$\rightarrow a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - s_1 = b_1$

مثال (1.7): حول إنموذج الآتي إلى الشكل القياسي:

$\max Z = 7x_1 + 3x_2$

$S.t$

$2x_1 + 5x_2 \leq 4$

$x_1 - 2x_2 \geq 10$

$3x_1 + x_2 \leq 2$

$x_1, x_2 \geq 0$

sol:

$\max Z = 7x_1 + 3x_2$

$S.T$

$2x_1 + 5x_2 + s_1 = 4$

$x_1 - 2x_2 - s_2 + R_1 = 10$

$3x_1 + x_2 + s_3 = 2$

$x_1 , x_2 , s_1 , s_2 , s_3 , R_1 \geq 0$

وسيتم توضيـــــــــح الصيغة القياسية لاحقاً بشـــــكل مُفصل في طريقة السمبلكس

أمثلة تطبيقية حول صياغة النموذج الرياضي لمشاكل البرمجة الخطية:

الامثلة التالية توضح كيفة التعامل مع مشاكل مختلفة وتحويلها من صيغتها الانشائية الى صيغة النموذج الرياضي لغرض حلها باسلوب البرمجة الخطية .

مثال (1): (مشكلة تخطيط الانتاج)

شركة انتاجية تنتج ثلاثة انواع من المنتجات ، عملية التصنيع لهذه المنتجات تتطلب مرورها بثلاثة مكائن انتاجية (M3 , M2 , M1)، الطاقة التشغيل اليومية لكل من هذه المكائن مقاسة بالدقيقة لكل يوم عمل هي (440 ، 470 ، 430) على التتابع ، المنتج الاول يستغرق انتاج الوحدة الواحدة منه في المكائن الثلاثة (2 ، 3 ، 2) دقيقة على التتابع ، والمنتج الثاني يستغرق انتاج الوحدة الواحدة منه في المكائن الثلاثة (4 ، 0 ، 3) دقيقة على التتابع، اما النتج الثالث فيستغرق انتاج الوحدة الواحدة منه في المكائن الثلاثة (2 ، 5 ، 0) دقيقة على التتابع، ربح الوحدة الواحدة من المنتجات الثلاثة (4 ، 3 ، 6) دينار على التتابع .

المطلوب هو صياغة النموذج الرياضي الذي يمثل مشكلة تخطيط الانتاج المبين تفاصيلها اعلاه.

المطلوب من حل المشكلة هذه هي اتخاذ القرار بشأن تحديد الكميات المثلى المفروض انتاجها من المنتجات الثلاثة (أي تحديد البرنامج الانتاجي الامثل) .

صياغة النموذج الرياضي:

لغرض تسهيل عمل صياغة النموذج الرياضي سوف نعمل على تلخيص المعلومات الخاصة بالمشكلة في جدول خاص وكما مبين ادناه:

الماكنة	الوقت المستغرق لكل وحدة واحدة من كل منتوج			الطاقة التشغيلية
	المنتوج 1	المنتوج 2	المنتوج 3	(دقيقة / يوم)
M1	2	3	2	440
M2	4	0	3	470
M3	2	5	0	430

الخطوة الاولى : تعريف متغيرات القرار في النموذج وهي :

نفرض ان عدد المنتجة من المنتوج الاول يساوي X1 .

نفرض ان عدد المنتجة من المنتوج الاول يساوي X2 .

نفرض ان عدد المنتجة من المنتوج الاول يساوي X3 .

الخطوة الثانية : تحديد الهدف من حل المشكلة وصياغته بهيئة معادلة رياضية:

من المعلومات الخاصة بالمشلكة فان الشركة تسعى الى تحقيق اكبر ربح ممكن من انتاج المنتجات الثلاثة ، لذا فأن الهدف يتعلق بالربح الاجمالي وان صيغة دالة الهدف تأخذ صيغة التعظيم وان الربح الكلي نحصل عليه من حاصل جمع الربح المستحصل من انتاج المنتوج الاول (4X1) ومن انتاج المنتوج الثاني (3X2) ومن انتاج المنتوج الثالث (6X3) ، وبهذا فأن دالة الهدف تكون كالاتي:

$$Max.\ Z = 4X1 + 3X2 + 6X3$$

الخطوة الثالثة: صياغة قيود النموذج :

القيود تتعلق بالموارد المحدودة والمتاحة وهذه الموارد في مشكلتنا هذه تتمثل بالطاقة التشغيلية للمكائن الثلاثة و هنا يجب الاشارة الى انه (يجب استغلال هذه الموارد بما لا يتجاوز الكمية المتاحة منها وليس هناك شرطا للاستغلالها بالكامل) وهذه هي احد فرضيات بحوث العمليات، وفي مشكلة الانتاج الواردة في مثالنا يجب ان لايتعدى الانتاج من كل منتوج الطاقة التشغيلية لكل ماكنة ولا يشترط استغلالها بالكامل . لذا فأن القيود يتم تمثيلها بهيئة متباينات .

