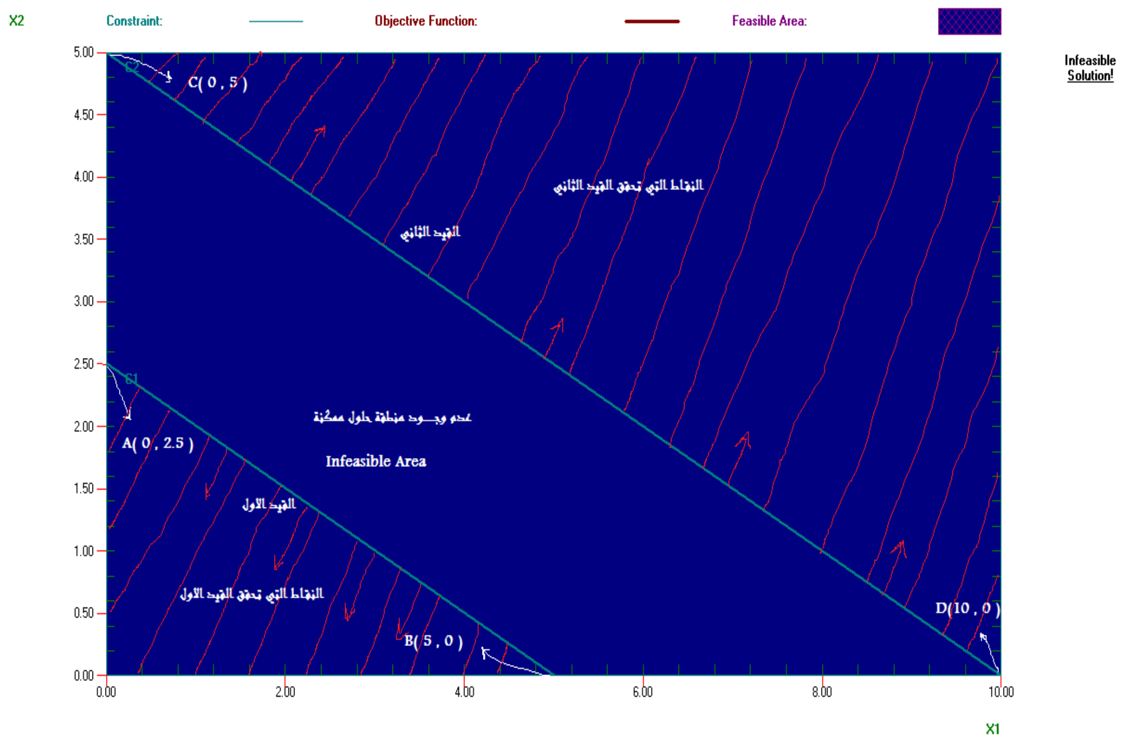


شكل (8): الرسم البياني لقيدي نموذج البرمجة الخطية والذي يبين عدم وجود منطقة حلول ممكنة.

4- الانحلال : Degeneracy

تحدث حالة الانحلال عندما يكون عدد متغيرات القرار التي تكون قيمتها اكبر من الصفر في الحل الامثل أقل من عدد قيود نموذج البرمجة الخطية. كما موضح بالمثال الاتي:

مثال (6):

اوجد الحل الامثل لنموذج البرمجة الخطية الآتي :

$$\text{Max. } Z = 12\,X_1 + 8\,X_2$$

$$\text{S.T.}$$

$$4\,X_1 + 9\,X_2 \leq 1800$$

$$3\,X_1 + 2\,X_2 \leq 400$$

$$X_1 ,\ X_2 \geq 0$$

نرسم قيدي النموذج :

