الاعداد الحقيقية The real numbers

الاعداد الحقيقية هي كل الاعداد النسبية وغير النسبية، ويرمز لمجموعة الاعداد الحقيقية بالرمز $\mathbb{R}$ ، أي أن

$$\mathbb{R} = \mathbb{I} \cup \mathbb{Q}$$

الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

الاعداد النسبية (الكسرية)

Rational Numbers

وهي الاعداد التي على شكل $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ حيث $\mathbf{a}\,,\mathbf{b}$ يمثلان عددين صحيحين، و $\mathbf{b \neq 0}$. ويرمز لهذه المجموعة بالرمز $\mathbb{Q}$ ، أي أن

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \ : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$$

معروف أن كل عدد نسبي يمكن كتابته بشكل كسر عشري منته أو غير منته ولكنه دوري، وبالعكس، كل كسر عشري منتهي المراتب أو دوري يمكن تحويله الى عدد نسبي.

الاعداد غير النسبية

(Irrational Numbers)

العدد غير النسبي هو العدد الذي لا يمكن كتابته على الشكل $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ حيث $\mathbf{a}\,,\mathbf{b}$ يمثلان عددين صحيحين. أي أن الاعداد غير النسبية، هي الاعداد الحقيقية التي لا تكون أعداداً نسبية. يرمز لمجموعة الاعداد غير النسبية بالرمز $\mathbb{I}$ ، أي أن

$$\mathbb{I} = \left\{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \neq \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \ : \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{Z}\right\}$$

الاعداد الصحيحة Integer Numbers

$$\mathbb{Z} = \{\dots, \mathbf{-3}, \mathbf{-2}, \mathbf{-1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \dots\}$$

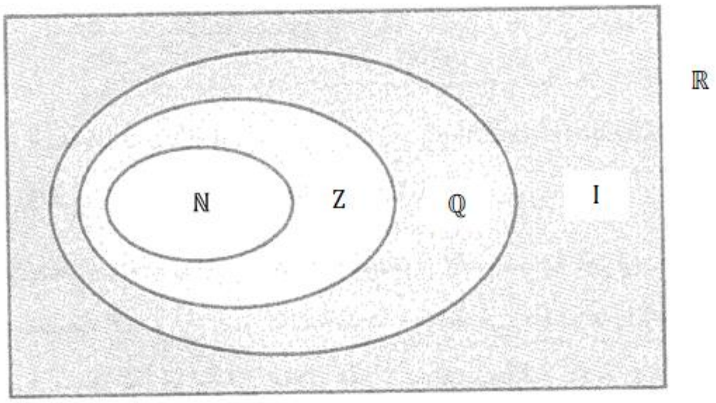
الاعداد الطبيعية Natural Numbers

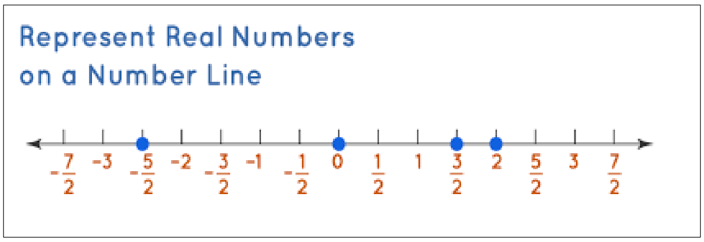
وهي التي تستخدم في العد، وهي أول نظام عددي عرفه الانسان، ويرمز لها عادة بالرمز $\mathbb{N}$ ، أي أن $\mathbb{N} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \dots\}$

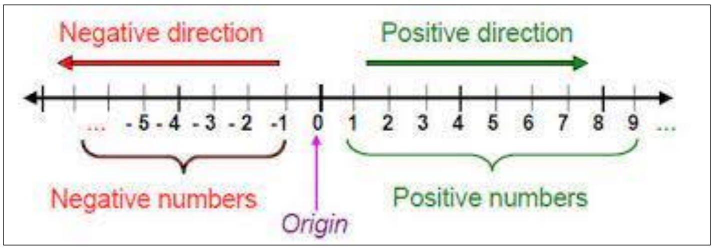
وهي مجموعة غير منتهية.

