طريقة السمبلكس المقابلة: Dual Simplex Method

طريقة السمبلكس المقابلة تستخدم في حالة تعذر الحصول على حل أمثل لنموذج البرمجة الخطية بسبب كون قسم او كل قيم ثوابت القيود (الطرف الايمن للقيود) سالبة، وبأستخدام طريقة السمبلكس المقابلة نتفادى استخدام المتغيرات الاصطناعية في حالة القيود بهيئة متباينة أكبر أو يساوي. بالاضافة الى ذلك تستعمل لمعاجلة حالة اخرى وهي امكانية الحصول على قيمة سالبة للطرف الايمن في احد مراحل الطريقة المبسطة.

تتلخص طريقة السمبلكس المقابلة بالخطوات الاتية:

1- تعالج القيود التي بهيئة أكبر او تساوي بضرب طرفيها بـ (1-) ، لتحول الى متباينات أقل أو تساوي.

2- تضاف المتغيرات المكملة لقيود النموذج ليتم تحويل النموذج الى الصيغة القياسية.

3- نستخرج اول حل اساسي والذي يكون حل غير ممكن لأن قيم المتغيرات الاساسية له تكون سالبة.

4- نعمل اول جدول مبسط كما تم توضيحه في الطريقة المبسطة الاعتيادية.

5- يتم أولا تحديد المتغير الخارج وذلك باختيار المتغير الاساسي ذو أقل قيمة (أكبر كمية سالبة)، صف المتغير الخارج هو الصف المحوري.

6- يحدد المتغير الداخل من المتغيرات غير الاساسية وذلك بحساب النسب الناتجة من قسمة معاملات الصف $Z_j - C_j$ على القيم المناظرة لها في الصف المحوري مع اهمال القسمة على صفر او القيمة الموجبة في حالة تصغير دالة الهدف، والمتغير الداخل هو الذي له أقل نسبة موجبة من تلك النسب، أما في حالة التعظيم فالمتغير الداخل هو الذي يقابل النسبة ذات القيمة المطلقة الاقل مع اهمال القسمة على قيمة موجبة او الصفر. عمود المتغير الداخل هو العمود المحوري وتقاطعه مع الصف المحوري يمثل العنصر المحوري.

7- يتم تكوين جدول مبسط جديد باتباع نفس العمليات المحورية التي تم توضيحها في الطريقة المبسطة الاعتيادية ونتوقف لحين الحصول على حل اساسي ممكن أمثل.

مثال(4):

أوجد الحل الامثل لنموذج البرمجة الخطية الاتي:

$$\begin{aligned}
&\text{Min. } Z = 2X_1 + X_2 \\
&\text{S.T.} \\
&3X_1 + X_2 \geq 3 \\
&4X_1 + 3X_2 \geq 6 \\
&X_1 + 2X_2 \leq 3 \\
&X_1 ,\ X_2 \geq 0
\end{aligned}$$

الحل: اول خطوة نحول القيدين الاول والثاني الى اقل او يساوي بضرب طرفي كل منهما بـ (1-)

$$\begin{aligned}
&\text{Min. } Z = 2X_1 + X_2 \\
&\text{S.T.} \\
&-3X_1 - X_2 \leq -3 \\
&-4X_1 - 3X_2 \leq -6 \\
&X_1 + 2X_2 \leq 3 \\
&X_1 ,\ X_2 \geq 0
\end{aligned}$$

نحول النموذج الى الصيغة القياسية:

$$\begin{aligned}
&\text{Min. } Z = 2X_1 + X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 \\
&\text{S.T.} \\
&-3X_1 - X_2 + S_1 = -3 \\
&-4X_1 - 3X_2 + S_2 = -6 \\
&X_1 + 2X_2 + S_3 = 3 \\
&X_1 ,\ X_2 , S_1 , S_2 , S_3 \geq 0
\end{aligned}$$

اول حل اساسي هو :

$$Z = 0 ,\quad X_1 = X_2 = 0 ,\ S_1 = -3 ,\ S_2 = -6 ,\ S_3 = 3$$

وهذا الحل غير مقبول

نعمل جدول المبسط الاول:

C_B	Basic variable (B.V) \ C_j	2	1	0	0	0	b R.H.S
		X_1	X_2 ↓	S_1	S_2	S_3	
0	S_1	-3	-1	1	0	0	-3
0	← S_2	-4	-3	0	1	0	-6
0	S_3	1	2	0	0	1	3
$Z_j - C_j$		-2	-1	0	0	0	Z= 0

نلاحظ ان هذا الحل الاساسي غير مقبول لان قيم المتغيرات المكملة سالبة، بالرغم من ان شرط أمثلية الحل متحقق (معاملات الصف $Z_j - C_j$ اقل او تساوي صفر).

