النموذج الســابع

نظام الانتظار $(M/M/\infty):(GD/\infty/\infty)$

يُلاحظ في هذا النظام أن عدد قنوات الخدمة وعدد الوحدات التي يستوعبها النظام غير محدود (لانهائي) (∞) ومن الأمثلة على هذا النوع هو الامتحان التحريري لطلبة مرحلة معينة أو بوفي طعام مفتوح في حفلة معينة وغيرها من الأمثلة ولغرض تحديد احتمالات الحالة الثابتة فإنه يمكن الاعتماد على النموذج العام للانتظار بمراكز أداء خدمة واحد $(M/M/1)$ حيث يتم التعويض في المعادلة التالية التي تمثل حالة الثبات لهذا النظام أو الاستقرار المتمثلة بالشكل الآتــي:

$$P_n = \frac{\lambda_\circ \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{n-1}}{M_1 M_2 M_3 \cdots M_n} P_\circ$$

يُلاحظ أن معدل الوصول في نظام (اخدم نفسك بنفسك) هو $(\lambda_n = \lambda)$ وأن معدل الخدمة هو $(M_n = nM \,, n \geq 0)$ حيث أن (M_n) تمثل النسبة الموحدة للوحدات المغادرة (كون عند الوحدات المغادرة أقل من مراكز الخدمة) وعليه سيكون شكل التوزيع الاحتمالي لــ (P_n) هو:

$$P_n = \frac{\lambda^n}{n!\, M^n} P_\circ \Rightarrow \frac{\rho^n}{n!} P_\circ$$

$$\because \sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \Rightarrow \therefore \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} P_\circ = 1$$

$$P_\circ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} = 1$$

$$P_\circ e^{\rho} = 1 \Rightarrow P_\circ = e^{-\rho}$$

وعليه فإن:

$$P_n = \begin{cases} \frac{\rho^n}{n!} e^{-\rho} & , n = 1, 2, 3 \cdots\cdots \infty \\ 0 & O.W \end{cases} \qquad \therefore P_n \sim P_{oss}(\rho)$$

بعض مؤشرات نظام $(M/M/\infty):(GD/\infty/\infty)$

1- عدد الوحدات المتوقعة في النظام (Ls):

$$Ls = E(n) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, P_n = \rho$$

Proof:

$$Ls = E(n) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, P_n = \rho$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{\rho^n}{n!} e^{-\rho}$$

$$= e^{-\rho} \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{\rho^n}{n!}$$

$$= \rho\, e^{-\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!}$$ متوالية هندسية غير منتهية

$$= \rho\, \cancel{e^{-\rho}} * \cancel{e^{\rho}}$$

$$= \rho\, e^{\circ} = \rho$$

2- عدد الوحدات المتوقعة في الصف (Lq):

$$Lq = Ls - \rho \Rightarrow \rho - \rho = 0$$

3- وقت الانتظار المتوقع في الصف (Wq):

$$Wq = \frac{Lq}{\lambda} = 0 \quad Where\ Lq = 0$$

4- وقت الانتظار المتوقع في النظام (Ws):

$$Ws = Wq + \frac{1}{M} \quad Where\ Wq = 0$$

مثال: في محطة من نوع اخدم نفسك بنفسك يصل الزبائن تبعاً لتوزيع بواسون بمعدل (48) زبون في الساعة وأن زمن خدمة الزبون يتبع التوزيع الأُسي بمعدل (5) دقائق لكل زبون. جد ما يلي:

1- احتمال أن تكون المحطة خالية.

2- احتمال وجود زبون واحد أو ثلاثة زبائن في المحطة.

3- عدد الزبائن المتوقعة في المحطة.

4- زمن الانتظار لكل زبون في المحطة.

$\lambda = 48$ زبون/ساعة , $M = \frac{1}{5} * 60 = 12$ زبون/ساعة

$$\rho = \frac{\lambda}{M} \Rightarrow \frac{48}{12} = 4$$

1) $P_{\circ} = e^{-\rho} \Rightarrow e^{-4} = 0.02$

2) $P_n = \frac{\rho^n}{n!} e^{-\rho}$

$$P_1 = \frac{4^1}{1!} e^{-4} \Rightarrow \frac{4}{1}(0.02) = 0.08$$

$$P_3 = \frac{4^3}{3!} e^{-4} \Rightarrow \frac{64}{6}(0.02) \simeq 0.2$$

3) $Ls = \rho = 4$

4) $Ws = Wq + \frac{1}{M} \Rightarrow 0 + \frac{1}{12} = 0.08 \text{ or } Ws = \frac{Ls}{\lambda} \Rightarrow \frac{4}{48} = 0.08$