أمثلة على اعداد غير نسبية	أمثلة على اعداد نسبية
$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{3.14159265}\dots$ $\sqrt{\mathbf{2}} = \mathbf{1.41421356}\dots$ $\sqrt{\mathbf{3}} = \mathbf{1.73205081}\dots$	$\mathbf{0.243}$ $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{7}} = \mathbf{0.285714285714285714}\dots\dots\dots$ $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{11}} = \mathbf{0.272727}\dots\dots\dots$ $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} = \mathbf{0.333}\dots\dots\dots$

واضح أن $\mathbb{I} \cap \mathbb{Q} = \emptyset$ وأن $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$







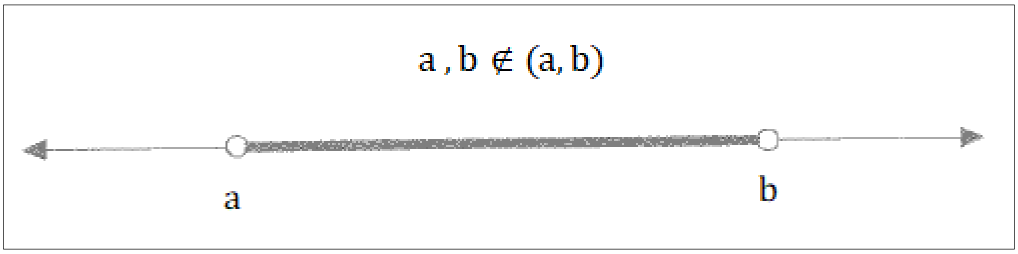
الفترات Intervals

تعرف الفترة بأنها مجموعة كل الاعداد الحقيقية الواقعة على قطعة من خط العدد الحقيقي. وتكون الفترات على أربعة أنواع. أذا كان $a, b \in \mathbb{R}$ وكان $a < b$ ، فأن:

الفترة المفتوحة (open interval) : هي مجموعة كل الاعداد الحقيقية x ، التي تقع بين a و b ، بحيث أن $a \notin (a, b)$ و $b \notin (a, b)$.

$$(a, b) = \{x : x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$$

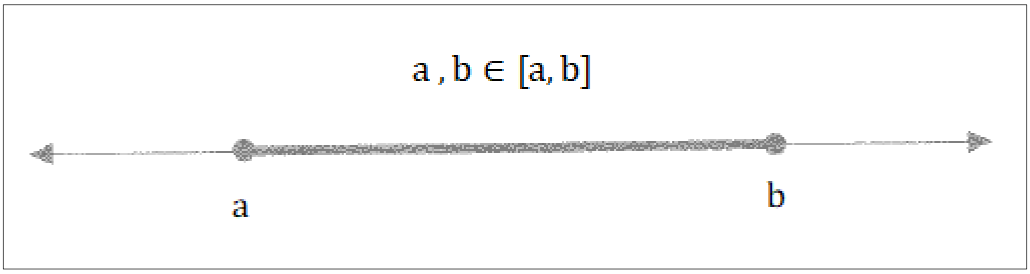
وتمثل على خط الاعداد كالاتي:



الفترة المغلقة (closed interval) : هي جموعة كل الاعداد الحقيقية x ، التي تقع بين a و b ، بما في ذلك a و b .

$$[a,b] = \{x : x \in \mathbb{R}, a \le x \le b\}$$

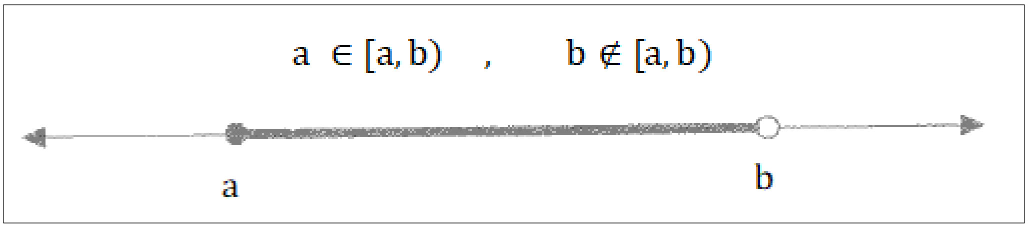
وتمثل على خط الاعداد كالاتي:



