكون من ثلاثة او معادلتين فقط)

وتكون خطوات هذه الطريقة

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

حيث A_i هي المحذوفة الناتجة من تعويض العمود B مكان العمود (i)

ويكون الحل دائماً وحيد

EX(1) Use Gramer's method to solve the following Linear system.

باستخدام طريقة كرامر حل المعادلات الآتية

$$2X_1 + 3X_2 = 2$$
$$3X_1 + 4X_2 = 5$$

Sol:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$\therefore |A| = 8 - 9 = -1 \neq 0$, $m = n = 2$

$|A_1| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 15 = -7$ ابدال العمود الاول بـ B

$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 6 = 4$ ابدال العمود الثاني بـ B

نقوم بايجاد X_2 و X_1

$$\therefore X_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

$$X_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-7}{-1} = 7$$

$$X_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{4}{-1} = -4$$

$$\therefore \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \end{bmatrix}$$

التحقق:

$2(7) + 3(-4) = 14 - 12 = 2$

$3(7) + 4(-4) = 21 - 16 = 5$