$$I(f) = \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \cdots + f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n]$$

$$= \frac{h}{3}\left[f_0 + 4\sum_{i=1}^{n/2} f_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f_{2i} + f_n\right]$$

تسمى هذه الصيغة بصيغة سمبسون المركبة.

مثال:- جد قيمة تقريبية للتكامل التالي $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ اذا علمت ان $n = 6$

الحل:-

$$a = 0, b = 1, h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{6}$$

x	0	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	1
y	1	0.973	0.9	0.8	0.692	0.59	0.5

1-by Trapezium

$$I(f) = \frac{h}{2}[y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 + y_6]$$

$$= \frac{1}{12}[1 + 2(0.973) + 2(0.9) + 2(0.8) + 2(0.692) + 2(0.59) + 0.5]$$

$$= 0.784$$

2-by Simpsons

$$S_I(f) = \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + 4f_5 + f_6]$$

$$= \frac{1}{18}[1 + 4(0.973) + 2(0.9) + 4(0.8) + 2(0.692) + 4(0.59) + 0.5]$$

$$= 0.785$$

مثال:- جد قيمة تقريبية للتكامل التالي $\int_0^1 3x^2 dx$ اذا علمت ان $n = 10$

الحل:-

$$a = 0, b = 10, h = \frac{b-a}{n} = 1$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	0	3	12	27	48	75	108	147	192	243	300

1-by Trapezium

$$I(f) = \frac{h}{2}[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + \cdots + 2f_8 + 2f_9 + f_{10}]$$

$$= \frac{1}{2}[0 + 6 \ldots \ldots + 486 + 300]$$

$$= 1005$$

2-by Simpsons

$$S_I(f) = \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \cdots + 2f_8 + 4f_9 + f_{10}]$$

$$= \frac{1}{3}[0 + 12 + 54 + \cdots + 300]$$

$$= 1000$$

واجب:- جد قيمة تقريبية للتكامل التالي $\int_{-2}^{2} cosx\ dx$ اذا علمت ان $n = 5$.

الفصل السادس

الحلول العددية للمعادلات التفاضلية الاعتيادية

Numerical Solution of Ordinary Differential Equations

تعرف المعادلة التفاضلية الاعتيادية كما يلي: $y' = f(x, y)$

اذا اعطى الشرط $y(x_0) = y_0$

وتسمى المسالة عندئذ بمسالة القيم الابتدائية (Initial value Problems)

1) طريقة متسلسلة تيلر: Taylor's series method

تعرف متسلسلة تيلر عند النقطة x_0 كما يلي:

$$y(x) = y(x_0) + (x - x_0)y'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}y''(x_0) + \cdots$$

ومن اجل حل مسالة القيمة الابتدائية باستخدام الصيغة اعلاه نجد اولا حل المعادلة عندما $x = x_1$.

فاذا كانت النقاط المطلوب ايجاد حل المسالة عندها متساوية الابعاد, اي ان $x_i = x_0 + ih$ فتكون الصيغة اعلاه كما يلي:

$$y(x_1) = y(x_0) + hy_n'(x_0) + \frac{h^2}{2!}y''(x_0) + \cdots$$

وبصورة عامة

$$y_{n+1} = y_n + hy_n' + \frac{h^2}{2!}y_n'' + \cdots$$

مع شرط التوقف $|y_{n+1} - y_n| < \epsilon$

وتسمى هذه الصيغة بطريقة متسلسلة تيلر.

مثال:- باستخدام متسلسلة تيلر جد حل المعادلة التفاضلية $y' = x - y, y(0) = 1$ حيث $h = 0.1$

الحل:-

$$x_0 = 0, y_0 = 1$$

$$y' = x_0 - y_0 = 0 - 1 = -1$$

$$y'' = 1 - y' \Rightarrow y_0'' = 2$$

$$y_0''' = -2$$

$$\therefore y_1 = 1 + (0.1)(-1) + \frac{(0.1)^2}{2}(2) + \frac{(0.1)^3}{6}(-2) + \frac{(0.1)^4}{24}(2) = 0.9096$$

$$y_2 = y_1 + hy_1' + \frac{h^2}{2!}y_1'' + \frac{h^3}{3!}y_1''' \frac{h^4}{4!}y_1''''$$

$$y_2 = 0.91 + (0.1)(-0.81) + \frac{(0.1)^2}{2}(1.81) + \frac{(0.1)^3}{6}(-1.81) + \frac{(0.1)^4}{24}(1.81)$$
$$= 0.838$$

2) طريقة اويلر: Euler's method

ان الصيغة العامة لطريقة اويلر تكتب كما يلي:

$$y_{n+1} = y_n + hy_n'$$

مع شرط التوقف $|y_{n+1} - y_n| < \epsilon$

مثال:- باستخدام طريقة اويلر جد حل المعادلة التفاضلية $y' = x - y, y(0) = 1$ حيث $h = 0.1$

الحل:-

$$y_1 = y_0 + hy_0'$$
$$= 1 + (0.1)(-1)$$
$$= 0.9$$
$$y_2 = y_1 + hy_1'$$
$$= 0.9 + (0.1)(0.1 - 0.9)$$
$$= 0.82$$

مثال:- باستخدام طريقة اويلر جد حل المعادلة التفاضلية $y' = x + y, y(0) = 1$ حيث $h = 0.02, y(x) = 2e^x - x - 1$

الحل:-

x_n	y_n	y_n'
0	1.0000	1.0000
0.02	1.0200	1.0200
0.04	1.0408	1.0404
0.06	1.0624	1.0612
0.08	1.0848	1.0824
0.1	1.1081	1.1040