الفترة نصف – مفتوحة من اليمين (أو نصف مغلقة من اليسار): هي مجموعة كل الاعداد الحقيقية x ، التي تقع بين a و b ، بما في ذلك العدد a .

$$[a,b) = \{x : x \in \mathbb{R}, a \le x < b\}$$

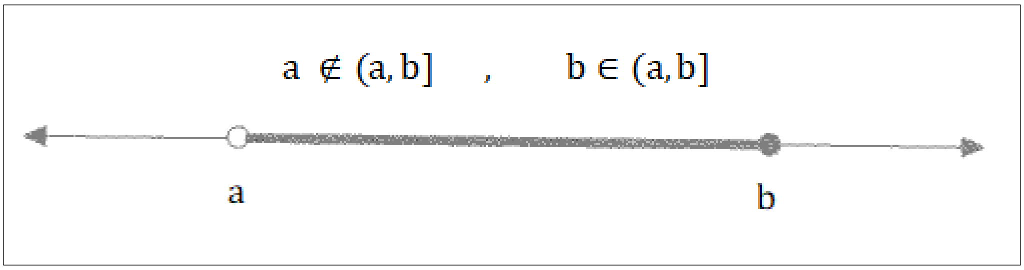
وتمثل على خط الاعداد كالاتي:



الفترة نصف – مفتوحة من اليسار(أو نصف مغلقة من اليمين): هي مجموعة كل الاعداد الحقيقية x ، التي تقع بين a و b ، بما في ذلك العدد b .

$$(a,b] = \{x : x \in \mathbb{R}, a < x \le b\}$$

وتمثل على خط الاعداد كالاتي:



الفترات المعرفة في أعلاه تسمى بالفترات المحدودة.

لتعريف الفترات غير المحدودة نستعمل الرمز ∞ (يقرأ ما لا نهاية) والرمز $-\infty$ (يقرأ ناقص ما لا نهاية) وهما لا يعتبران من الاعداد الحقيقية. ولهذا نستطيع كتابة الاعداد الحقيقية بالشكل:

$$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$$

والان نعرف الفترات التي يكون أحد طرفيها ∞ أو $-\infty$.

ليكن a عدداً حقيقياً

$$(\mathrm{a}, \infty) = \{x : x \in \mathbb{R} , \mathrm{a} < x < \infty\}$$

$$[\mathrm{a}, \infty) = \{x : x \in \mathbb{R} , \mathrm{a} \leq x < \infty\}$$

$$(-\infty, \mathrm{a}) = \{x : x \in \mathbb{R} , -\infty < x < \mathrm{a}\}$$

$$(-\infty, \mathrm{a}] = \{x : x \in \mathbb{R} , -\infty < x \leq \mathrm{a}\}$$

ويمكن توضيح الفترات على خط العدد الحقيقي كما في الشكل الاتي:

Inequality Notation and Interval Notation

Description and Graph	Inequality Notation	Interval Notation
Open Interval (a, b)	a < x < b	(a, b)
Closed Interval (a, b)	a ≤ x ≤ b	[a, b]
Half-Open Interval (a, b)	a ≤ x < b	[a, b)
(a, b)	a < x ≤ b	(a, b]
Open Infinite Interval (a)	x < a	(-∞, a)
(a)	x > a	(a, +∞)
Closed Infinite Interval (a)	x ≤ a	(-∞, a]
(a)	x ≥ a	[a, +∞)

القيمة المطلقة Absolute value

تعرف القيمة المطلقة للعدد الحقيقي x والتي يرمز لها بالرمز $|x|$ كالاتي:

$$|x| = \begin{cases} x\ , & x \geq 0 \\ -x\ , & x < 0 \end{cases}$$

عندما نمثل الأعداد الحقيقية هندسيا على خط الاعداد فإن العدد $|x|$ هو المسافة بين العدد x ونقطة الأصل 0.

مثال: عبر باستعمال تعريف القيمة المطلقة عن كل من $|x-7|$ و $|3-\sqrt{10}|$.

