6- مبدلة مصفوفة معاملات المتغيرات لقيود النموذج الاولي تصبح مصفوفة معاملات المتغيرات لقيود النموذج المقابل. أي معاملات العمود j في قيود النموذج الاولي تصبح معاملات الصف j في قيود النموذج الاولي.

لنفرض لدينا النموذج الاولي بثلاث متغيرات هو

$$\begin{aligned}
&\text{Min. } Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3 \\
&\text{S.T.} \\
&a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 \le b_1 \\
&a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + a_{23} X_3 \ge b_2 \\
&a_{31} X_1 + a_{32} X_2 + a_{33} X_n = b_3 \\
&X_1 , X_2 , X_3 \ge 0
\end{aligned}$$

اول خطوة نعيد كتابة القيد الثالث بدلالة قيدين وكالاتي

$$\begin{aligned}
&\text{Min. } Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3 \\
&\text{S.T.} \\
&a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 \le b_1 \\
&a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + a_{23} X_3 \ge b_2 \\
&a_{31} X_1 + a_{32} X_2 + a_{33} X_n \le b_3 \\
&a_{31} X_1 + a_{32} X_2 + a_{33} X_n \ge b_3 \\
&X_1 , X_2 , X_3 \ge 0
\end{aligned}$$

بعدها توحد اتجاهات القيود بظرب طرفي القيدين الثاني والرابع بـ (1-) لتصبح القيود كالاتي :

$$\begin{aligned}
&\text{Min. } Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3 \\
&\text{S.T.} \\
&a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 \le b_1 \\
&- a_{21} X_1 - a_{22} X_2 - a_{23} X_3 \le - b_2 \\
&a_{31} X_1 + a_{32} X_2 + a_{32} X_n \le b_3 \\
&- a_{31} X_1 - a_{32} X_2 - a_{32} X_n \le - b_3 \\
&X_1 , X_2 , X_3 \ge 0
\end{aligned}$$

نفرض متغيرات النموذج المقابل (عددها 4) هي Y_1 , Y_2 , Y_3 , Y_4

النموذج المقابل يكون كالاتي:

$$\begin{aligned}
&\text{Max. } W = b_1 Y_1 - b_2 Y_2 + b_3 Y_3 - b_3 Y_4 \\
&\text{S.T.} \\
&a_{11} Y_1 - a_{21} Y_2 + a_{31} Y_3 - a_{31} Y_4 \ge C_1 \\
&a_{12} Y_1 - a_{22} Y_2 + a_{32} Y_3 - a_{32} Y_4 \ge C_2 \\
&a_{13} Y_1 - a_{23} Y_2 + a_{33} Y_3 - a_{33} Y_4 \ge C_1 \\
&Y_1 , Y_2 , Y_3 , Y_4 \ge 0
\end{aligned}$$

مثال(1): حول نموذج البرمجة الخطية الاولي التالي الى النموذج المقابل:

$$\text{Min. } Z = 16X_1 + 25X_2$$

S.T.

$$X_1 + 7X_2 \geq 4$$
$$X_1 + 5X_2 \geq 5$$
$$2X_1 + 3X_2 \geq 9$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

الحل:

عدد قيود النموذج الاولي تساوي 3 ، لذا نفرض ثلاث متغيرات للنموذج المقابل (Y_1 , Y_2 , Y_3)

$$\text{Max. } W = 4Y_1 + 5Y_2 + 9Y_3$$

S.T.

$$Y_1 + Y_2 + 2Y_3 \leq 16$$
$$7Y_1 + 5Y_2 + 3Y_3 \leq 25$$
$$Y_1 , Y_2 , Y_3 \geq 0$$

مثال(2): حول نموذج البرمجة الخطية الاولي التالي الى النموذج المقابل:

$$\text{Max. } Z = X_1 + X_2 - X_3 - X_4$$

S.T.

$$3X_1 - 2X_2 + X_3 + 5X_4 \leq 18$$
$$5X_1 + 6X_3 \leq 20$$
$$X_1 - X_2 + 4X_3 + X_4 \geq 9$$
$$X_1 , X_2 , X_3 , X_4 \geq 0$$

الحل:

يتم اولا توحيد القيود بحيث تكون جميعها باتجاه واحد، يمكن ضرب القيد الثالث بـ (-1) لتصبح قيود النموذج كالاتي :

$$3X_1 - 2X_2 + X_3 + 5X_4 \leq 18$$
$$5X_1 + 6X_3 \leq 20$$
$$-X_1 + X_2 - 4X_3 - X_4 \leq -9$$
$$X_1 , X_2 , X_3 , X_4 \geq 0$$

عدد قيود النموذج الاولي تساوي 3 ، لذا نفرض ثلاث متغيرات للنموذج المقابل (Y_1 , Y_2 , Y_3)

$$\text{Min. } W = 18Y_1 + 20Y_2 - 9Y_3$$

S.T.

