<u>الفصل الخامس</u>

الاشتقاق العددي والتكامل العددي

Numerical Differentiation and Numerical Integration

في الفصل الرابع تحدثنا عن ايجاد قيمة الدالة f عند نقطة معينة ويجب مراعاة اذا كانت قيم x متساوية الابعاد او مختلفة الابعاد. فاذا كانت متساوية الابعاد تحل بطريقة نيوتن التقدمية والتراجعية والمركزية وحسب موقع النقطة x^* . اما في هذا الفصل فالمطلوب ايجاد المشتقة عند النقطة x^* اي $f(x^*)$ فنحتاج معرفة صيغة الدالة اولا وبعدها مشتقة الدالة ومن ثم نعوض قيمة x^*.

- ❖ **<u>الاشتقاق العددي</u>:-**

1. الاشتقاق العددي عندما تكون البيانات غير متساوية الابعاد:-

- طريقة لاكرانج Lagrang method

$$P_n((x)) = \sum_{j=0}^{n} \left\{ \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right\} f(x_j)$$

<u>مثال</u>:- من خلال جدول البيانات التالية جد قيمة الدالة $f'(4)$باستخدام طريقة لاكرانج

x	0	0.5	1
y	e^0	$e^{0.5}$	e^1

<u>الحل</u>:-

$$L_0(x) = \frac{(x-0.5)(x-1)}{(0-0.5)(0-1)} = (2x-1)(x-1)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(0.5-0)(0.5-1)} = 4x(1-x)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-0.5)}{(1-0)(1-0.5)} = x(2x-1)$$

$$\begin{aligned} P_2(x) &= (2x-1)(x-1)e^0 + 4x(1-x)e^{0.5} + x(2x-1)e^1 \\ &= 2x^2 - 3x + 1 + 4xe^{0.5} - 4x^2e^{0.5} + 2x^2e^1 - xe^1 \\ &= 2x^2(1 - 2e^{0.5} + e^1) + x(4e^{0.5} - 3 - e^1) + 1 \\ &= 1 + 3.08981x + 0.62741x^2 \end{aligned}$$

$$P_2(x') = 3.08981 + 1.25482x$$

2. الاشتقاق العددي عندما تكون البيانات متساوية الابعاد:-

- طريقة نيوتن التقدمية:

$$y_m = y_0 + m\Delta y_0 + \frac{m(m-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \cdots$$

$$x_m = x_0 + mh, \;\; x_t = x_0 + th \Rightarrow \frac{dx}{dt} = h$$

$$y_t = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \cdots$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} \Rightarrow \frac{1}{h}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{h}[\Delta y_0 + \left(t - \frac{1}{2}\right)\Delta^2 y_0 + (\frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{3})\Delta^3 y_0 + \cdots$$

$$t = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{h}[\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 + \cdots$$

وهي صيغة نيوتن التقدمية للاشتقاق العددي.

❖ **<u>التكامل العددي</u>:-**

1. التكامل العددي للعقد غير متساوية الابعاد:-

- طريقة لاكرانج:

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} L_j(x) f(x_j)$$

$$= L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) + \cdots + L_n(x)f(x_n)$$

$$I(f) = \int_a^b P_n(x)$$

$$= f(x_0)\int_a^b L_0(x)dx + f(x_1)\int_a^b L_1(x)dx + f(x_2)\int_a^b L_2(x)dx + \cdots + f(x_n)\int_a^b L_n(x)dx$$

2. التكامل العددي للعقد متساوية الابعاد:-

- طريقة نيوتن التقدمية:

$$x_t = x_0 + th$$
$$dx = dt$$

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = h\int_0^n f(x_t)dt$$

$$x_n = b, x_0 = a, h = \frac{b-a}{n}$$

- طريقة شبه المنحرف *Trapezium method*:

تتظمن هذه الطريقة اخذ نقطتين وهي $[x_0, x_1]$ اي ان $\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$ (الفترة $[0,1]$ بالنسبة للمتغير t)

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = h\int_{x_0}^{x_1}\left(f(x_0) + t\Delta f(x_0) + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f(x_0) + \cdots\right)$$

$$= h\left[tf(x_0) + \frac{t^2}{2}\Delta f(x_0) + \left(\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{4}\right)\Delta^2 f(x_0) + \cdots\right]_0^1$$

$$= h\left[f(x_0) + \frac{1}{2}\Delta f(x_0) - \frac{1}{12}\Delta^2 f(x_0) - \frac{1}{24}\Delta^3 f(x_0) + \cdots\right]$$

$$I_1(f) = h\left[f(x_0) + \frac{1}{2}\Delta f(x_0)\right]$$

$$= h\left[f(x_0) + \frac{1}{2}(f(x_0 + h) + f(x_0))\right]$$

$$= \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)], [x_0, x_1]$$ وهي صيغة شبه المنحرف للتكامل العددي

$$I_2(f) = \frac{h}{2}[f_1 + f_2], [x_1, x_2]$$

$$I_3(f) = \frac{h}{2}[f_2 + f_3], [x_2, x_3]$$

$$I_n(f) = \frac{h}{2}[f_{n-1} + f_n], [x_{n-1}, x_n]$$

$$I(f) = I_1(f) + I_2(f) + \cdots + I_n(f)$$

$$\therefore I(f) = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]$$

وهي صيغة شبه المنحرف المركبة.

- طريقة سمبسون *Simpson method*:

تستخدم هذه الطريقة صيغة نيوتن-التقدمية في الفترة $[x_0, x_2]$ (اي في الفترة $[0, 2]$ بالنسبة للمتغير t) وتسمى هذه الطريقة بالطريقة ذات الثلاث نقاط.

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = h\int_0^2 f(x_t)dt$$

$$= h\int_0^2 \left[f_0 + t\Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \cdots\right] dt$$

$$= h\left[tf_0 + \frac{t^2}{2}\Delta f_0 + \left(\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{4}\right)\Delta^2 f_0 + \left(\frac{t^4}{24} - \frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{6}\right)\Delta^3 f_0 + \cdots\right]_0^2$$

$$= h\left[2f_0 + 2\Delta f_0 + \frac{1}{3}\Delta^2 f_0 + 0\Delta^3 f_0 + \frac{1}{90}\Delta^4 f_0 + \cdots\right]$$

$$\therefore\ I(f) = \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + f_2]$$

وهي صيغة سمبسون للتكامل العددي.

$$I_1(f) = \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + f_2],\ \ [x_0, x_2]$$

$$I_2(f) = \frac{h}{3}[f_2 + 4f_3 + f_4],\ \ [x_2, x_4]$$

$$I_3(f) = \frac{h}{3}[f_4 + 4f_5 + f_6],\ \ [x_4, x_6]$$

$$\therefore\ I_n(f) = \frac{h}{3}[f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n],\ \ [x_{n-2}, x_n]$$

وبشكل عام فان