الحل:

$$|x-7| = \begin{cases} x-7\ , & x \geq 7 \\ -x+7\ , & x < 7 \end{cases}$$

$$\left|3-\sqrt{10}\right| = \left|\sqrt{10}-3\right| = \sqrt{10}-3\ .$$

بعض خواص القيمة المطلقة

1) $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) $|x| = \sqrt{x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3) $|-x| = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$

4) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

5) $-|x| \leq x \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$

6) $|x|^2 = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

7) $|x \cdot \mathrm{y}| = |x| \cdot |\mathrm{y}| \qquad \forall\, x, \mathrm{y} \in \mathbb{R}$

8) $\left|\frac{x}{\mathrm{y}}\right| = \frac{|x|}{|\mathrm{y}|} \qquad \forall\, x, \mathrm{y} \in \mathbb{R}\,,\ \mathrm{y} \neq 0$

9) $|x+\mathrm{y}| \leq |x| + |\mathrm{y}| \qquad \forall\, x, \mathrm{y} \in \mathbb{R}$

10) $|x-\mathrm{y}| \geq |x| - |\mathrm{y}| \qquad \forall\, x, \mathrm{y} \in \mathbb{R}$

11) $|x| \leq \mathrm{a} \Rightarrow -\mathrm{a} \leq x \leq \mathrm{a} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{a} > 0$

12) $|x| \geq \mathrm{a} \Rightarrow x \geq \mathrm{a}$ or $x \leq -\mathrm{a} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{a} > 0$

تعريف:

اذا كانت A و B مجموعتين غير خاليتين، وكان $a \in A$, $b \in B$ ، فأن الزوج المرتب (a, b) هو مفهوم رياضي يتكون من العنصرين a و b المقترنين بالترتيب a ثم b ، يطلق على a الاحداثي الأول (أو المسقط الأول)، وعلى b الأحداثي الثاني (أو المسقط الثاني) للزوج المرتب (a, b) .

أن التعريف الرياضي الدقيق للزوج المرتب يكون بشكل مجموعة مكونة من عنصرين، أي

$$(a, b) = \{\, a, \{a, b\}\,\}$$

وبموجب هذا التعريف، يكون

$$(b, a) = \{\, b, \{a, b\}\,\}$$

واضح أن هاتين المجموعتين مختلفتان، الا في حالة كون $a = b$. وبذلك، عندما يكون $a \neq b$ ، فأن $(a, b) \neq (b, a)$.

تعريف (الضرب الديكارتي):

لتكن A و B مجموعتين فأن حاصل الضرب الديكارتي للمجموعة A في المجموعة B هو مجموعة جميع الأزواج المرتبة التي مسقطها الأول من المجموعة A ومسقطها الثاني من المجموعة B ، ويرمز لحاصل الضرب الديكارتي A في B بالرمز $A \times B$. ويكتب هذا التعريف بالرموز كالاتي:

$$A \times B = \{ (a, b): a \in A, b \in B \}$$

مثال: لتكن $B = \{3, 5\},\ A = \{a, b, c\}$ فأن

$$A \times B = \{ (a, 3), (a, 5), (b, 3), (b, 5), (c, 3), (c, 5) \}$$
$$B \times A = \{ (3, a), (5, a), (3, b), (5, b), (3, c), (5, c) \}$$

ملاحظة:

أ- بصورة عامة، كما هو واضح في المثال السابق، أن $A \times B \neq B \times A$

ب- المساواة تحصل عندما $A = B$ ، أي أن: $A \times B = B \times A$ اذا وفقط اذا $A = B$

ج- أذا كانت A مجموعة ما، فأن $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$.

