**مثال:** لتكن $A = \{4, 5, 6\}$ , $B = \{6, 8, 10, 12\}$ . ولتكن $f: A \to B$ دالة معرفة كالاتي:

$$f(x) = 2x - 2 \qquad \forall x \in A$$

أ) أكتب صورة كل عنصر، ثم أكتب مدى الدالة.

ب) أكتب الدالة كأزواج مرتبة، ثم أرسم المخطط البياني لهذه الدالة.

**الحـل:**

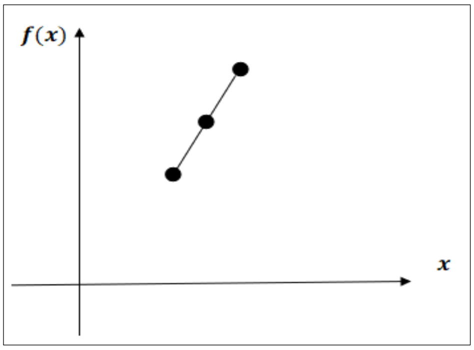
أ)

$$f(x) = 2x - 2$$
$$f(4) = 2\,(4) - 2 = 8 - 2 = 6$$
$$f(5) = 2\,(5) - 2 = 10 - 2 = 8$$
$$f(6) = 2\,(6) - 2 = 12 - 2 = 10$$

وأن مدى الدالة $f$ : $R_f = \{6, 8, 10\}$

ب) كتابة الدالة كازواج مرتبة يعني أيجاد بيان الدالة

$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in A\} = \{(4,6), (5,8), (6,10)\}.$$




**مثال:** لتكن $A = \{a, b, c, d\}$ , $B = \{-1, 0, 2, 3, 5, 7, 12\}$ . ولتكن

$$f = \{(a, 0), (b, 3), (c, 12), (d, 12)\},$$
$$S = \{(a, -1), (a, 0), (b, 3), (c, 7), (d, 12)\},$$
$$T = \{(a, 2), (b, 3), (d, 7)\}$$

فأن $f$ بيان لدالة من A الى B ، وان مدى هذه الدالة $R_f = \{\,0, 3, 12\,\}$ ، بينما كل من S ، T لا يمثل بيان لدالة من A الى B .

**مثال:** إذا كانت $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ، $A = \{a, b, c\}$ . فأي العلاقات الآتية تمثل دالة من A الى B :

$$f_1 = \{(a, 2), (b, 4)\},$$
$$f_2 = \{(a, 2), (b, 4), (b, 6), (c, 8)\},$$
$$f_3 = \{(a, 2), (b, 3), (c, 10)\},$$
$$f_4 = \{(a, 2), (a, 4), (b, 6), (b, 8)\ (c, 10)\}$$

**الحـل:**

$f_1$ ليست دالة لأن العنصر c في المجال لم يرتبط بأي عنصر من المجال المقابل.

$f_2$ ليست دالة لأن العنصر b قد ظهر مرتين كأحداثي أول في الأزواج المرتبة لهذه العلاقة.

$f_3$ دالة لأن كل عنصر من المجال ارتبط بعنصر وحيد من المجال المقابل.

$f_4$ ليست دالة لأن العنصر a والعنصر b ظهرا مرتين في الأزواج المرتبة لهذه العلاقة.

**مثال:** الدالة $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة $g(x) = \sin x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

هي دالة مجالها ومجالها المقابل مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ومداها الفترة $[-1, 1]$ .

**مثال:** أفرض أن $f\colon \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ ، حيث أن N مجموعة الاعداد الطبيعية $\mathrm{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

وأن $f = \{(x, y)\colon x \in \mathrm{N}, y \in \mathrm{N}, y = 2x\}$ . فأن $f$ دالة ، ويمكن أن نعبر عن هذه الدالة بأختصار $y = 2x$ لكل $x \in \mathrm{N}$ ، أو $f(x) = 2x$ لكل $x \in \mathrm{N}$ . واضح أن مدى هذه الدالة هو مجموعة كل الاعداد الصحيحة الزوجية الموجبة.