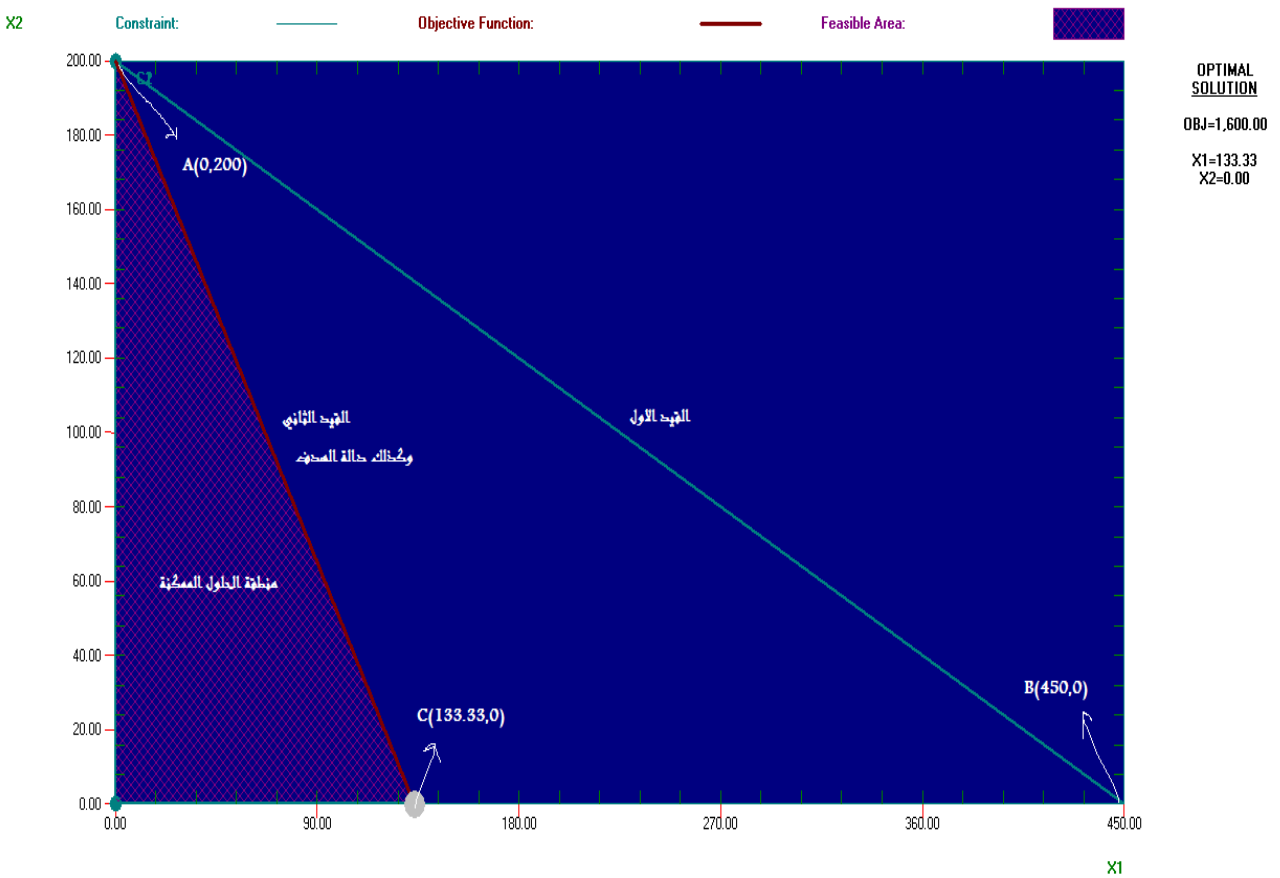
النقطة	القيد الثاني $3X_1 + 2X_2 = 400$	
	X_2	X_1
A	200	0
D	0	133.33

النقطة	القيد الاول $4X_1 + 9X_2 = 1800$	
	X_2	X_1
A	200	0
B	0	450

القيد الاول يمثل بالخط المستقيم المحدد بالنقطتين A(0,200) و B(450,0) .

القيد الثاني يمثل بالخط المستقيم المحدد بالنقطتين A(0,200) و D(133.33,0).

