مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = \sin^{-1}(x^2+1)$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2+1)^2}} \cdot (2x) = \frac{2x}{\sqrt{-x^4-2x^2}}$$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = x^2 \tan^{-1}(x^3)$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \cdot \left(\frac{1}{1+(x^3)^2} \cdot (3x^2)\right) + \tan^{-1}(x^3) \cdot (2x) = \frac{3x^4}{1+x^6} + 2x \cdot \tan^{-1}(x^3)$$

مثال: أوجد $\frac{d}{dx}\cos^{-1}(x^3+x)$

الحل:

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1}(x^3+x) = \frac{-1}{\sqrt{1-(x^3+x)^2}} \cdot (3x^2+1) = \frac{-(3x^2+1)}{\sqrt{1-(x^3+x)^2}}$$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ لكل من $y = \sec^{-1}(4x+2)$, $y = \tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = \csc^{-1}\left(\sqrt{x}\right)$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{|\sqrt{x}|\sqrt{(\sqrt{x})^2-1}} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot x^{\frac{-1}{2}}\right) = \frac{-1}{2x\sqrt{x-1}}$$

Example: Find y' for $y = x\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2}$

Solution: $y' = x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sin^{-1}x + \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \sin^{-1}x + \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$

$$= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \sin^{-1}x + \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}x$$

Example: Find the derivative of $y = \tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

Solution: $y' = \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} \cdot \frac{(x+1)\cdot 1-(x-1)\cdot 1}{(x+1)^2}$

$$= \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2+(x-1)^2} \cdot \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2+(x-1)^2}$$

$$= \frac{2}{x^2+2x+1+x^2-2x+1} = \frac{2}{2x^2+2} = \frac{1}{x^2+1}$$

الواجب:

Find the derivative of the following functions.

$$y = \sqrt{x^2 - 1} - \sec^{-1} x \quad , \quad y = 2x \cos^{-1}(2x) - \sqrt{1 - 4x^2}$$

$$y = 2x \cos^{-1} \sqrt{x} + \sin^{-1} \sqrt{x} - \sqrt{x - x^2} \quad , \quad y = \csc^{-1}(x^2 + 1)$$

$$y = \cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{x}}{1 + x}\right)$$

التكاملات الناتج عنها دوال مثلثية عكسية:

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C \quad , \quad a > 0$$

$$\int \frac{-du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \cos^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C \quad , \quad a > 0$$

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C \quad , \quad a > 0$$

$$\int \frac{-du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \cot^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C \quad , \quad a > 0$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1}\frac{|u|}{a} + C \quad , \quad a > 0$$

$$\int \frac{-du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \csc^{-1}\frac{|u|}{a} + C \quad , \quad a > 0$$

مثال: جد قيمة التكامل $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

الحل:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

مثال: جد قيمة التكامل $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

الحل: $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{1}\tan^{-1}\left(\frac{x}{1}\right)\Big|_0^1 = \tan^{-1}(x)\Big|_0^1 = \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0)$

$$= \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

مثال: احسب التكامل $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-9x^2}}$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-9x^2}} = \int \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{9}-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-9x^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{9}-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{x}{2/3}\right) + \mathrm{C}$$

$$= \frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{3x}{2}\right) + \mathrm{C}$$

مثال: جد قيمة التكامل $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-25x^2}}$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-25x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{25}{25}-25x^2}} = \frac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{1}{25}-x^2}}$$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2-x^2}} = \frac{1}{5}\sin^{-1}\left(\frac{x}{1/5}\right) + \mathrm{C} = \frac{1}{5}\sin^{-1}(5x) + \mathrm{C}$$

مثال: جد قيمة التكامل $\int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{16+x^4}$

الحل:

$$\int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{16+x^4} = \int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{4^2+(x^2)^2} = \frac{1}{4}\tan^{-1}\left(\frac{x^2}{4}\right) + \mathrm{C}$$