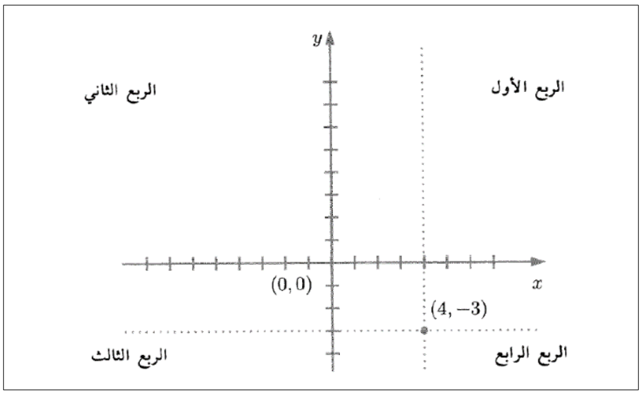
ويمكن تعميم فكرة حاصل الضرب الديكارتي لتشمل أي عدد منته من المجموعات، كالاتي:

$$A \times B \times C = \{ (a, b, c): a \in A, b \in B, c \in C \}$$

نظام الاحداثيات في بعدين (الاحداثيات المتعامدة او الديكارتية)

The Rectangular two Dimensions Coordinate system

يتكون نظام الإحداثيات في بعدين من تقاطع خطي أعداد متعامدين عند نقطة الأصل $(0, 0)$، ويسمى محور الإحداثيات الأفقي بالمحور x ($x - \text{axis}$)، والمحور العمودي (او المحور الرأسي) بالمحور y (y –axis). كل نقطة A في هذا المستوي يمثلها زوج مرتب (x, y)، حيث يسمى x الاحداثي السيني أو الاحداثي الأول ($x - \text{coordinates}$)، ويسمى y الاحداثي الصادي أو الاحداثي الثاني ($y - \text{coordinates}$) للنقطة A . ينقسم المستوي الديكارتي الى أربعة أجزاء، ويسمى كل جزء منها بالربع. الربع الأول يتكون من الأزواج المرتبة التي تكون أحداثياتها موجبة، ويتكون الربع الثاني من الأزواج المرتبة التي يكون أحداثيها الأول سالباً، وأحداثيها الثاني موجباً، بينما يتكون الربع الثالث من الأزواج المرتبة التي تكون أحداثياتها سالبة، ويتكون الربع الرابع من الأزواج المرتبة التي يكون أحداثيها الأول موجباً، وأحداثيها الثاني سالباً. ويسمى هذا المستوى أحيانا بالمستوي الديكارتي (أو الكارتيزي) نسبة إلى الرياضي الفرنسي ديكارت (1596-1650)، حيث كان أول من استخدم نظام الإحداثيات في بعدين. يرمز للمستوي الديكارتي في بعدين بالرمز $\mathbb{R}^2$.



تعريف:

تسمى مجموعة كل الأزواج المرتبة من الاعداد الحقيقية بالمستوي الديكارتي، ويرمز له بالرمز $\mathbb{R}^2$ ،

$\mathbb{R}^2 = \{ (x, \mathrm{y}): x \in \mathbb{R}, \mathrm{y} \in \mathbb{R} \}$

ويمكن تمثيل أي دالة رياضية بمتغير واحد في هذه الاحداثيات.

المسافة بين نقطتين في المستوي الديكارتي Distance between two points

لتكن $\mathrm{A}(x_1, \mathrm{y}_1)$ و $\mathrm{B}(x_2, \mathrm{y}_2)$ نقطتين في المستوي، فان المسافة (البعد) بينهما تحسب حسب الصيغة الاتية:

$$\mathrm{d} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (\mathrm{y}_2 - \mathrm{y}_1)^2}$$

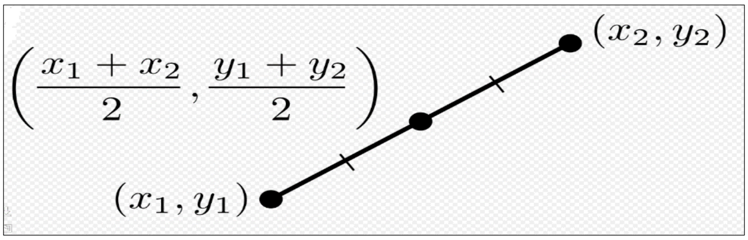
Example: Find the distance between the points (–2, –3) and (–4, 4).

Solution:

$$\mathrm{d} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (\mathrm{y}_2 - \mathrm{y}_1)^2} = \sqrt{\left(-4 - (-2)\right)^2 + \left(4 - (-3)\right)^2} = \sqrt{53}$$

أحداثيات نقطة المنتصف

في الهندسة الرياضية، نقطة المنتصف midpoint هي النقطة التي تقع في وسط القطعة المستقيمة، وتكون متساوية البعد عن نقطتي نهاية القطعة المستقيمة.