نرسم القيدين ونحدد منطقة الحلول الممكنة وكما مبين بالشكل الاتي:



شكل (9): الرسم البياني لقيدي نموذج البرمجة الخطية ومنطقة الحلول الممكنة .

نلاحظ من نموذج البرمجة الخطية ان معاملات القيد الثاني هي من مضاعفات معاملات دالة الهدف المناضرة لها مما نتوقع تعدد البياني الحلول المثلى، وهذا ما نلاحظه بالضبط من الرسم البياني للخط المستقيم AC الذي يمثل القيد الثاني واذي يمثل ايضا دالة الهدف عند القيمة العضمى للهدف والتي تساوي 1600 بمعنى اخر ان المستقيم الذي يمثل القيد الثاني ينطبق على المستقيم الذي يمثل دالة الهدف (المستقيم بالون الاحمر) او انهما متوازيان. وذلك يعني ان اي نقطة تقع على المستقيم AC تحقق احداثياتها أكبر قيمة لدالة الهدف والبالغة 1600 ، لنعوض النقاط المتطرفة المحيطة بمنطقة الحلول الممكنة وهي O , A , C في دالة الهدف كما مبين في الجدول الآتي:

النقاط المتطرفة	قيمة دالة الهدف $Max.\ Z = 12\ X_1 + 8\ X_2$
O (0 , 0)	$Z = 0$
A (0 , 200)	$Z = 0 + 8 * 200 = 1600$
C (133.33333 , 0)	$Z = 12 * 133.33333 + 0 = 1600$

من الجدول اعلاه نلاحظ ان النقطتين (A (0 , 200 و (C (133.33333 , 0 تحققان نفس قيمة دالة الهدف والتي تمثل اكبر قيمه له (1600) وفي الحقيقة هناك اكثر من هاتين النقطتين تحقق نفس القيمة المثلى للهدف وتلك النقاط تقع على المستقيم AC بمعنى ان النموذج له حلول متعددة مثلى. من هذه الحلول المتعددة المثلى الحل المتمثل باحداثيات النقطة (A (0 , 200 أي $X_1 = 0$ و $X_2 = 200$ يسمى بالحل المنحل لان لدينا متغير واحد فقط قيمته أكبر من الصفر بينما لدينا قيدين في النموذج (عدد متغيرات القرار التي هي اكبر من الصفر اقل من عدد القيود) ، وكذلك الحل الذي تمثله احداثيات النقطة (C(133.33333 ,0 اذ ان $X_2 = 0$ و $X_1 = 133.33333$.

هذه المشكلة تعاني من حالتين خاصة وهي تعدد الحلول المثلى و الحلول المنحلة.

(1.4) الصيغة العامة للبرمجة الخطية:

ومما تقدم في المثالين السابقين في المحاضرة السابقة يمكن تحديد الصيغة العامة للبرمجة الخطية. حيث يمكن وضع صيغة ثابتة تتضمن دالة الهدف والتي يرمز لها بالرمز $\boldsymbol{Z}$ او $\boldsymbol{X}$، والقيود التي من الممكن أن تأخذ شكل $(\geq, =, \leq)$ والمتعارف عليه هو أن جميع المتغيرات x_j . المطلوب إتخاذ القرار بشأنها تكون غير سالبية لانها متغيرات تتصل بالواقع لذلك تصبح النتائج السالبية كميات غير حقيقية.

وعليه تتكون الصيغة العامة للبرمجة الخطية كالأتي:

$$max\, or\, min Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots\cdots + c_nx_n$$ دالة الهدف

$subject.To:$

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n\ (\leq, =, \geq)\ b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n\ (\leq, =, \geq)\ b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots\cdots + a_{mn}x_n\ (\geq, =, \leq)\ b_m \end{aligned}\right\}$$ القيود

$$x_1, x_1, \cdots\cdots, x_n \geq 0$$ قيد عدم السالبية

حيث أن $\boldsymbol{a_{ij}}, \boldsymbol{b_j}, \boldsymbol{c_j}$ ثوابت تُحدد قيد الدراسة.

$$i = 1,2, \dots, m \qquad\qquad j = 1,2, \dots, n$$

$\boldsymbol{x_j}$: المتغيرات المطلوب إتخاذ القرار بشأنها.