**مثال:** لتكن $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ، معرفة كالاتي: لكل $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{اذا كان } x \text{ عدد نسبي} \\ 0 & \text{اذا كان } x \text{ عدد غير نسبي} \end{cases}$$

فأن المجال والمجال المقابل للدالة $f$ هو $\mathbb{R}$ ، بينما مدى الدالة $f$ هو المجموعة $\{0, 1\}$ . كما أن بيان الدالة هو المجموعة

$$G_f = \left\{(x, 1)\colon x \text{ عدد نسبي}\right\} \cup \left\{(x, 0)\colon x \text{ عدد غير نسبي}\right\}$$

**مثال:** لتكن $A = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\right\}$ و $B = \mathbb{R}$ . ولتكن $f$ علاقة معرفة من A الى B كالاتي:

$(x, y) \in f$ اذا وفقط اذا

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \text{ عدد صحيح} \\ \frac{1}{2} & x \text{ ليس عدداً صحيحاً} \end{cases}$$

فأن $f$ دالة من A الى B ، وأن

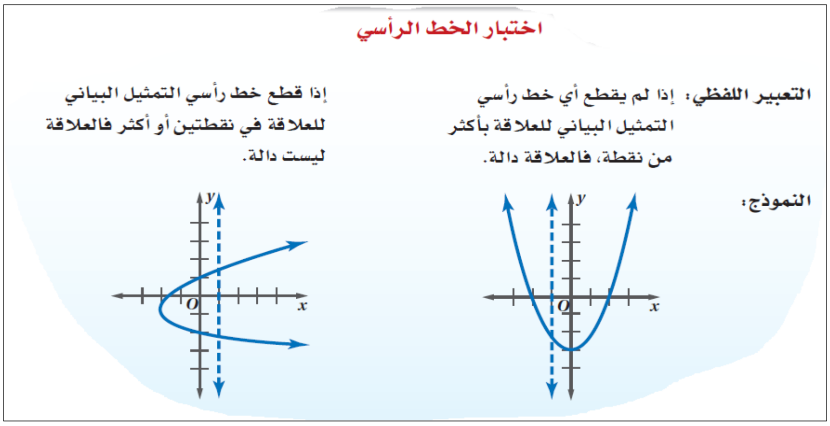
$$R_f = \left\{0, \frac{1}{2}, 1, 4, 9\right\} \quad , \quad D_f = A$$

**مثال:** أذا كانت $X = \{1, 2, 3\}$ و $Y = \{1,2,4,6,9\}$ ، اوجد:

$R_1 = \{(x, y)\colon y = 2x\}$
$R_2 = \{(x, y)\colon y = x^2\}$
$R_3 = \{(x, y)\colon y = 2x + 2\}$

وضح فيما اذا كانت $R_1$ ، $R_2$ ، $R_3$ علاقات دالية أم لا .

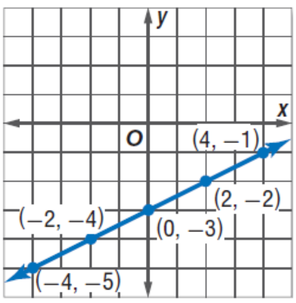
يمكن استعمال **اختبار الخط الرأسي** مع العلاقات لمعرفة إذا كانت العلاقة دالة أم لا.




**معادلات العلاقات والدوال:** يمكن تمثيل العلاقات والدوال بمعادلات، وقيم المتغيرين $x, y$ في المعادلة هي مجموعة الأزواج المرتبة $(x, y)$ التي تحقق المعادلة. ومن السهل في أغلب الأحيان تحديد إذا كانت المعادلة تمثل دالة من تمثيلها البياني.

**مثال:** مثل المعادلة $y = \frac{1}{2}x - 3$ بيانياً، وحدد مجالها ومداها، ثم حدد اذا كانت تمثل دالة أم لا ؟.

**الحل:**




| $x$ | $y$ |
|---|---|
| −4 | −5 |
| −2 | −4 |
| 0 | −3 |
| 2 | −2 |
| 4 | −1 |

أي عدد حقيقي يمكن أن يكون الإحداثي $x$ لنقطة ما على المستقيم، كما أن أي عدد حقيقي أيضاً يمكن أن يكون الإحداثي y لنقطة ما على المستقيم. لذا فإن كلاً من مجال هذه العلاقة ومداها هو مجموعة الأعداد الحقيقية.