نحدد أولا المتغير الخارج من بين المتغيرات الاساسية وهو المتغير S_2 اذ له اقل قيمة (6-) وصفه يعتبر الصف المحوري.

نستخرج النسب $(R_1 = -2/-4 = 1/2)$ و $(R_2 = -1/-3 = 1/3)$ أما البقية فتهمل لان المقام اما صفر او موجب (دالة الهدف تصغير)، اقل النسبتين هي R_2 لذا المتغير غير الاساسي الداخل هو X_2 .

نعمل جدول مبسط ثاني باجراء العمليات المحورية كما في الطريقة المبسطة الاعتيادية:

C_B	Basic variable (B.V) \ C_j	2	1	0	0	0	b R.H.S
		X_1 ↓	X_2	S_1	S_2	S_3	
0	← S_1	-5/3	0	1	-1/3	0	-1
1	X_2	4/3	1	0	-1/3	0	2
0	S_3	-5/3	0	0	2/3	1	-1
$Z_j - C_j$		-2/3	0	0	-1/3	0	Z= 2

الحل الاساسي الثاني هو ايضا أمثل ولكنه غير مقبول لذا نستمر ونكون حل اساسي جديد.

لدينا متغيرين اساسيين لهما قيمة سالبة وهي نفس القيمة لذا يمكن اختيار احدهما كمتغير خارج، لنختار S_1 كمتغير خارج (لاحظ ستكون قيمة المتغير S_3 في الحل الثالث تساوي الصفر ، وأذا تم اختيار S_3 كمتغير خارج ستكون قيمة المتغير S_1 في الحل الثالث تساوي الصفر).

الصف الاول هو الصف المحوري ، نحسب النسب $(R_1 = 2/5)$ و $(R_4 = 1)$ والبقية تهمل، لذا المتغير غير الاساسي X_1 هو المتغير الداخل.وجدول الحل الثالث يكون كالاتي :

C_B	Basic variable (B.V) \ C_j	2	1	0	0	0	b R.H.S
		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	
0	X_1	1	0	-3/5	1/5	0	3/5
1	X_2	0	1	4/5	-3/5	0	6/5
2	S_3	0	0	-1	1	1	0
$Z_j - C_j$		0	0	-2/5	-1/5	0	Z= 12/5

الحل الاخير الاساسي الاخير يمثل حل امثل مقبول :

$X_1 = 3/5 \quad X_2 = 6/5 \qquad Min.\ Z = 12/5$

مثال(5):

أوجد الحل الامثل لنموذج البرمجة الخطية الاتي:

$$\begin{aligned}
&\text{Min. } Z = 2X_1 + X_2\\
&\text{S.T.}\\
&3X_1 + X_2 \geq 3\\
&4X_1 + 3X_2 \geq 6\\
&X_1 + 3X_2 \leq 3\\
&X_1 , X_2 \geq 0
\end{aligned}$$

الحل: اول خطوة نحول القيدين الاول والثاني الى اقل او يساوي بضرب طرفي كل منهما بـ (1-)

$$\begin{aligned}
&\text{Min. } Z = 2X_1 + X_2\\
&\text{S.T.}\\
&-3X_1 - X_2 \leq -3\\
&-4X_1 - 3X_2 \leq -6\\
&X_1 + 3X_2 \leq 3\\
&X_1 , X_2 \geq 0
\end{aligned}$$

نحول النموذج الى الصيغة القياسية:

$$\begin{aligned}
&\text{Min. } Z = 2X_1 + X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3\\
&\text{S.T.}\\
&-3X_1 - X_2 + S_1 = -3\\
&-4X_1 - 3X_2 + S_2 = -6\\
&X_1 + 3X_2 + S_3 = 3\\
&X_1 , X_2 , S_1 , S_2 , S_3 \geq 0
\end{aligned}$$

اول حل اساسي هو :

$$Z = 0 , \quad X_1 = X_2 = 0 \;, S_1 = -3 \;, S_2 = -6 \;, S_3 = 3$$

وهذا الحل غير مقبول

نعمل جدول المبسط الاول:

C_B	Basic variable (B.V) \ C_j	2	1	0	0	0	b R.H.S
		X_1	X_2 ↓	S_1	S_2	S_3	
0	S_1	-3	-1	1	0	0	-3
0	← S_2	-4	-3	0	1	0	-6
0	S_3	1	3	0	0	1	3
$Z_j - C_j$		-2	-1	0	0	0	Z= 0