النموذج الثـالـث

أنظمة الانتظار بمراكز أداء خدمة متعددة $Multi-Channel\ Queuing$ $(M/M/C):(GD/\infty/\infty)$

إن عملية الانتظار التي تخضع لهذا النموذج يجب أن يتحقق فيها بعض الشروط وهي:

1- إن عدد الوحدات الواصلة والمغادرة في وحدة الزمن تخضع لتوزيع بواسون بمعدل (λ) وأن متوسط الوقت اللازم لخدمة وحدة واحدة أو زبون واحد هو $\left(\frac{1}{M}\right)$. أو متوسط عدد الوحدات المغادرة في وحدة الزمن (M).

2- إن الحد الأعلى من الوحدات التي تؤدي لها الخدمة في آنٍ واحد هو (C).

3- ليس هناك حدود لمدى استيعاب نظام صف الانتظار.

4- ليس هناك حدود لتجمع الوحدات.

5- إن قاعدة الخدمة عامة غير محدودة.

إن استخدام نظام الانتظار ذو مراكز الخدمة المتعددة (C) يسهم في تسريع عملية الخدمة وتقليص وقت الانتظار للوحدات مقارنةً بنظام الانتظار ذو قناة خدمة واحدة. وعلى هذا الأساس يمكن أن نُحدد النسبة الموحدة للوحدات المغادرة وحسب ما يلي:

1- إذا كان عدد الوحدات الموجودة في النظام (n) أكبر من أو يساوي عدد مراكز الخدمة $(n \geq C)$ فإن النسبة الموحدة للوحدات المغادرة للنظام هي:

$$M_n = CM \ , \quad (n \geq C)$$

2- إذا كان عدد الوحدات الموجودة في النظام (n) أقل من مراكز الخدمة $(n < C)$ فإن النسبة الموحدة للوحدات المغادرة للنظام في وحدة الزمن هي:

$$M_n = nM \ , \quad (n < C)$$

ولغرض إجراء تحليل متكامل لنماذج الانتظار من النوع $(M/M/C):(GD/\infty/\infty)$ فإننا سنشتق نموذجاً عاماً للانتظار يحتوي على مركز أداء خدمة واحد وبنسبة واصلين ومغادرين في وحدة الزمن يعتمدان على قيمة (n) وسنرمز لهما على التوالي $(\lambda_n \ , \ M_n)$ على التوالي وعليه سنرمز لهذا النظام بالرمز $(M_n/M_n/1):(GD/\infty/\infty)$ حتى نستطيع تمييزه عن النظام الأول.

$$P\left|\begin{array}{r}\text{عدم وصول أي وحدة خلال هذه الفترة } \Delta t \\ \text{ووجود } n \text{ من الوحدات في النظام}\end{array}\right| = 1 - \lambda_n\,\Delta t - 0(\Delta t)$$

$$P\left|\begin{array}{r}\text{عدم خدمة أي وحدة خلال هذه الفترة } \Delta t \\ \text{ووجود } n \text{ من الوحدات في النظام}\end{array}\right| = 1 - M_n\,\Delta t - 0(\Delta t)$$

وكما هو الحال عند النموذج الأول $(M/M/1):(GD/\infty/\infty)$ وعلى فرض حدوث حالة وصول أو مغادرة لوحدة واحدة في النظام ضمن الفترة Δt فإن معادلات النموذج العام $(M_n/M_n/1)$ نستطيع كتابتها حسب ما يلي:

$$\left.\begin{array}{l} P_n(t+\Delta t) = P_n(t)(1-\lambda_n\,\Delta t)(1-M_n\,\Delta t) + P_{n-1}(t)\lambda_{n-1}\,\Delta t * (1-M_n\,\Delta t) \\ \qquad + P_{n+1}(t)(1-\lambda_n\,\Delta t)M_{n+1}\,\Delta t + 0\,(\Delta t) \\ \\ P_\circ(t+\Delta t) = P_\circ(t)(1-\lambda_\circ\,\Delta t) + P_1(t)(1-\lambda_1\,\Delta t)M_1\,\Delta t + 0(\Delta t) \end{array}\right\} \cdots\cdots (3.1)$$

مع ملاحظة أن المعادلة رقم (3.1) مشابهة الى المعادلة رقم (4) في نظام صف الانتظار الأول $(M/M/1):(F_c\ F_s/\infty/\infty)$ سوى الاختلاف في معدل الوصول والخدمة في هذا النظام يعتمد على (n) وبالاعتماد على نفس الاسلوب السابق للنموذج $(M/M/1)$ يمكن كتابة معادلات نظام الانتظار العام $(M_n/M_n/C)$ عند حالة الاستقرار وذلك بالاعتماد على المعادلة رقم (6) عند النموذج الأول $(M/M/1)$ وكما يلي:

$$\left.\begin{aligned} P_{n+1} &= \frac{\lambda_n + M_n}{M_{n+1}} P_n - \frac{\lambda_{n-1}}{M_{n+1}} P_{n-1} \ , \qquad n \geq 1 \\ P_1 &= \frac{\lambda_\circ}{M_1} P_\circ \quad , n = 0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (3.2)$$

وبالتعويض المتعاقب بقيم $(n = 1,2,3 \cdots)$ في المعادلة رقم (3.2) سنحصل على القيم الاحتمالية لحالة الثبات وكما يلي:

عندما $(n = 1)$ فإن P_2:

$$P_2 = \frac{\lambda_1 + M_1}{M_2} P_1 - \frac{\lambda_\circ}{M_2} P_\circ \Rightarrow = \frac{\lambda_1 + M_1}{M_2} * \frac{\lambda_\circ}{M_1} P_\circ - \frac{\lambda_\circ}{M_2} P_\circ$$

$$= \frac{\lambda_\circ}{M_2} P_\circ \left[\frac{\lambda_1 + M_1}{M_2} - 1\right] \Rightarrow = \frac{\lambda_\circ}{M_2} P_\circ \left[\frac{\lambda_1}{M_1} + 1 - 1\right]$$

$$\therefore\ P_2 = \frac{\lambda_\circ\, \lambda_1}{M_1\, M_2} P_\circ$$

وعليه وبشكل عام فإن:

$$\boxed{P_n = \frac{\lambda_\circ\, \lambda_1\, \lambda_2 \cdots \lambda_{n-1}}{M_1\, M_2\, M_3 \cdots M_n} P_\circ} \ , \ n \geq 1$$

ولغرض الحصول على احتمالات الحالة الثابتة لنموذج الانتظار $(M_n/M_n/C)$ يجب أن نستخدم المؤشرات التالية وتعويضها في P_n وحسب ما يلي:

$$\lambda_n = \lambda$$

$$M_n = \begin{cases} nM & 0 \leq n < C \\ CM & n \geq C \end{cases}$$

وعليه فإن معادلات الفروق التفاضلية لنظام صف الانتظار $(M/M/C):(GD/\infty/\infty)$ هي:

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{n!\, M^n} P_\circ & , 0 \leq n < C \\[2ex] \dfrac{\lambda^n}{C!\, M^C\, C^{n-C}\, M^{n-C}} P_\circ & , n \geq C \end{cases} \quad \text{معادلات الفروق التفاضلية}$$

$$P_n = \begin{cases} \left(\dfrac{\rho^n}{n!}\right) P_\circ & , 0 \leq n < C \\[2ex] \left(\dfrac{\rho^n}{C!\, C^{n-C}}\right) P_\circ & , n \geq C \\[2ex] \dfrac{\rho}{C} = \dfrac{\lambda}{MC} < 1 & \text{حيث أن} \end{cases}$$