التمثيل البياني للعلاقة يحقق اختبار الخط الرأسي، لذا، فإن المعادلة تمثل دالة.

**مثال:** مثل كل معادلة فيما يأتي بيانياً، ثم حدد مجالها، ومداها، وحدد اذا كانت تمثل دالة أم لا ؟.

$y = x^2 + 1 \quad , \quad y = 5x + 4 \quad , \quad y = 4x - 2 \quad , \quad y = 3x^2$

إذا كانت المعادلة تمثل دالة، فإن المتغير من المجال (غالباً ما يكون $(x$، يسمى المتغير المستقل. والمتغير الثاني (غالباً ما يكون y)، يسمى المتغير التابع لأن قيمه تعتمد على قيم المتغير $x$ . المعادلات التي تمثل دوالاً تكتب عادة باستعمال رمز الدالة. فالمعادلة $y = 5x - 1$ يمكن كتابتها على الصورة $f(x) = 5x - 1$

**مثال:**

لتكن $f(x) = 2x^2 - 8$، أوجد قيمة كل مما يأتي:

a) $f(6)$

$f(x) = 2x^2 - 8$

$f(6) = 2(6)^2 - 8$

$= 2(36) - 8$

$= 72 - 8 = 64$

b) $f(2y)$

$f(x) = 2x^2 - 8$

$f(2y) = 2(2y)^2 - 8$

$= 2(4y^2) - 8$

$= 8y^2 - 8$

**تعريف: الدالة المتباينة (أو الاحادية) one–to–one function (injective function)**

يقال للدالة أنها متباينة أذا كان كل عنصر من مجالها المقابل هو صورة لعنصر واحد على الأكثر من مجالها. أي لا يوجد عنصران مختلفان في المجال يرتبطان بعنصر واحد في المجال المقابل.

ويمكن استخدام الرموز للتعبير عن ذلك بالشكل الاتي: $f: \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ دالة متباينة، اذا كان:

$\forall\ x_1, x_2 \in \mathrm{A}\ , \quad f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$

Or $\forall\ x_1, x_2 \in \mathrm{A}\ ,\ x_1 \neq x_2 \quad \Longrightarrow\ f(x_1) \neq f(x_2)$

**مثال:**

لتكن $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ، حيث $f(x) = x^3$ ، فأن $f$ دالة متباينة، وذلك لأن مكعبي أي عددين حقيقيين مختلفين يكونان مختلفين أيضاً.

**مثال:**

لتكن $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ، حيث $f(x) = x^2$ ، فأن $f$ دالة غير متباينة، لأنه لو أخذنا $\mathrm{a} \in \mathbb{R}$ و $\mathrm{a} \neq 0$ فأن

$f(-\mathrm{a}) = f(\mathrm{a}) = \mathrm{a}^2$

بينما $-\mathrm{a} \neq \mathrm{a}$ .

**مثال:** لتكن $\mathrm{A} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}\}$ و $\mathrm{B} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . وأفرض أن بيانات الدوال كالاتي:

$f_1 = \{(\mathrm{a}, 1), (\mathrm{b}, 2), (\mathrm{c}, 5), (\mathrm{d}, 4)\},$

$f_2 = \{(\mathrm{a}, 2), (\mathrm{b}, 1), (\mathrm{c}, 3), (\mathrm{d}, 3)\},$

$f_3 = \{(\mathrm{a}, 2), (\mathrm{b}, 5), (\mathrm{c}, 4), (\mathrm{d}, 3)\},$

$f_4 = \{(\mathrm{a}, 2), (\mathrm{b}, 1), (\mathrm{c}, 2), (\mathrm{d}, 3)\}.$

فأي من هذه الدوال متباينة؟.