القيد الاول يتعلق بالطاقة التشغيلية للماكنة الاولى ويصاغ بالشكل التالي:

$$2X1 + 3X2 + 2X3 \leq 440$$

القيد الثاني يتعلق بالطاقة التشغيلية للماكنة الثاني ويصاغ بالشكل التالي:

$$4X1 + 3X3 \leq 470$$

القيد الثالث يتعلق بالطاقة التشغيلية للماكنة الثالثة ويصاغ بالشكل التالي:

$$2X1 + 5X2 \leq 430$$

ولكي نضمن ان تكون كمية المنتج من المنتجات الثلاثة ذات قيما موجبة يجب اضافة قيد اخير والذي يمثل قيد عدم السلبية وكالاتي

$$X1 , X2 , X3 \geq 0$$

قيود النموذج مجتمعة تكون كالاتي:

$$2X1 + 3X2 + 2X3 \leq 440$$

$$4X1 + 3X3 \leq 470$$

$$2X1 + 5X2 \leq 430$$

$$X1 , X2 , X3 \geq 0$$

مجموعة المتباينات اعلاه والممثلة لقيود النموذج يمكن حلها وحلها يزودنا بعدد من الحلول البديلة الممكنة والتي تحقق جميع تلك المتباينات علما ان كل حل يمثل خطة لانتاج المنتوجات الثلاثة وان كل خطة (او حل) تسمى برنامج محدد للانتاج ، وللمفاضلة بين تلك البرامج او الخطط الانتاجية نعتمد على دالة الهدف فالحل الممكن او البرنامج الذي يحقق اعظم قيمة لدالة الهدف (بعد تعويض قيم المتغيرات الممثلة لكل حل في دالة الهدف) يعتبر هو الحل او البرنامج الانتاجي الامثل والذي يعتبر القرار الامثل لمشكلة الانتاج. مما تقدم فان النموذج الرياضي الكامل الممثل للمشكلة يكون كالاتي :

$$Max. Z = 4X1 + 3X2 + 6X3$$

S.T.

$$2X1 + 3X2 + 2X3 \leq 440$$

$$4X1 + 3X3 \leq 470$$

$$2X1 + 5X2 \leq 430$$

$$X1 , X2 \geq 0$$

نلاحظ ان القيود للنموذج اعلاه بهيئة متباينات اقل او تساوي وذلك حسب طبيعة المشكلة ولكن ليس شرطا ان تكون بهذه الهيئة فقد يكون احد القيود بهيئة متباينة بشكل اكبر او يساوي ويعود ذلك لطبيعة المحددات المفروضة على المشكلة، مثلا لو كان هناك قيد اخر يخص المشكلة اعلاه وهو ان المتعاقد على شراء المنتوجات الثلاثة يشترط ان لا تقل كمية المنتج من المنتوج الثاني عن 10 وحدات يوميا عندها سوف يضاف القيد التالي للنموذج :

$$X2 \geq 10$$

ليصبح النموذج الرياضي بالشكل التالي :

$$\text{Max. } Z = 4X1 + 3X2 + 6X3$$

$$\text{S.T.}$$

$$2X1 + 3X2 + 2X3 \leq 440$$

$$4X1 + 3X3 \leq 470$$

$$2X1 + 5X2 \leq 430$$

$$X2 \geq 10$$

$$X1 , X2 , X3 \geq 0$$

لذا فان شكل المتباينات الممثلة للقيود (اكبر او يساوي ، اقل او يساوي) يتحدد حسب طبيعة المحددات المفروضة على المشكلة.

مثال (2): (مشكلة تلبية الاحتياجات من الموارد المتاحة المحدودة)

مصنع ينتج نوع معين من السبائك والتي لها المواصفات اللاتية:

1- الثقل النوعي لا يتجاوز 1.9 .

2- نسبة الكروم لا يقل عن 8% .

3- درجة حرارة الانصهار لا تقل عن 450 O C .

ثلاثة مواد اولية لها المواصفات التالية يمكن استعمالها في تصنيع هذه السبيكة بحث مجموع النسب المستعملة من هذه المواد الاولية يساوي 103:

المادة الاولية A مواصفاتها:الثقل النوعي 0.92 ، نسبة الكروم 9% ، درجة حرارة الاذابة 540

المادة الاولية B مواصفاتها:الثقل النوعي 0.97 ،نسبة الكروم 13% ،درجة حرارة الاذابة 490

المادة الاولية C مواصفاتها:الثقل النوعي 1.04 ،نسبة الكروم 16% ،درجة حرارة الاذابة 480

كلفة الطن الواحد من المواد الاولية الثلاثة هي (90 ، 280 ، 40) الف دينار على التتابع.