مثال: أحسب التكامل الاتي: $\int \frac{\mathrm{d}x}{45+5x^2}$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{45+5x^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{5(9+x^2)} = \frac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}x}{9+x^2} = \frac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}x}{3^2+x^2}$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + \mathrm{C} = \frac{1}{15}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + \mathrm{C}$$

مثال: أحسب $\int \frac{1}{25+16x^2}$

$$\int \frac{1}{25+16x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\frac{16\times 25}{16}+16x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{16\left(\frac{25}{16}+x^2\right)}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{16}\int \frac{1}{\frac{25}{16}+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{16}\int \frac{1}{\left(\frac{5}{4}\right)^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{\frac{5}{4}}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\frac{5}{4}}\right) + \mathrm{C}$$

$$= \frac{1}{20}\tan^{-1}\left(\frac{4x}{5}\right) + \mathrm{C}$$

مثال: جد قيمة التكامل $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\cdot\sqrt{16x^2-4}}$

الحل:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\cdot\sqrt{16x^2-4}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x\cdot\sqrt{16x^2-\frac{4\times 16}{16}}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x\cdot\sqrt{16\left(x^2-\frac{4}{16}\right)}}$$
$$= \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{x\cdot\sqrt{x^2-\frac{1}{4}}} = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{x\cdot\sqrt{x^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\sec^{-1}\frac{|x|}{\frac{1}{2}} + \mathrm{C}$$
$$= \frac{1}{2}\sec^{-1}|2x| + \mathrm{C}$$

مثال: جد قيمة التكامل $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-25x^2}}$

الحل:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-25x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{25}{25}-25x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{25\left(\frac{1}{25}-x^2\right)}}$$
$$= \frac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2-x^2}} = \frac{1}{5}\sin^{-1}\left(\frac{x}{\frac{1}{5}}\right) + \mathrm{C} = \frac{1}{5}\sin^{-1}(5x) + \mathrm{C}$$

مثال: جد قيمة التكامل $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{16x^2-4}}$

الحل:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{16x^2-4}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{16x^2-\frac{4\times 16}{16}}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{16\left(x^2-\frac{4}{16}\right)}}$$
$$= \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-\frac{1}{4}}} = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\sec^{-1}\frac{|x|}{\frac{1}{2}} + \mathrm{C}$$
$$= \frac{1}{2}\sec^{-1}|2x| + \mathrm{C}$$

مثال: جد قيمة التكامل $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^4+9}$

الحل:

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^4+9} = \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2)^2+3^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(x^2)^2+3^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x^2}{3}\right) + \mathrm{C}$$
$$= \frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{x^2}{3}\right) + \mathrm{C}$$

مثال: جد قيمة التكامل $\int \frac{\sec^2 x\, dx}{\sqrt{36-\tan^2 x}}$

الحل:

$$\int \frac{\sec^2 x\, dx}{\sqrt{36-\tan^2 x}} = \int \frac{\sec^2 x\, dx}{\sqrt{6^2-\tan^2 x}} = \sin^{-1}\left(\frac{\tan x}{6}\right) + C$$

Example: Evaluate $\int \frac{dx}{\sqrt{8x-x^2}}$

Solution: We complete the square to simplify the denominator:

بأكمال المربع للمقام

$$8x - x^2 = 8x - x^2 - 16 + 16 = (8x - x^2 - 16) + 16$$
$$= -(-8x + x^2 + 16) + 16 = 16 - (x^2 - 8x + 16)$$
$$= 16 - (x-4)^2$$

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{8x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{16-(x-4)^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4^2-(x-4)^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x-4}{4}\right) + C$$

الواجب: جد قيمة التكاملات الاتية

$$\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1-x^6}} \quad , \quad \int \frac{dx}{1+(3-x)^2} \quad , \quad \int \frac{5}{3x\sqrt{4x^2-1}}\, dx \quad , \quad \int \frac{5}{2x^2+4x+9}\, dx$$

الدالة الاسية Exponential Function

تعريف: الدالة الاسية العامة ذات الأساس a تعرف كالاتي:

$a^x: \mathbb{R} \to (0, \infty)$

وتكتب بالصيغة

$f(x) = a^x \ , \ x \in \mathbb{R}$

حيث أن a عدد حقيقي اكبر من الصفر ($a > 0$).

