4- الفروقات التقدمية (Forward Differences):-

يعرف الفرق التقدمي الاول كما يلي:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0$$

حيث ان Δ هو المؤثر التقدمي

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \Delta y_0 \\ &= (1+\Delta) y_0 \end{aligned}$$

$$y_2 = (1+\Delta)^2 y_0$$

$$\vdots$$

$$y_m = (1+\Delta)^m y_0$$

باستخدام مفكوك ذي الحدين نحصل

$$y_m = y_0 + m\Delta y_0 + \frac{m(m-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \cdots$$

حيث ان $m = \frac{x_m - x_0}{h}$ وتسمى هذه الصيغة بطريقة الفروقات التقدمية للتعديل الداخلي (نيوتن-التقدمية).

مثال:- اكتب جدول الفروقات للدالة $f(x) = x^3 - 1$ علما ان $x = 0, 1, 2, 3, 4$ ثم جد تخمين الدالة عند $f(0.5)$

الحل:-

x_i	y_i	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
0	-1	1	6	6	0
1	0	7	12	6	
2	7	19	18		
3	26	37			
4	63				

$$h = 1, m = \frac{0.5 - 0}{1} = 0.5$$

$$f(0.5) = y_0 + m\Delta y_0 + \frac{m(m-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\Delta^3 y_0$$

$$= -1 + 0.5(1) + \frac{0.5(0.5-1)}{2!}(6) + \frac{0.5(0.5-1)(0.5-2)}{3!}(6)$$

$= -1 + 0.5 - 0.125(6) + 0.0625(6) = -0.875$

$f(0.5) = (0.5)^3 - 1 = -0.875$

تكون صيغة نيوتن-التقدمية للتعديل الداخلي متقاربة عندما $|m| < 1$

5- الفروقات التراجعية (Backward Differences):-

يعرف الفرق التراجعي الاول كما يلي:

$$\nabla y_1 = y_1 - y_0$$

$$\nabla y_2 = y_2 - y_1$$

$$\nabla y_i = y_i - y_{i-1}$$

$$\nabla^2 y_i = \nabla(\nabla y_i) = \nabla(y_i - y_{i-1}) = y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}$$

وبصورة عامة

$$\nabla^k y_i = \nabla^{k-1} y_i - \nabla^{k-1} y_{i-1} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j y_{i-j}$$

بما ان

$$y_{i-1} = (1 - \nabla) y_i$$

$$\therefore y_i = (1 - \nabla)^{-1} y_{i-1} \dots\dots\dots (1)$$

وان

$$\Delta y_{i-1} = y_i - y_{i-1}$$

$$y_i = (1 + \Delta) y_{i-1} \dots\dots\dots (2)$$

من العلاقة (1) و(2) نحصل على

$$(1 + \Delta) = (1 - \nabla)^{-1}$$

وبصورة عامة فان

$$(1 + \Delta)^m = (1 - \nabla)^{-m}$$

$$\therefore y_m = (1-\nabla)^{-m} y_0$$

او

$$y_m = y_0 + m\nabla y_0 + \frac{m(m+1)}{2!}\nabla^2 y_0 + \frac{m(m+1)(m+2)}{3!}\nabla^3 y_0 + \cdots$$

تسمى هذه الصيغة بطريقة الفروقات التراجعية للتعديل الداخلي (نيوتن-التراجعية).

مثال:- اكتب جدول الفروقات للدالة $f(x) = log_{10}^{x}$ لقيم $x = 1000\ to\ 1050$ ثم جد تخمين الدالة عند $y = log_{10}^{1044}$ اذا علمت ان $h = 10$

الحل:-

x_i	y_i	∇	∇^2	∇^3
1000	3.00000	0.00432	−0.00004	−0.0001
1010	3.00432	0.00428	−0.00005	0.000023
1020	3.00860	0.00423	−0.000027	−0.00002
1030	3.01283	0.004120	−0.000074	
1040	3.017033	0.004156		
1050	3.021189			

$$h = 10, m = \frac{1044-1050}{10} = -0.6$$

$$log_{10}^{1044} = 3.021189 + (-0.6)(0.004156 + \frac{(-0.6)(-0.6+1)}{2!}(-0.000074) + \frac{(-0.6)(-0.6+1)(-0.6+2)}{3!}(-0.00002) = 3.01887005$$

واجب:- اكتب جدول الفروقات للقيم التالية وجد تخمين $f(0.5), f(4.8)$

x	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
y	*0*	*-1*	*8*	*135*	*704*	*2375*

6- الفروقات المركزية (Central Differences):-

لتكن لدينا

$$\delta y_{i+1/2} = y_{i+1} - y_i$$

$$\delta^2 y_{i+1/2} = \delta\left(\delta y_{i+1/2}\right)$$
$$= \delta(y_{i+1} - y_i)$$
$$= \delta y_{i+1} - \delta y_i$$

$$\delta y_{i+1/2} = \Delta y_i = \nabla y_{i+1}$$

$$\delta^2 y_i = \delta y_{i+1/2} - \delta y_{i-1/2}$$
$$= y_{i+1} - y_i - (y_i - y_{i-1})$$
$$= y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}$$

x_i	y_i	δ	δ^2	δ^3	δ^4
x_{-2}	y_{-2}	$\delta y_{-3/2}$	$\delta^2 y_{-2}$	$\delta^3 y_{-3/2}$	$\delta^4 y_{-2}$
x_{-1}	y_{-1}	$\delta y_{-1/2}$	$\delta^2 y_{-1}$	$\delta^3 y_{-1/2}$	$\delta^4 y_{-1}$
x_0	y_0	$\delta y_{1/2}$	$\delta^2 y_0$	$\delta^3 y_{1/2}$	$\delta^4 y_0$
x_1	y_1	$\delta y_{3/2}$	$\delta^2 y_1$	$\delta^3 y_{3/2}$	$\delta^4 y_1$
x_2	y_2		$\delta^2 y_2$		$\delta^4 y_2$

$$\delta y_{1/2} = \Delta y_0 \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\delta y_1 = y_{3/2} - y_{1/2}$$

$$\delta^2 y_1 = \delta\left(y_{3/2} - y_{1/2}\right)$$
$$= y_2 - 2y_1 + y_0$$
$$= \Delta^2 y_0 \ldots\ldots\ldots. (2)$$

$$\delta^3 y_{3/2} = \Delta^3 y_0 \ldots\ldots. (3)$$

باستخدام صيغة نيوتن-التقدمية للتعديل الداخلي نحصل على