تعريف متغيرات النموذج الرياضي:

Z : قيمة الهدف الاجمالية وهي تمثل الربح الاجمالي المطلوب تحقيقه وفي هذه الحالة تأخذ دالة الهدف صيغة التعظيم (.Max) لأننا نسعى لتحقيق اكبر ربح ممكن من حل المشكلة. وقد تمثل الكلفة الاجمالية وفي هذه الحالة تأخذ دالة الهدف صيغة التصغير (.Min) لأننا نسعى لتحقيق أقل كلفة ممكنة من حل المشكلة.

$X_1, X_2, \dots, X_n$: متغيرات القرار (المتغيرات المطلوب تحديد قيمها) وتسمى بمتغيرات القرار لأن على اساس قيمها (التي تمثل حل المشكلة) يتم اتخاذ القرار بخصوص المشكلة هذه المتغيرات قد تمثل عدد الوحدات المنتجة من منتوج معين في حالة مشكلة الانتاج ، او عدد الشاحنات من نوع معين في حالة مشكلة النقل، بمعنى تتحد حسب نوع المشكلة المراد حلها. هذه المتغيرا يمكن التعبير عنها بمتجه صفي $X=(X_1\ X_2\ \dots\ X_n)$ ذو سعة $(1*n)$.

$C_1, C_2, \dots, C_n$: معاملات متغيرات دالة الهدف والتي تمثل ربح الناتج من انتاج الوحدة الواحدة من منتج ما أو كلفة الوحدة الواحدة من منتج ما، أي حسب طبيعة دالة الهدف. هذه المعاملات يمكن التعبير عنها بمتجه صفي $C=(C_1\ C_2\ \dots\ C_n)$ ذو سعة $(1*n)$.

المصفوفة $[a_{ij}]$: $(i : 1, 2, \dots, n)$ و $(j : 1, 2, \dots, m)$ اي ان المصفوفة ذات سعة $m*n$ ، وتمثل مصفوفة معاملات المتغيرات للقيود الهيكلية حيث يمثل كل صف معاملات المتغيرات القيد المناظر لذلك الصف. المصفوفة تكتب كالاتي :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$b_1, b_2, \dots, b_m$: تمثل الحد الثابت للقيود وتمثل الكمية المتاح من الموارد المتوفرة مثلا عدد عدد ساعات عمل ماكنة (الطاقة التشغيلية للماكنة) ، او الطاقة الاستيعابية لكل شاحنة . يمكن تمثيلها بمتجه عمودي $b=(b_1\ b_2\ \dots\ b_m)^T$ ذو سعة $(m*1)$.

النموذج الرياضي يمكن كتابتة بصيغة المصفوفات وكالآتي:

$$\begin{gathered} \text{Max. (or Min.)}\ Z = C\,X^T \\ \text{S.T.} \\ A\,X^T \geq \text{or} \leq \text{or} = b \\ X \geq 0 \end{gathered}$$

2- 3 الطريقة الجبرية The Algebraic Method:

تعد الطريقة الجبرية من الطرق الرياضية البحتة التي تعتمد أسلوب التعويض الجبري للقم المتوقعة للمتغيرات الداخلة في النموذج الرياضي وفقاً إلى عدد الطرق الممكنة لهذه القيم، وتستخدم هذه الطريقة عندما يحتوي النموذج على متغيرين فقط هما (X_1, X_2).

ولحل نموذج البرمجة الخطية بموجبها، نتبع الخطوات الآتية:

1. تقسيم متغيرات النموذج الرياضي، إلى نوعين هما:

أ. المتغيرات الأساسية (Basic Variables):

وهي تلك المتغيرات التي لها دور مهم في المشكلة، وتكون قيم هذه المتغيرات (اكبر من الصفر) دائماً، أي إن ($X_j>0, S_i>0$).

ب. المتغيرات غير الأساسية (Non- Basic Variables):

وهي تلك المتغيرات التي لها دور مهم في المشكلة، وتكون قيم هذه المتغيرات (مساوية للصفر) دائماً، أي إن ($X_j=0, S_i=0$).

