Example: Find the area bounded between $y = x^3$ and $y = \sqrt{x}$.

الحل: واضح ان المعادلتين تتقاطعان عند النقطتين $(0,0)\,,(1,1)$.

$$\therefore\ A(R) = \int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} dy dx = \int_0^1 [y]_{x^3}^{\sqrt{x}}\, dx = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^3\right) dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{(1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{1^4}{4}\right) - (0) = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

أذاً المساحة المحددة بين المنحني $y = x^3$ والمستقيم $y = \sqrt{x}$ تساوي $\frac{5}{12}$.

Homework:

Example: Find the area bounded between $y = x^2$ and $y = x$.

Example: Find the area bounded by the curve $y = 4 - x^2$ and $x -$ axis.

Example: Find the area bounded between $y^2 + x = 0$ and $y = x + 2$.

Example: Find the area bounded between $y = x^2$ and $y - x = 2$.

Example: Find the area bounded by the curve $y = \sqrt{3 - x^2}$ and the lines

$$y = \sqrt{3}\ ,\quad x = \sqrt{3}\ ,\quad x = -\sqrt{3}$$

Example: Find the area bounded between $y = x^4$ and $y = 4 - 3x^2$.

حساب الكتلة

أذا كانت $f(x,\mathrm{y})$ تمثل الكثافة $\frac{\Delta \mathrm{m}}{\Delta \mathrm{v}}$ فأن:

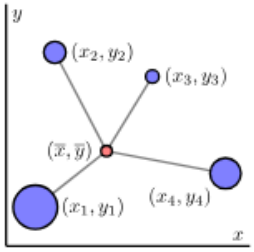
$$\mathrm{M(R)} = \iint_{\mathrm{R}} f(x,\mathrm{y})\,\mathrm{dA}$$

حيث ان $\mathrm{M(R)}$ كتلة الصفيحة التي على شكل المنطقة R .

حساب مراكز الكتلة

اذا كانت الدالة تمثل الكثافة فأن مراكز الكتلة (x,y) للصفيحة الممثلة بالمنطقة R يعطى بالمعادلتين:

$$\mathrm{M}_x = \iint_{\mathrm{R}} \mathrm{y}\, f(x,\mathrm{y})\,\mathrm{dA} \quad , \quad \mathrm{M}_{\mathrm{y}} = \iint_{\mathrm{R}} x\, f(x,\mathrm{y})\,\mathrm{dA}$$



A center of mass $(\bar{x}, \bar{\mathrm{y}})$ of four masses.

عزم القصور الذاتي

عزم صفيحة حول x :

$$\mathrm{I}_{\mathrm{y}} = \iint_{\mathrm{R}} x^2\, f(x,\mathrm{y})\,\mathrm{dA}$$

عزم صفيحة حول y :

$$\mathrm{I}_x = \iint_{\mathrm{R}} \mathrm{y}^2\, f(x,\mathrm{y})\,\mathrm{dA}$$

عزم القصور الذاتي القطبي حول نقطة الاصل:

$$\mathrm{I}_0 = \mathrm{I}_x + \mathrm{I}_{\mathrm{y}} = \iint_{\mathrm{R}} (x^2 + \mathrm{y}^2)\, f(x,\mathrm{y})\,\mathrm{dA}$$