$\boldsymbol{b_i}$: تمثل كمية الموارد المحدودة المطلوب تخصيصها لتحديـــــد هدف معين.

$\boldsymbol{a_{ij}}$: تمثل كمية الموارد المحدودة من نوع $(\boldsymbol{j})$ والمطلوب تخصيصها لكل وحدة واحدة من النشاط أو الفعالية أو المنتج $(\boldsymbol{j})$

$\boldsymbol{c_j}$: تمثل الربح أو الكلفة.

يمكن إختصار هذه الصيغة كما يلي:

$$max\, or\, min Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$Sub.To$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\ (\leq, =, \geq)\ b_i$$

$$i = 1,2, \dots, m \quad , \quad j = 1,2, \dots, n \quad , \quad x_j \geq 0$$

أو يمكن إختصارها بشكل مصفوفات ومتجهات أيضاً.

وكما يلي:

$$max\ or\ min\ Z = CX$$
$$sub.To$$
$$AX(\leq, =, \geq)B$$
$$X \geq 0$$

حيث أن:

$$C = (C_1\ C_2 \dots C_n)$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m*n} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

نظراً لإختلاف صيغ البرمجة الخطية فمن الضروري تعديل هذه الصيغ لتحديد إنموذج حل مناسب والذي سنتطرق إليه لاحقاً. توجد صفتان مناسبة لإنموذج البرمجة الخطية هي الصيغة القانونية $Cononical\ from$ والصيغة القياسية او المعيارية $Standard\ from$

الصيغة القانونية

(1.4.1) الصيغة القانونية $\boldsymbol{Cononical\ from}$

في هذه الصيغة تكون القيود دائماً بصيغة الأصغر أو يساوي ($\leq$) إذا كانت دالة الهدف تعظيم $\boldsymbol{max}$. وتكون القيود دائماً بصيغة الأكبر أو اليساوي ($\geq$) إذا كانت دالة الهدف $\boldsymbol{min}$ وكما يلي:

$$max\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$Sub.To$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$$
$$i = 1,2, \dots ,m \quad , \quad j = 1,2, \dots, n \quad , \quad x_j \geq 0$$

$$min\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$Sub.To$$
$$min\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq b_i$$
$$i = 1,2, \dots ,m \quad , \quad j = 1,2, \dots, n \quad , \quad x_j \geq 0$$

وبالامكان وضع أي صيغة للبرمجة الخطية بالشكل القانوني أو العام بإستخذام عملية التحويل كما يلي:

.1

$minimize(Z) = maximize(-Z)$ والعكس صحيح

$maximize(Z) = minimize(-Z)$

مثال(1.3): حول إنموذج البرمجة الخطية إلى اليصغة القانونية:

$$\boldsymbol{max\,Z = 6x_1 + 10x_2}$$

$S.t$

$2x_1 - 4x_2 \geq 12$

$3x_1 + 6x_2 \geq 20$

$x_1, x_2 \geq 0$

$sol:$

$$\boldsymbol{-minZ = -6x_1 - 10x_2}$$

$2x_1 - 4x_2 \geq 12$

$3x_1 + 6x_2 \geq 20$

$x_1, x_2 \geq 0$

.2 تحويل صيغة المتباينة $(\leq)$ إلى صيغة $(\geq)$ بضرب طرفي المعادلة بــــــــ والعكس صحيح:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1 \qquad * (-1)$

$= \ -a_{11}x_1 - a_{12}x_2 \leq -b_1$

مثال (1.4): حول الانموذج الأتي إلى الصيغة القانونية.