2. تحويل النموذج الرياضي من الصيغة القانونية (Canonical Form) إلى الصيغة المستقرة (الصيغة القياسية) (Standard Form)، وذلك باستخدام المتغيرات الراكدة (Slack Variables) في دالة الهدف وقيود النموذج، وكالآتي:

آلية استخدام المتغيرات الراكدة في دالة الهدف		آلية استخدام المتغيرات الراكدة في القيود	نوع علامة القيود
Min. Z	Max. Z		
$+0\,S_i$	$+0S_i$	$+S_i$	أقل أو يساوي ($\leq$)
$-0S_i$	$-0\,S_i$	$-S_i$	أكبر أو يساوي ($\geq$)
/	/	/	يساوي (=)

3. عمل جدول يتضمن المتغيرات الأساسية والمتغيرات غير الأساسية، لغرض الوصول إلى الحل الأمثل للمشكلة بموجب الطريقة الجبرية.

مثال (6):

جد الحل الأمثل للنموذج التالي، باستخدام الطريقة الجبرية:

Example 6: Find the optimal solution for following (L.P) model using Algebraic method?

Max. $Z= 3X_1+5X_2$

Subject to:

$$2X_1+3X_2 \leq 30$$
$$5X_1+4X_2 \leq 60$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

Solution:

1. نقوم بتحويل النموذج الرياضي السابق من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية، وعلى النحو الآتي:

Max. $Z= 3X_1+5X_2 + 0S_1+ 0S_2$

Sub. to:

$2X_1+3X_2 +S_1= 30$

$5X_1+4X_2+ S_2 =60$

$X_1 , X_2 \geq 0, S_1, S_2 \geq 0$

2. تحديد عدد الحالات الممكنة لاختيار (2) متغيرين من (4) متغيرات، وفقاً للصيغة الآتية:

$$\therefore C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$\therefore C_2^4 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4(3)2!}{2(1)2!}$$

3. للوصول إلى الحل الأمثل للمشكلة باستخدام الطريقة الجبرية، نعمل الجدول الآتي:

عدد الحالات الممكنة	المتغيرات غير الأساسية $X_i = 0, \quad S_i = 0$		المتغيرات الأساسية $X_i > 0, \quad S_i > 0$		دالة الهدف $Z = 3X_1+5X_2+0S_1+0S_2$	Max. Z
1	$X_1 = 0$	$X_2 = 0$	$S_1 = 30$	$S_2 = 60$	0	
2	$X_1 = 0$	$S_1 = 0$	$X_2 = 10$	$S_2 = 20$	50	
3	$X_1 = 0$	$S_1 = 0$	$X_2 = 15$	$S_1 = -15$	75 (يهمل)	50^*
4	$X_2 = 0$	$S_1 = 0$	$X_1 = 15$	$S_2 = -15$	45 (يهمل)	
5	$X_2 = 0$	$S_2 = 0$	$X_1 = 12$	$S_1 = 6$	36	
6	$S_1 = 0$	$S_2 = 0$	$X_1 = 8.6$	$X_1 = 4.3$	47.3	

الحل الأمثل للمشكلة، يكون:

$X_1 = 0$
$X_2 = 10$
$Z^* = 50$

مثال (7):

جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالي، جبرياً:

Example 7: Find the optimal solution for following (L.P) model using Algebraic method?

Max. $Z = 30X_1+18X_2$
Subject to:

$X_1+2X_2 \leq 200$

$$3X_1+2X_2 \le 300$$
$$X_1 \le 100$$
$$X_1\ ,\ X_2 \ge 0$$

Solution:

Max. $Z= 30X_1+18X_2 + 0S_1+ 0S_2+ S_3$

Subject to:

$$X_1+2X_2+ S_1 = 200$$
$$3X_1+2X_2 + S_2 = 60$$
$$X_1 \qquad + S_3 = 100$$
$$X_1\ ,\ X_2 \ge 0,\ S_1,\ S_2,\ S_3 \ge 0$$

نقوم بتحديد عدد الحالات الممكنة، وفقاً للصيغة الآتية:

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!} \Rightarrow C_2^5 = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5(4)(3!)}{2(1)3!} = 10$$