أي أن أحداثيات النقطة الواقعة في منتصف المسافة بين النقطتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2) تعطى بالصيغة الاتية:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{\mathrm{y}_1 + \mathrm{y}_2}{2}\right)$$

مثال: اذا كانت C منتصف $\overline{\mathrm{AB}}$ حيث $\mathrm{A}(-1, 5)$ ، $\mathrm{B}(5, -3)$. فأن أحداثيات النقطة C هي:

$$\mathrm{C} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{\mathrm{y}_1 + \mathrm{y}_2}{2}\right) = \left(\frac{-1 + 5}{2}, \frac{5 - 3}{2}\right) = (2, 1)$$

معادلة الدائرة Equation of the circle

معادلة الدائرة التي مركزها (h, k) ونصف قطرها r هي:

$$(x - \mathrm{h})^2 + (y - \mathrm{k})^2 = \mathrm{r}^2$$

أذا كان مركز الدائرة نقطة الأصل، يعني $(\mathrm{h}, \mathrm{k}) = (0, 0)$ ، فالمعادلة تأخذ الشكل:

$$x^2 + \mathrm{y}^2 = \mathrm{r}^2.$$

الدوال الحقيقية Real functions

تعريف

لتكن $A, B \subseteq \mathbb{R}$ مجموعتين غيرخالتين ولتكن f علاقة من المجموعة A الى المجموعة B . يقال أن f دالة (أو تطبيق) من A الى B ، أذا أقترن (أرتبط) مع كل عنصر في A عنصر وحيد في B ، ويعبر عن ذلك بالرموز كالاتي:

$$A \xrightarrow{f} B \qquad \text{أو} \qquad f: A \to B$$

$\forall\, x \in A, \exists\, y \in B \;\; s.t \;\; y = f(x)$

تعريف:

لتكن $f: A \to B$ ، فأن بيان الدالة f هو بيان العلاقة f ، أي المجموعة

$$G_f = \{(a, f(a)) : a \in A\}$$

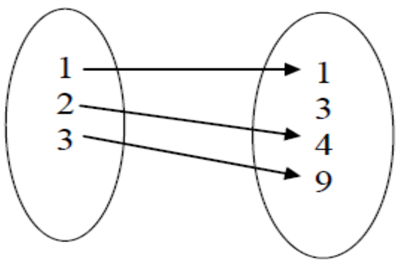
أذا كانت f دالة من A الى B وكان $(a, b) \in G_f$ ، فأننا نكتب $b = f(a)$. يطلق على $f(a)$ صورة العنصر a تحت تأثير f ، كما يقال أيضاً أن $f(a)$ قيمة الدالة f في a .

تعريف: لتكن $f: A \to B$ دالة. تسمى المجموعة A مجال الدالة (أو منطلق الدالة) وتسمى المجموعة B المجال المقابل (أو المستقر). والمجموعة الجزئية من B التي تتألف من جميع صور عناصر A بالدالة f تسمى مدى الدالة، أي أن المدى هو مجموعة القيم الفعلية للدالة f.

أذاً، فالدالة هي علاقة يرتبط كل عنصر في مجالها بعنصر واحد فقط في مداها.

المصطلح بالعربي	المصطلح بالانكليزي	الرمز الرياضي
المجال أو المنطلق	domain	D_f
المجال المقابل أو المستقر	codomain	Cod_f
المدى	range	R_f

مثال: اذا كانت $A = \{1, 2, 3\}$ ، $B = \{1, 3, 4, 9\}$ فأن العلاقة $f = \{(1,1), (2,4), (3,9)\}$ المتمثلة بالمخطط السهمي الاتي تمثل الدالة $f: A \longrightarrow B$ المعرفة بالقاعدة $f(x) = x^2 \;\; \forall\, x \in A$



واضح أن مجال الدالة هو المجموعة $D_f = \{1, 2, 3\}$ ومدى هذه الدالة هو $R_f = \{1, 4, 9\}$.