$$\boldsymbol{minZ = 10x_1 + 2x_2}$$

$s.t$

$11x_1 + 6x_2 \geq 50$

$4x_1 + 5x_2 \leq 8 \qquad * (-1)$

$x_1, x_2 \geq 0$

$sol:$

$$\boldsymbol{minZ = 10x_1 + 2x_2}$$

$11x_1 + 6x_2 \geq 50$

$-4x_1 - 5x_2 \geq -8$

$x_1, x_2 \geq 0$

3. تحويل صيغة المساواة في القيود إلى متباينتين متعاكستين بالإتجاه أي إحدهما (≥) والأخر (≤) كما يلي:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$$

مثال (1.5): حول إنموذج البرمجة الخطية الأتي إلى الصيغة القانونية:

$$\boldsymbol{max\, Z = 5x_1 + 3x_2}$$

$S.To$

$$6x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$4x_1 + x_2 = 16$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$sol:$

$$6x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$4x_1 + x_2 \geq 16 \qquad * (-1)$$

$$4x_1 + x_2 \leq 16$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\boldsymbol{max\, Z = 5x_1 + 3x_2}$$

$s.To$

$$6x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$-4x_1 - x_2 \leq -16$$

$$4x_1 + x_2 \leq 16$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

---

4. تحويل المتغير غير المقيد بإشارة (أي إن إشارته غير محددة فيما إذا كانت موجبة أو سالبة أو أصغر) ، وذلك بالـفرق بين متغيرين تكون إشارة كل منهما مقيدة (أي غير سالبة) مثال (إذا كان المتغير $\boldsymbol{x_1}$ غير مقيد بإشارة فأنه يكـــافئ:

$$x_1 = \left(x_1' - x_1''\right) \quad , x_1' \geq 0 \quad , x_1'' \geq 0$$

مثال (1.6): حول الأنموذج الآتي إلى الصيغة القانونية:

$$\boldsymbol{min\, Z = 6x_1 + 3x_2}$$

$s.To$

$x_1 + 5x_2 \geq 6$

$4x_1 + 3x_2 \geq 10$

$x_1 \geq 0 \quad , \boldsymbol{x_2}\ unves\ in\ sign$

الحل:

$let\ \boldsymbol{x_2} = x_2' - x_2'' \quad , x_2' \geq 0 \quad , x_2'' \geq 0$

$\boldsymbol{min\ Z = 6x_1 + 3(x_2' - x_2'')}$

$s.to$

$x_1 + 5(x_2' - x_2'') \geq 6$

$4x_1 + 3(x_2' - x_2'') \geq 10$

$x_1, x_2', x_2'' \geq 0$

$\boldsymbol{min\ Z = 6x_1 + 3x_2' - 3x_2''}$

$S.to$

$x_1 + 5x_2' - 5x_2'' \geq 6$

$4x_1 + 3x_2' - 3x_2'' \geq 10$

$x_1, x_2', x_2'' \geq 0$

الصيغة القياسية أو المعيارية

(1.4.2) الصيغة القياسية أو المعيارية $standard\ from$

تعتمد هذه الصيغة في تحليل البرامج الخطية بالطرق التي سوف نتطرق لها لاحقاً ويتشرط في هذه الصيغة أن تكون القيود على شكل معادلات $(=)$ سواء كانت دالة الهدف $\boldsymbol{max\ or\ min}$. حيث يمكن تحويل قيود المتباينات إلى مساواة (معادلات) وذلك بإضافة أو بـــــطرح متغيرات وهمية $(s_i \geq 0)$$\boldsymbol{slack\ variable}$ إلى الطرف الأيسر من كل قيد. وهذه المتغيرات تُضاف للقيود من نوع $(\leq)$ أصغر أو يساوي وتطرح من القيود من نوع $(\geq)$ أكبر أو يساوي. ويُضاف لها متغير وهمي artificial variable ويُرمز له (R) وكما يلي:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$$

$$\rightarrow a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + s_1 = b_1$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1$$