أي إن عدد الحالات العشرة، هي:

$X_1X_2,\ X_1S_1,\ X_1S_2,\ X_1S_3,\ X_2S_1,\ X_2S_2,\ X_2S_3,\ S_1S_2,\ S_1S_3,\ S_2S_3$

وللوصول إلى الحل الأمثل للمشكلة جبرياً، نعمل الجدول الآتي:

عدد الحالات	المتغيرات غير الأساسية		المتغيرات الأساسية			دالة الهدف	Max. Z
	$X_j = 0$	$, S_i = 0$	$X_j > 0$	$, S_i > 0$		$Z = 30X_1+18X_2+0S_1+0S_2+0S_3$	
1	$X_1 = 0$	$X_2 = 0$	$S_1 = 200$	$S_2 = 300$	$S_3 = 100$	0	
2	$X_1 = 0$	$S_1 = 0$	$X_2 = 100$	$S_2 = 100$	$S_3 = 100$	1800	
3	$X_1 = 0$	$S_2 = 0$	$X_2 = 150$	$S_1 = -100$	$S_3 = 100$	يهمل(2700)	
4	$X_1 = 0$	$S_3 = 0$	$X_2 = 0$	$S_1 = 200$	$S_2 = 300$	0	
5	$X_2 = 0$	$S_1 = 0$	$X_1 = 200$	$S_2 = -300$	$S_3 = -100$	يهمل(6000)	3000*
6	$X_2 = 0$	$S_2 = 0$	$X_1 = 100$	$S_1 = 100$	$S_3 = 0$	3000	
7	$X_2 = 0$	$S_3 = 0$	$X_1 = 100$	$S_1 = 100$	$S_2 = 0$	3000	
8	$S_1 = 0$	$S_2 = 0$	$X_1 = 50$	$X_2 = 75$	$S_3 = 50$	2850	
9	$S_1 = 0$	$S_3 = 0$	$X_1 = 100$	$X_2 = 50$	$S_2 = -100$	يهمل(3900)	
10	$S_2 = 0$	$S_3 = 0$	$X_1 = 100$	$X_2 = 0$	$S_1 = 100$	3000	

عليه يكون الحل الأمثل للمشكلة، كالآتي:

$X_1 = 100,\ X_2 = 0,\ Z^* = 3000$

مثال (8):

جد الحل الأمثل للنموذج التالي، باستخدام الطريقة الجبرية:

Example 8: Find the optimal solution for following (L.P) model using Algebraic method?

Min. $Z = 3X_1 + 2X_2$

Subject to:

$4X_1 + 6X_2 \geq 12$

$8X_1 + 4X_2 \geq 16$

$X_1 , X_2 \geq 0$

Solution:

نقوم بتحويل النموذج الرياضي أعلاه من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية، وعلى النحو الآتي:

Min. $Z = 3X_1 + 2X_2 - 0S_1 - 0S_2$

Subject to:

$4X_1 + 6X_2 - S_1 = 12$

$8X_1 + 4X_2 - S_2 = 16$

$X_1 , X_2 \geq 0,\ S_1,\ S_2 \geq 0$

للوصول إلى الحل الأمثل للمشكلة، نعم الجدول الآتي:

عدد الحالات الممكنة	المتغيرات غير الأساسية $X_j = 0$	$, S_i = 0$	المتغيرات الأساسية $X_j > 0,$	$S_i > 0$	دالة الهدف $Z = 3X_1 + 2X_2 - 0S_1 - 0S_2$	Max. Z
1	$X_1 = 0$	$X_2 = 0$	$S_1 = -12$	$S_2 = -16$	0 (تهمل)	
2	$X_1 = 0$	$S_1 = 0$	$X_2 = 2$	$S_2 = -8$	4 (تهمل)	
3	$X_1 = 0$	$S_2 = 0$	$X_2 = 4$	$S_1 = 12$	8	6.5^*
4	$X_2 = 0$	$S_1 = 0$	$X_1 = 3$	$S_2 = 8$	9	
5	$X_2 = 0$	$S_2 = 0$	$X_1 = 2$	$S_1 = -4$	6 (تهمل)	
6	$S_1 = 0$	$S_2 = 0$	$X_1 = 1.5$	$X_2 = 1$	6.5	