**الحل:** لا يوجد في بيان الدالة المتباينة زوجان مرتبان يتساويان فيهما الأحداثي الثاني. وعلى ذلك، فأن الدالتين $f_1$ و $f_3$ متباينتان، أما الدالتان $f_2$ و $f_4$ فغير متباينتين.

**تعريف: الدالة الشاملة onto function (surjective function)**

يقال للدالة $f: \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ أنها شاملة (أو غامرة أو فوقية) أذا كان $\mathrm{R}_f = \mathrm{B}$ ، أي أن مداها يساوي مجالها المقابل . وبمعنى اخر، كل عنصر في $\mathrm{B}$ هو قيمة للدالة في عنصر واحد، على الأقل، في $\mathrm{A}$ .

**مثال:** لتكن $\mathrm{A} = \{1, 2, 3\}$ و $\mathrm{B} = \{-1, -2\}$ وأن

$f = \{(1, -1), (2, -1), (3, -2)\}$

فأن $f: \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ دالة شاملة ولكنها ليست متباينة.

**مثال:** لتكن $f: \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ ، حيث $f(x) = 2x$ . فأن هذه الدالة $f$ ليست شاملة، وذلك لأن $\mathrm{R}_f \neq \mathrm{N}$ ، حيث أن الاعداد الفردية، وهي في المجال المقابل للدالة، ليست صوراً لعناصر في المجال وفق الدالة $f$ .

**مثال:** هل الدالة الاتية شاملة؟. $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ، حيث $g(x) = \frac{x+1}{x}$

**الحل:** لأيجاد المدى نفرض أن $y = \frac{x+1}{x}$

$$\Rightarrow yx = x + 1 \Rightarrow yx - x = 1 \Rightarrow x(y-1) = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{y-1} \Rightarrow R_f = \mathbb{R} - \{1\} = \mathbb{R} \backslash \{1\}$$

وهكذا العدد $1$ لا ينتمي الى مدى الدالة g ، ولكنه ينتمي الى المجال المقابل $\mathbb{R}$. أي أن المدى للدالة g لا يساوي المجال المقابل $\mathbb{R}$ ، أذاً $R_f \neq \mathbb{R}$ . وبذلك تكون الدالة g غير شاملة.

**مثال:** هل الدالة الاتية شاملة؟. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ، حيث $f(x) = 2x + 1$

**الحل:** لأيجاد المدى نفرض ان $y = 2x + 1$

$$y = 2x + 1 \Rightarrow x = \frac{y-1}{2} \Rightarrow R_f = \mathbb{R}$$

أذاً $f$ دالة شاملة. لاحظ بأن $f$ دالة متباينة أيضاً.

**تعريف: الدالة المتقابلة one–to–one onto function (bijective function)**

يقال للدالة $f: A \to B$ أنها متقابلة أذا كانت متباينة وشاملة.

**مثال:** الدالة $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ، حيث $f(x) = 2x + 1$ دالة متقابلة لانها متباينة وشاملة.

**مثال:** لتكن $X = \{ x \in \mathbb{R} : x > 0 \}$ و $f: X \to X$ ، حيث $f(x) = x^2$ . فأن $f$ دالة متقابلة لانها متباينة وشاملة.

**مثال:** الدالة $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ، حيث $f(x) = 4x + 1$ . فأن $f$ دالة متقابلة لانها متباينة وشاملة.

**تعريف: الدالة الثابتة Constant function**

يقال للدالة $f: A \to B$ أنها ثابتة أذا كان مداها مجموعة أحادية (أي مكونة من عنصر واحد فقط).

**مثال:** الدالة $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ، بحيث أن $f(x) = 2$ لكل $x \in \mathbb{R}$ ، هي دالة ثابتة.

**مثال:** لتكن $A = \{1, 2, 3, 5, 9, 11\}$ و $B = \{-1, -2, -5\}$ .

$$f = \{(1, -2), (2, -2), (3, -2), (5, -2), (9, -2), (11, -2)\},$$

فأن $R_f = f(A) = \{-2\}$ . أي أن المدى لهذه الدالة هو مجموعة أحادية (عنصر واحد). وبذلك فأن $f: A \to B$ دالة ثابتة.