المجال للدالة الاسية هو جميع الاعداد الحقيقية، أي أن $D_f = (-\infty, \infty)$.

أمثلة:

$$f(x) = 4^x \quad , \quad f(x) = \left(\frac{1}{7}\right)^x = 7^{-x} \quad , \quad f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^{-x}$$

بعض خصائص الدالة الاسية:

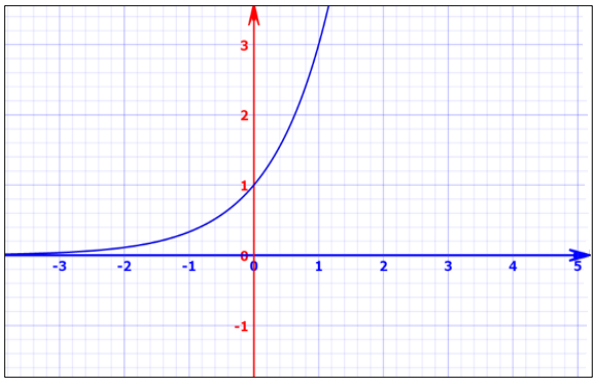
- $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
- $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$
- أذا كان $a > 0$ ، فان $a^x > 0$ لأي عدد حقيقي x .
- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
- $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$
- $a^0 = 1$
- أذا كان $a > 1$ ، فان a^x دالة متزايدة.
- أذا كان $0 < a < 1$ ، فان a^x دالة متناقصة.
- a^x دالة مستمرة لأي عدد حقيقي x .
- أذا كان $a = 1$ ، فان $a^x = 1$ لكل x .

مثال: مثّل كل دالة بيانيًا. ووضح المجال والمدى ومواضع تزايد أو تناقص الدالة.

$$f_1(x) = 3^x \quad , \ f_2(x) = -3^x \quad , \quad v(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x \quad , \ g(x) = 2^{-x}$$
$$h(x) = 5^{-x} \ , \quad u(x) = 4^x$$

الحل: الدالة $f_1(x) = 3^x$

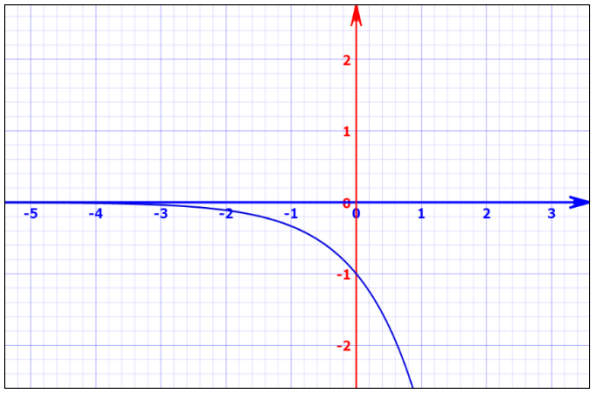
$$D_{f_1} = (-\infty, \infty) \quad , \quad R_{f_1} = (0, \infty)$$



الدالة متزايدة في جميع الاعداد الحقيقية، أي أن فترة التزايد $(-\infty, \infty)$.

الدالة $f_2(x) = -3^x$:

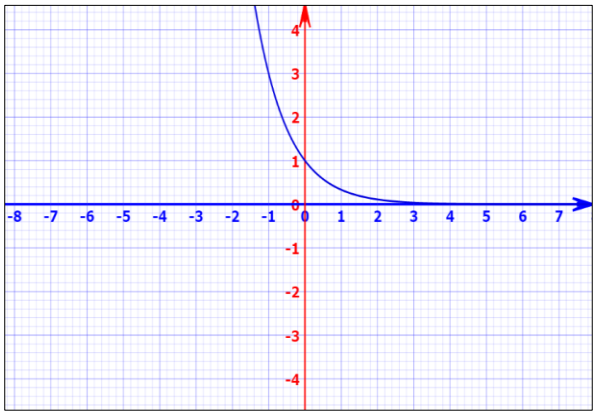
$$D_{f_2} = (-\infty, \infty) \quad , \quad R_{f_2} = (-\infty, 0)$$



الدالة متناقصة في جميع الاعداد الحقيقية، أي أن فترة التناقص $(-\infty, \infty)$.