فمثلاً إذا كان عدد المجاهيل (المتغيرات القرارية + المكملة) يساوى 20 وعدد القيود الهيكلية يساوى 6 فإن عدد النقط الطرفية في هذه الحالة يساوى 38760 حيث:

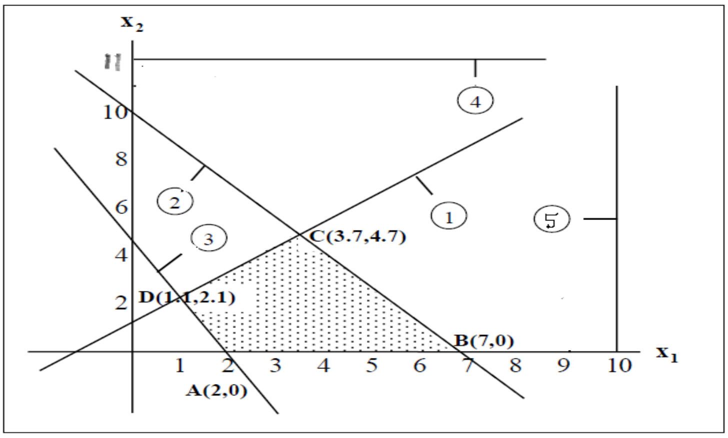
$$C_6^{20} = \frac{20!}{6!(20-6)!} = \frac{20\times19\times18\times17\times16\times15}{6\times5\times4\times3\times2\times1} = 38760 \text{ نقطة}$$

أي أنه يجب تحديد الـ 38760 نقطة ثم فحص كل نقطة من هذه النقط لتحديد نوعها فإذا كانت نقطة ممكنة فإنه يتم حساب قيمة دالة الهدف عندها - وهذا إجراء غير كفأ وبصفة خاصة كلما زادت عدد القيود الهيكلية وعدد المتغيرات.

ولكن تكمن كفاءة طريقة السمبلكس في أننا ننتقل من نقطة حل أساسي ممكن إلى نقطة حل أساسي ممكن أفضل من السابقة لها، وذلك لوجود شروط الأمثلية ويؤدى ذلك إلى عدم تحديد وفحص جميع النقط الطرفية مما يؤدى إلى سرعة وكفاءة الوصول إلى الحل الأمثل.

امثلة واجب عن الطريقة الجبرية:

1- In the following figure, the area of feasible solutions for one of the linear programming models:

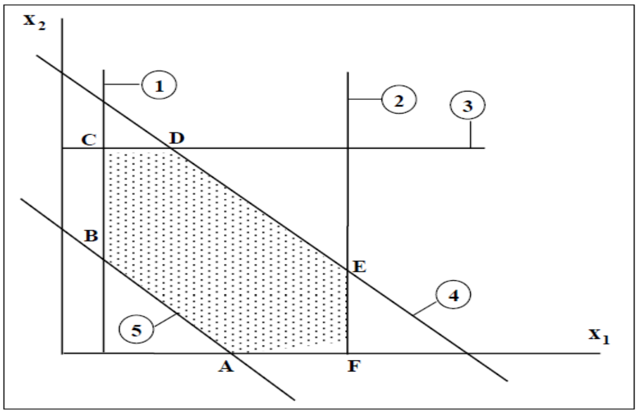


Required: 1- Determine the direction of each constraint (less than or equal to, equal to, greater than or equal to) of the five constraints.

2-Determine the complementary variables that can be added to each constraint (negative or positive).

3- Identify the Basic and non- Basic variables at each possible endpoint (A, B, C, D).

2- In The following figure: the region of feasible solutions for one of the linear programming models:



Required:

1- Determine the direction of each constraint (less than or equal to, greater than or equal to) of the five constraints.

2- Determine the Slack variables that can be added to each constraint (negative or positive).

3- Identify the Basic and non- Basic variables at each possible end point (A, B, C, D, E, F).