$$A_{-3}^{0} = \int_{-3}^{0} f(x)\ dx = \int_{-3}^{0} (-x^3)\ dx = -\int_{-3}^{0} x^3\ dx = -\frac{x^4}{4}\Big|_{-3}^{0}$$
$$= -\left(0 - \frac{-3^4}{4}\right) = \frac{81}{4}$$
$$A_{0}^{2} = -\int_{0}^{2} (-x^3)\ dx = \int_{0}^{2} x^3\ dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{2} = \frac{2^4}{4} - 0 = 4$$

وعليه فأن

$$A = A_{-3}^{0} + A_{0}^{2} = \frac{81}{4} + 4 = \frac{97}{4}$$

مثال: جد مساحة المنطقة المحددة بمخطط الدالة $f(x) = x^2 - 6\,x + 8$ ومحور السينات

الحل: يتقاطع منحني الدالة مع المحور السيني أذا كان $f(x) = 0$. لأيجاد نقاط التقاطع نضع

$$f(x) = 0 \Longrightarrow x^2 - 6\,x + 8 = 0 \Longrightarrow (x-2)\cdot(x-4) = 0$$
$$\Longrightarrow x = 2 \quad \text{or} \quad x = 4$$

أذاً يقطع المنحني المحور السيني عند $x = 2$ و $x = 4$ وتكون هاتان القيمتان حدي التكامل.

وبما أن $f(x) \le 0$ لكل x في الفترة المغلقة $[2,4]$ ، فأن المنطقة المطلوب أيجاد مساحتها تقع تحت محور السينات. لذلك

$$A_{2}^{4} = -\int_{2}^{4} (x^2 - 6\,x + 8)\ dx = -\left(\frac{x^3}{3} - \frac{6\,x^2}{2} + 8\,x\right)\Big|_{2}^{4}$$
$$= -\left(\left(\frac{4^3}{3} - \frac{6\,(4)^2}{2} + 8\,(4)\right) - \left(\frac{2^3}{3} - \frac{6\,(2)^2}{2} + 8\,(2)\right)\right)$$
$$= -\left(\left(\frac{64}{3} - \frac{96}{2} + 32\right) - \left(\frac{8}{3} - \frac{24}{2} + 16\right)\right) = -\left(\frac{64-48}{3} - \frac{8+12}{3}\right)$$
$$= -\left(\frac{16}{3} - \frac{20}{3}\right) = -\left(\frac{-4}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

مثال: جد مساحة المنطقة المحددة بمخطط الدالة $f(x) = |2x-1|$ ، محور السينات والمستقيمين $x = 0\ ,\ x = 2$.

الحل: من تعريف الحد المطلق، نجد أن

$$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & (2x-1) \ge 0 \\ -(2x-1) & (2x-1) < 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 2x-1 & ,\quad x \ge 1/2 \\ -(2x-1) & ,\quad x < 1/2 \end{cases}$$

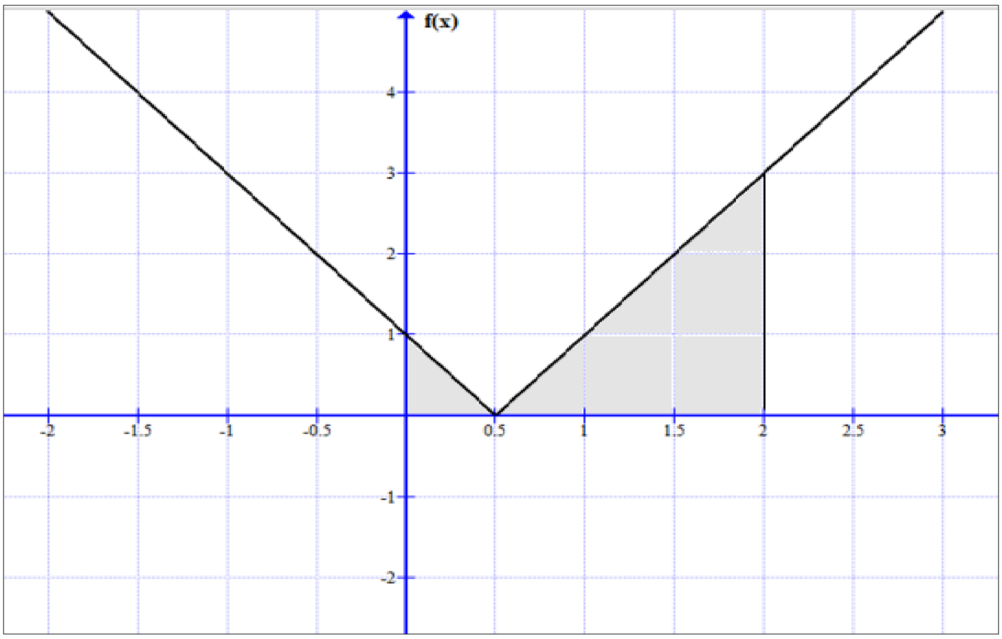
المساحة المطلوبة تحسب كالاتي:

$$A_0^2=\int_0^2 |2x-1|\ dx=\int_0^{\frac{1}{2}} -(2x-1)\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^{2} (2x-1)\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}} (-2x+1)\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^{2} (2x-1)\,dx=\frac{-2x^2}{2}+x\ \Big|_0^{1/2}+\frac{2x^2}{2}-x\ \Big|_{1/2}^{2}$$

$$=-x^2+x\ \Big|_0^{1/2}+x^2-x\ \Big|_{1/2}^{2}$$

$$=\left(\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)-(0)\right)+\left((4-2)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{1}{4}+2+\frac{1}{4}=\frac{5}{2}$$



مثال: جد مساحة المنطقة المحددة بمخطط الدالة $f(x)=x^2+3\,x$ ومحور السينات .

الحل: نحاول أيجاد نقاط تقاطع المنحني مع محور السينات، وذلك بوضع $f(x)=0$.

$f(x)=0 \Longrightarrow\ x^2+3\,x=0 \Longrightarrow x(x+3)=0$

وهذا يؤدي الى أن $x=0$ أو $x=-3$. بما أن $f(x)\le 0$ لكل x في الفترة $[-3,0]$ فأن

$$A^{0}_{-3} = -\int_{-3}^{0} (x^2 + 3\,x)\ dx = -\left(\frac{x^3}{3} + \frac{3\,x^2}{2}\right) \Big|_{-3}^{0}$$

$$= -\left((0) - \left(\frac{(-3)^3}{3} + \frac{3(-3)^2}{2}\right)\right) = -\left(0 - \left(\frac{-27}{3} + \frac{27}{2}\right)\right)$$

$$= -\left(\frac{27}{3} - \frac{27}{2}\right) = -\left(\frac{54 - 81}{6}\right) = -\left(\frac{-27}{6}\right) = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$

مثال: جد مساحة المنطقة المحددة بمخطط الدالة $f(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}$ ، محور السينات والمستقيمين $x = 1\ ,\ x = 2$. الجواب: $A = \frac{3}{20}$.

المساحة بين منحنيين The Area Between Two curves

لتكن f ، g دالتين مستمرتين على الفترة المغلقة $[a, b]$ ، بحيث أن $f(x) \geq g(x)$ لكل x في $[a, b]$ ، أي، أن مخطط $f(x)$ يقع فوق مخطط $g(x)$ في الفترة $[a, b]$. فأن مساحة المنطقة المحددة بالمخططين لـــ $f(x)$ ، $g(x)$ والمستقيمين $x = a$ ، $x = b$ هي:

$$A = \int_{a}^{b} (f(x) - g(x))\, dx$$

ملاحظة:

في حالة $g(x) \geq f(x)$ ، فأن المساحة في التعريف أعلاه تحسب كالاتي:

$$A = \int_{a}^{b} (g(x) - f(x))\, dx$$

مثال: جد مساحة المنطقة المحددة بمخطط الدالة $f(x) = x^2 + 4$ والمستقيمات

$x = 1\ ,\qquad x = -1\ ,\qquad y = 4x$

الحل: بما أن $x^2 + 4 \geq 4x$ لكل x في $[-1, 1]$ ، فأن

$$A = \int_{-1}^{1} (f(x) - g(x))\, dx = \int_{-1}^{1} (x^2 + 4 - 4x)\, dx = \frac{x^3}{3} + 4x - \frac{4}{2}x^2 \Big|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{x^3}{3} + 4x - 2x^2 \Big|_{-1}^{1}$$

$$= \left(\frac{1^3}{3} + 4(1) - 2(1^2)\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} + 4(-1) - 2((-1)^2)\right)$$

$$= \left(\frac{1}{3} + 4 - 2\right) - \left(\frac{-1}{3} - 4 - 2\right) = \frac{1 + 6}{3} - \left(\frac{-1 - 18}{3}\right) = \frac{7}{3} - \left(\frac{-19}{3}\right)$$

$$= \frac{7}{3} + \frac{19}{3} = \frac{26}{3}$$

مثال: جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحني $y = x^2$ والمستقيم $y = 2x$.

الحل: نوجد أولاً نقطتي تقاطع المنحني مع المستقيم، وذلك بحل معادلتيهما انياً

$y = x^2 \quad , \quad y = 2x$

$x^2 = 2x$

$x^2 - 2x = 0$

$x(x-2) = 0$

أي أن $x = 0$ أو $x = 2$. وبذلك، تكون $a = 0$ و $b = 2$. نلاحظ أن $2x \geq x^2$ لكل x في الفترة $[0,2]$. وبذلك، فأن

$$A = \int_0^2 (2x - x^2)\,dx = \frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \left(2^2 - \frac{2^3}{3}\right) - (0-0) = \frac{4}{3}$$

مثال: جد المساحة المحصورة بين منحنيي الدالتين $y = x^3$ و $y = \sqrt{x}$.