**تعريف: الدالة الذاتية (الدالة المحايدة) Identity function**

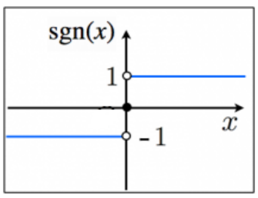
يقال للدالة $f: A \to B$ أنها دالة ذاتية اذا كان $f(x) = x$ لكل $x \in A$ . لاحظ أن أي دالة ذاتية تكون متقابلة.

لتكن $A = \{ 2, 4, 6, 8 \}$ و $f = \{(2, 2), (4, 4), (6, 6), (8, 8)\}$ ، فأن $f: A \to A$ دالة ذاتية.

**تعريف: دالة الإشارة Sign function (or Signum function)**

دالة الإشارة لأي عدد حقيقي $x$ تعرف بالشكل الاتي:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{if } x < 0 \\ 0, & \text{if } x = 0 \\ 1, & \text{if } x > 0 \end{cases}$$



**تعريف: (الدالة الفردية والدالة الزوجية)**

لتكن $f: \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ دالة ، فأن:

- $f$ دالة فردية odd function اذا كان $f(-x) = -f(x)$ لكل $x \in \mathrm{X}$ .
- $f$ دالة زوجية even function اذا كان $f(-x) = f(x)$ لكل $x \in \mathrm{X}$ .
- تكون الدالة $f$ ليست فردية ولا زوجية اذا لم يتحقق ذلك.

**مثال:** كل من الدوال الاتية فردية:

$$f(x) = 5x^3 - 2x \quad , \quad f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^2+5}} \quad , \quad f(x) = \frac{x}{x^2-1}$$

$$f(x) = x\sqrt{x^2+1} \quad , \quad f(x) = \frac{2x}{x^2+3}$$

**مثال:** كل من الدوال الاتية زوجية

$$f(x) = x^2 \quad , \quad f(x) = x^2 - 5 \quad , \quad f(x) = \frac{3}{\sqrt{x^4+2}}$$

$$f(x) = x^2 + \sqrt{2x^2+61} \quad , \quad f(x) = \frac{x^2}{x^4+1}$$

The only function that is even and odd is $f(x) = 0$.

**ملاحظة:** توجد دوال ليست فردية وليست زوجية، مثل:

$$f(x) = x^2 - 3x + 5 \quad , \quad f(x) = x + 1 \quad , \quad f(x) = x^3 - x + 1$$

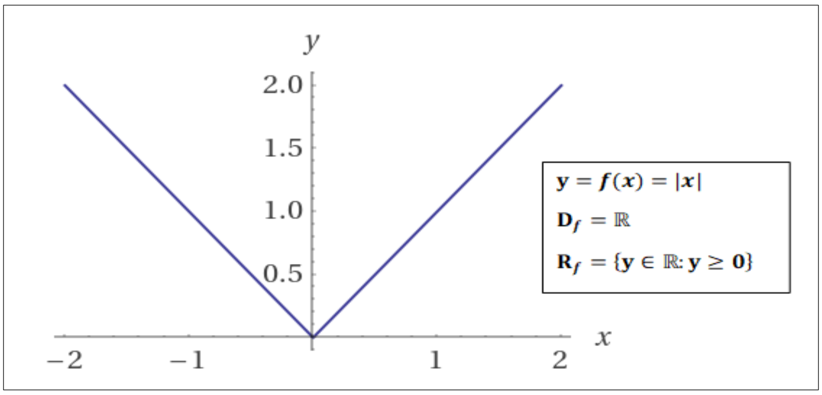
$$f(x) = 10\,x^3 - 4\,x^2 + 3x - 8 \quad , \quad f(x) = x^3 - x^2 - 1$$

**تعريف: دالة القيمة المطلقة The absolute value function**

هي الدالة $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بحيث أن لكل $x \in \mathbb{R}$ ، $f(x) = |x|$ . أي أن