المطلوب من حل المشكلة هذه هي اتخاذ القرار بشأن تحديد النسب المستعملة من المواد الاولية الثلاثة لتصنيع السبيكة بالمواصفات المطلوبة. ولغرض اتخاذ هذا القرار يجب تحويل المشكلة من صيغتها الانشائية الى نموذج رياضي لغرض ايجاد الحل الامثل باتباع اسلوب البرمجة الخطية. لتسهيل عملية صياغة النموذج الرياضي نلخص المعلومات في الجدول التالي:

المواصفات	مواصفات المواد الاولية			مواصفات السبيكة المطلوبة
	A	B	C	
الثقل النوعي	0.92	0.97	1.04	1.9
نسبة الكروم	%9	%13	%16	%8
درجةحرارة الانصهار	540 O C	490 O C	480 O C	450 O C

صياغة النموذج الرياضي:

تعريف متغيرات القرار : لنفرض ان

X1 يمثل نسبة المستعمل من المادة الاولية A .

X2 يمثل نسبة المستعمل من المادة الاولية B .

X3 يمثل نسبة المستعمل من المادة الاولية C .

الهدف هو تصغير كلفة تصنيع السبيكة لذا فأن صيغة دالة الهدف تأخذ صيغة التصغير لانها تمثل الكلفة الكلية لتصنيع السبيكة:

$$Min.\ Z = 90\ X1 + 280\ X2 + 40\ X3$$

قيود النموذج هي :

الاول يتعلق بتلبية الثقل النوعي بما لا يتجاوز 1.9 اي القيد يكون كالاتي:

$$0.92\ X1 + 0.97\ X2 + 1.04\ X3 \leq 1.9$$

الثاني يتعلق بتلبية نسبة الكروم في السبيكة بما لا تقل عن 8% أي القيد يكون كألاتي:

$$9\ X1 + 13\ X2 + 16\ X3 \geq 8$$

الثالث يتعلق بتلبية درجة حرارة انصار السبيكة بحيث لا تقل عن 450 O C أي القيد يكون كألاتي:

$$540\ X1 + 490\ X2 + 480\ X3 \geq 450$$

الرابع يتعلق بوزن السبيكه ويكون كالاتي:

$$X1 + X2 + X3 = 103$$

والقيد الاخير يمثل قيد اللاسلبي أي : $X1\ ,\ X2\ ,\ X3 \geq 0$

وبهذا فأن النموذج الرياضي بصيغته الكاملة يكون كالاتي :

$$Min.\ Z = 90\ X1 + 280\ X2 + 40\ X3$$

S.T.

$$0.92\ X1 + 0.97\ X2 + 1.04\ X3 \leq 1.9$$

$$9\ X1 + 13\ X2 + 16\ X3 \geq 8$$

$$540\ X1 + 490\ X2 + 480\ X3 \geq 450$$

$$X1 + X2 + X3 = 103$$

$$X1 \ , \ X2 \ , \ X3 \geq 0$$

مثال (3) : (مشلكة خلط السوائل)

شركة نفطية تنتج نوعين من البنزين ، (بنزين من الدرجة P) و (بنزين من الدرجة Q) والتي تبيع اللتر الواحد من النوعين بسعر (3 ، 4) دينار على التتابع ، مصنع التكرير يمكنه شراء اربعة انواع مختلفة من الخامات كل منها يتضمن المكونات المبينة في الجدول التالي مع كلفة اللتر الواحد من تلك الخامات :

الخامات	المكونات التي تتضمنها الخامات			كلفة اللتر الواحد من الخامات
	A	B	C	
1	0.75	0.15	0.10	2
2	0.20	0.30	0.50	2.25
3	0.70	0.10	0.20	2.50
4	0.40	0.60	0.50	2.75

البنزين من الدرجة P يدخل في تصنيعه المكونين (A و C) اذ يتطلب تصنيعه على الاقل 55% من المكون A ومالا يزيد عن 40% من المكون C . البنزين من الدرجة Q يدخل في تصنيعه المكون (C) فقط و يتطلب تصنيعه مالا يزيد عن 25% من المكون C .

حدد الكمية اللازم استخدامها من الخامات لتصنيع النوعين من البنزين لنحقق اكبر ربح ممكن.

صياغة النموذج الرياضي:

القرار اللازم اتخاذه هو كمية المستخدم من الخامات لتصنيع النوعين من البنزين بما يحقق اكبر ربح ممكن .

تعريف متغيرات القرار :

متغيرا القرار هي Xij ، i تمثل الخامات (i = 1,2,3,4) ، j تمثل نوع ال بنزين (j = 1,2,3)