الحل: نوجد أولاً نقطتي تقاطع المنحنيين $y = x^3$ و $y = \sqrt{x}$.

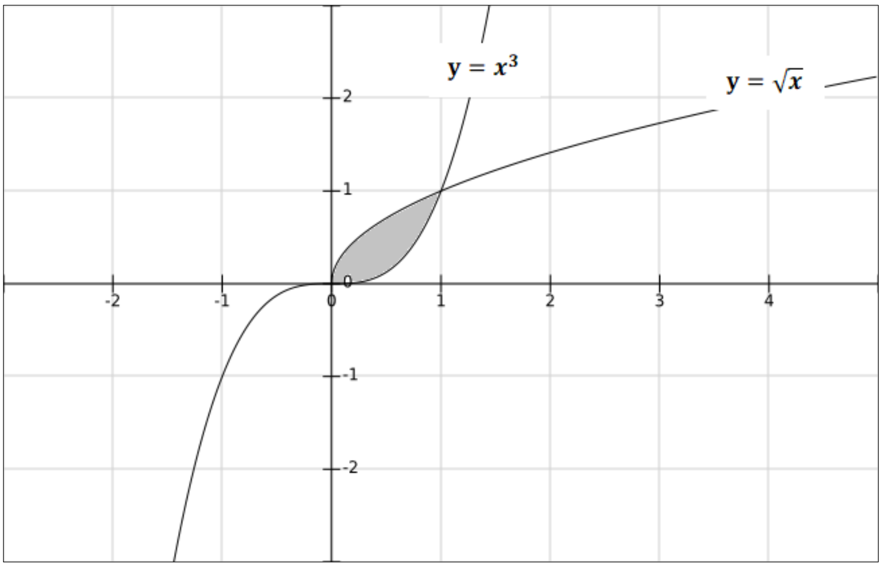
$x^3 = \sqrt{x} \Longrightarrow x^6 = x \Longrightarrow x^6 - x = 0 \Longrightarrow x(x^5 - 1) = 0$

Either $x = 0$ or $x = 1$

نلاحظ أن $\sqrt{x} \geq x^3$ لكل x في الفترة $[0,1]$. وبذلك، فأن

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^3)\,dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^4}{4}\Big|_0^1$$

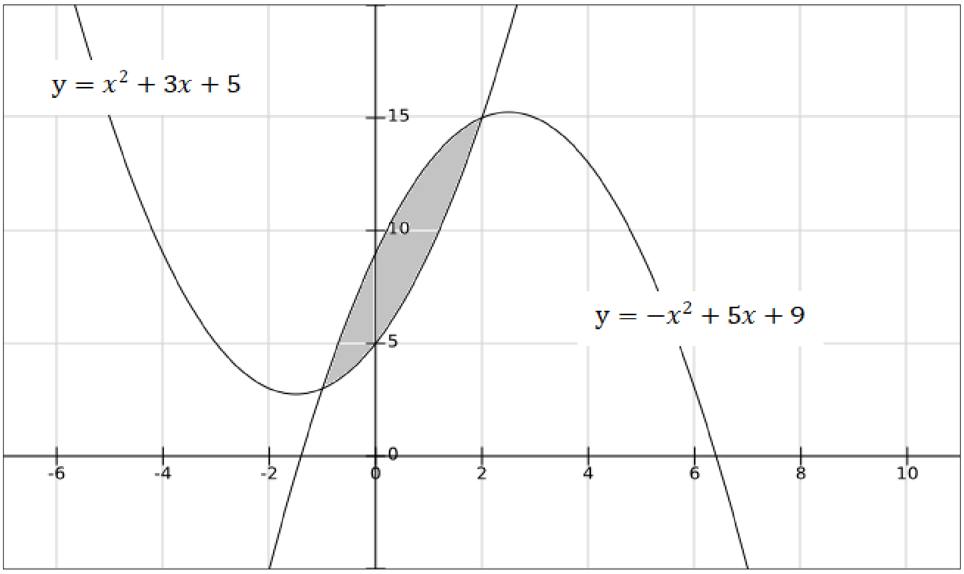
$$\left(\frac{2}{3}(1)^{3/2} - \frac{1^4}{4}\right) - (0-0) = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{8-3}{12} = \frac{5}{12}$$



مثال: جد المساحة المحصورة بين منحني الدالتين

$y = x^2 + 3x + 5$ و $y = -x^2 + 5x + 9$.

الحل: $A = 9$



مثال: جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحني الدالتين

$y = -x^2 - 4$ و $y = -8$

$y = 2 - x^2$ و $y = -x$

$y = x^3 + 3$ و $y = 4x + 3$