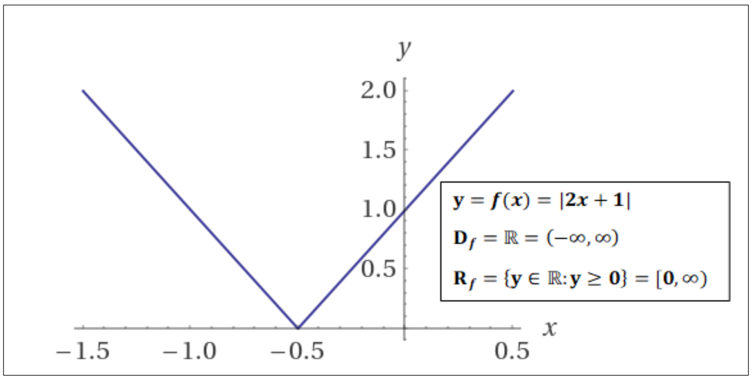
$$f(x) = |x| = \begin{cases} x\,, & x \geq 0 \text{ عندما} \\ -x\,, & x < 0 \text{ عندما} \end{cases}$$

واضح أن مجال دالة القيمة المطلقة هو $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ وان المدى هو مجموعة الاعداد الحقيقية غير السالبة $\mathrm{R}_f = [0, \infty)$ .



**مثال:** حدد مجال ومدى الدالة $y = f(x) = |2x+1|$ وارسم المخطط البياني لها.

$$f(x) = |2x+1| = \begin{cases} 2x+1 \ , & x \geq \frac{-1}{2} \\ -2x-1 \ , & x < \frac{-1}{2} \end{cases}$$



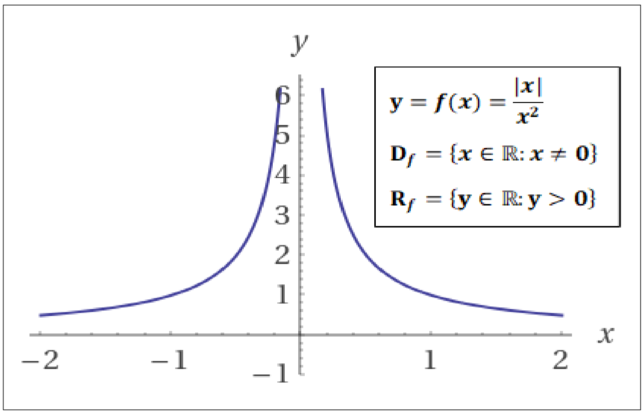

**مثال:** حدد مجال ومدى الدالة $f(x) = \frac{|x|}{x^2}$

**الحل:** الدالة $f(x) = \frac{|x|}{x^2}$ تأخذ الشكل

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2} = \begin{cases} \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \ , & x > 0 \\ \frac{-x}{x^2} = \frac{-1}{x} \ , & x < 0 \end{cases}$$

$D_f = \{x \in \mathbb{R}: x \neq 0\}$ **or** $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ **or** $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ **or** $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

$R_f = \{y \in \mathbb{R}: y > 0\}$ **or** $R_f = (0, \infty)$




**مثال:** مثل الدالة $f(x) = |2x| - 4$ بيانياً، ثم حدد كلاً من مجالها ومداها.

**تعريف: دالة الصحيح الأعظم (أو دالة أكبر عدد صحيح) greatest integer function**

دالة الصحيح الأعظم هي الدالة $f: X \to \mathbb{R}$ بحيث أن لكل $x \in X$

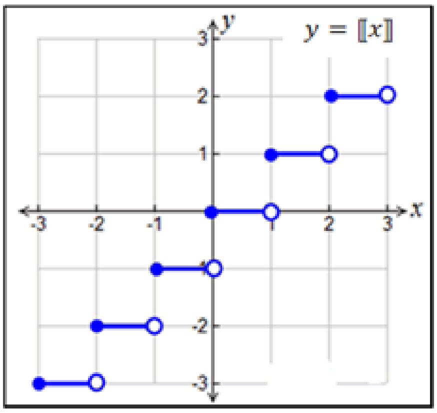
$$f(x) = [\![x]\!]$$

حيث يعني الرمز $[\![x]\!]$ أكبر عدد صحيح لا يزيد على $x$ . فمثلاً:

$[\![-0.5]\!] = -1 \quad , \quad [\![-5]\!] = -5 \quad , \quad [\![7]\!] = 7, \quad [\![3.2]\!] = 3$

$[\![-5.5]\!] = -6 \quad , \quad [\![-1.6]\!] = -2 \quad , \quad [\![-2.1]\!] = -3 \ , \quad [\![1/3]\!] = 0$

| | $[\![x]\!]$ |
|---|---|
| $-2 \leq x \leq -1$ | $-2$ |
| $-1 \leq x \leq 0$ | $-1$ |
| $0 \leq x \leq 1$ | $0$ |
| $1 \leq x \leq 2$ | $1$ |
| $2 \leq x \leq 3$ | $2$ |
| $3 \leq x \leq 4$ | $3$ |




هذه الدالة تسمى ايضاً بالدالة الدرجية أو السلمية. واضح أنه أذا كان مجال دالة أكبر عدد صحيح هو $\mathbb{R}$ فأن مداها هو مجموعة الاعداد الصحيحة $Z$ .

**تعريف: دالة متعددة الحدود polynomial function**

يقال أن الدالة $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ متعددة حدود (أو كثيرة الحدود) من الدرجة n ، اذا كان لكل $x \in \mathbb{R}$ ،

$$f(x) = \mathrm{a}_n\, x^n + \mathrm{a}_{n-1}\, x^{n-1} + \mathrm{a}_{n-2}\, x^{n-2} + \cdots \mathrm{a}_1\, x + \mathrm{a}_0$$

حيث ان n عدد صحيح غير سالب، وأن $\mathrm{a}_0$ ، $\mathrm{a}_1$ ، ... ، $\mathrm{a}_{n-2}$ ، $\mathrm{a}_{n-1}$ ، $\mathrm{a}_n$ ، $\mathrm{a}_n \neq 0$ ، أعداد حقيقية.

أذا كانت درجة متعددة الحدود صفراً، تكون عندئذ دالة ثابتة، وأذا كانت درجتها واحداً يطلق عليها دالة خطية. كما أن الدالة الذاتية هي دالة خطية.

**ملاحظة:** مجال أي دالة متعددة حدود هو مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

**أمثلة:**

$$f(x) = 7\,, \quad f(x) = -3\,, \quad f(x) = \sqrt{8}\,, \quad f(x) = \pi\,, \quad f(x) = \frac{e}{4}\,, \quad f(x) = \frac{1}{2}$$

الدوال السابقة متعددات حدود من الدرجة الصفرية $(n = 0)$ وتسمى دوال ثابتة.

$$f(x) = ax + b\,, \quad f(x) = 2x - 3\,, \quad f(x) = x - 1\,, \quad f(x) = -3 + 4x$$

الدوال السابقة متعددات حدود من الدرجة الاولى $(n = 1)$ وتسمى دوال خطية.

$$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c\,, \quad f(x) = 2x^2 + \sqrt{5}\,x + 3\,, \quad f(x) = \frac{2}{5}x^2 + 7\,, \quad f(x) = x^2 - \sqrt{7}x$$

الدوال السابقة متعددات حدود من الدرجة الثانية $(n = 2)$ وتسمى دوال تربيعية.

$$f(x) = ax^3 + b\,x^2 + c\,x + d\,, \quad f(x) = 2x^3 + \sqrt{5}\,x^2 + 3x - 7\,,$$
$$f(x) = \frac{3}{5} + 4x^3\,, \quad f(x) = x^3 - \sqrt{7}x$$

الدوال السابقة متعددات حدود من الدرجة الثالثة $(n = 3)$ وتسمى دوال تكعيبية.

$f(x) = 3\,x^4 - 5\,x^2 + 7$ متعددة حدود من الدرجة الرابعة

$f(x) = x^7 + 3\,x^6 - 11x$ متعددة حدود من الدرجة السابعة

وهكذا ........