الدالة $v(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^{-x}$:

$$D_v = (-\infty, \infty) \quad , \quad R_v = (0, \infty)$$

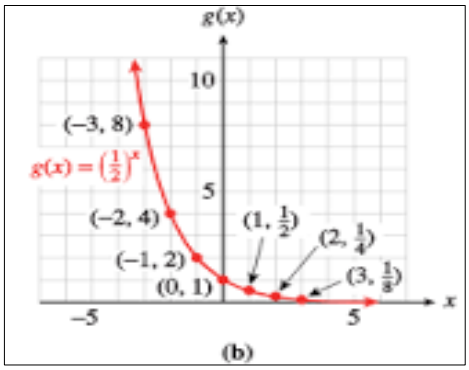


الدالة متناقصة في جميع الاعداد الحقيقية، أي أن فترة التناقص $(-\infty, \infty)$.

أما الدالة $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$:

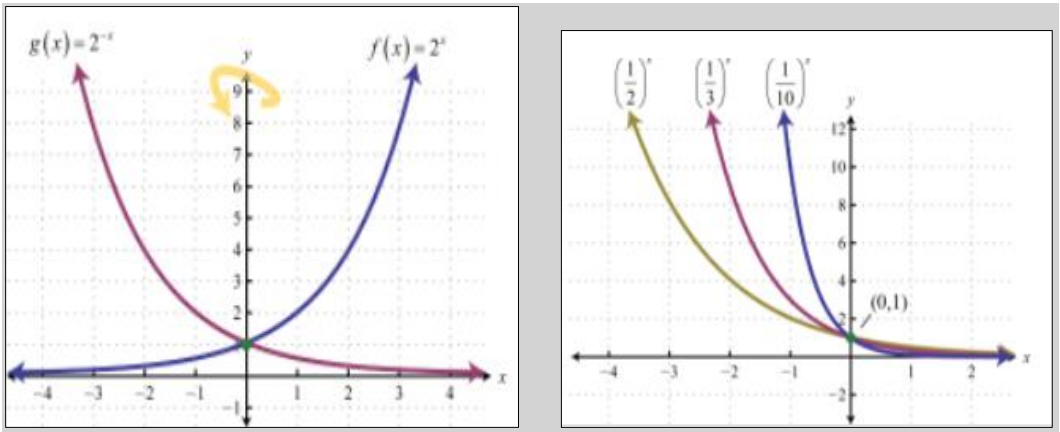
$D_g = (-\infty, \infty)$, $R_g = (0, \infty)$

x	−6	−4	−2	0	2	4	6
$g(x)$	64	16	4	1	0.25	0.06	0.02



الدالة متناقصة في جميع الاعداد الحقيقية، أي أن فترة التناقص $(-\infty, \infty)$.

أمثلة لبعض الدوال الاسية:



المشتقة والتكامل

لتكن u دالة قابلة للأشتقاق بالنسبة الى x ، فان:

$$\frac{d}{dx}(a^u) = a^u \cdot u' \cdot \ln a$$

$$\int a^u \, du = \frac{a^u}{\ln a} + C \quad , \quad a > 0 \, , a \neq 1$$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ ، أذا كانت $y = 8 \times 2^{(3x^2+4x+5)}$

الحل: لاحظ أن الأساس هنا $a = 2$

$$\frac{dy}{dx} = 8 \times 2^{(3x^2+4x+5)} \cdot (6x + 4) \cdot \ln 2$$
$$= (48x + 32) \cdot 2^{(3x^2+4x+5)} \cdot \ln 2$$