$$3Y_1 + 5Y_2 - Y_3 \geq 1$$
$$-2Y_1 + Y_3 \geq 1$$
$$Y_1 + 6Y_2 - 4Y_3 \geq -1$$
$$5Y_1 - Y_3 \geq -1$$
$$Y_1 , Y_2 , Y_3 \geq 0$$

مثال(3): حول نموذج البرمجة الخطية الاولي التالي الى النموذج المقابل:

$$\text{Max. } Z = 2X_1 + X_2 + X_3$$

S.T.

$$X_1 + X_2 + X_3 \geq 6$$
$$3X_1 - 2X_2 + 3X_3 = 3$$
$$-4X_1 + 3X_2 - 6X_3 = 1$$
$$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$$

الحل:

القيدين الثاني والثالث يتم كتابة كل منهما بدلالة قيدين وكالاتي:

$$X_1 + X_2 + X_3 \geq 6$$
$$3X_1 - 2X_2 + 3X_3 \geq 3$$
$$3X_1 - 2X_2 + 3X_3 \leq 3$$
$$-4X_1 + 3X_2 - 6X_3 \geq 1$$
$$-4X_1 + 3X_2 - 6X_3 \leq 1$$
$$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$$

توحد القيود كالاتي :

$$-X_1 - X_2 - X_3 \leq -6$$
$$-3X_1 + 2X_2 - 3X_3 \leq -3$$
$$3X_1 - 2X_2 + 3X_3 \leq 3$$
$$4X_1 - 3X_2 + 6X_3 \leq -1$$
$$-4X_1 + 3X_2 - 6X_3 \leq 1$$
$$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$$

اصبح لدينا خمسة قيود لذا نفرض خمسة متغيرات للنموذج المقابل ($Y_1 , Y_2 , Y_3 , Y_4 , Y_5$)

$$\text{Min. } W = -6Y_1 - 3Y_2 + 3Y_3 - Y_4 + Y_5$$

S.T.

$$-Y_1 - 3Y_2 + 3Y_3 + 4Y_4 - 4Y_5 \geq 2$$
$$-Y_1 + 2Y_2 - 2Y_3 - 3Y_4 + 3Y_5 \geq 1$$
$$-Y_1 - 3Y_2 + 3Y_3 + 6Y_4 - 6Y_5 \geq 1$$
$$Y_1 , Y_2 , Y_3 , Y_4 , Y_5 \geq 0$$

طريقة السمبلكس المقابلة: Dual Simples Method

طريقة السمبلكس المقابلة تستخدم في حالة تعذر الحصول على حل أمثل لنموذج البرمجة الخطية بسبب كون قسم او كل قيم ثوابت القيود (الطرف الايمن للقيود) سالبة، وبأستخدام طريقة السمبلكس المقابلة نتفادى استخدام المتغيرات الاصطناعية في حالة القيود بهيئة متباينة أكبر أو يساوي. بالاضافة الى ذلك تستعمل لمعاجلة حالة اخرى وهي امكانية الحصول على قيمة سالبة للطرف الايمن في احد مراحل الطريقة المبسطة.

تتلخص طريقة السمبلكس المقابلة بالخطوات الاتية:

1- تعالج القيود التي بهيئة أكبر او تساوي بضرب طرفيها بـ (1-) ، لتحول الى متباينات أقل أو تساوي.

2- تضاف المتغيرات المكملة لقيود النموذج ليتم تحويل النموذج الى الصيغة القياسية.

3- نستخرج اول حل اساسي والذي يكون حل غير ممكن لأن قيم المتغيرات الاساسية له تكون سالبة.

4- نعمل اول جدول مبسط كما تم توضيحه في الطريقة المبسطة الاعتيادية.

5- يتم أولا تحديد المتغير الخارج وذلك باختيار المتغير الاساسي ذو أقل قيمة (أكبر كمية سالبة)، صف المتغير الخارج هو الصف المحوري.

6- يحدد المتغير الداخل من المتغيرات غير الاساسية وذلك بحساب النسب الناتجة من قسمة معاملات الصف $Z_j - C_j$ على القيم المناظرة لها في الصف المحوري مع اهمال القسمة على صفر او القيمة الموجبة في حالة تصغير دالة الهدف، والمتغير الداخل هو الذي له أقل نسبة موجبة من تلك النسب، أما في حالة التعظيم فالمتغير الداخل هو الذي يقابل النسبة ذات القيمة المطلقة الاقل مع اهمال القسمة على قيمة موجبة او الصفر. عمود المتغير الداخل هو العمود المحوري وتقاطعه مع الصف المحوري يمثل العنصر المحوري.

7- يتم تكوين جدول مبسط جديد باتباع نفس العمليات المحورية التي تم توضيحها في الطريقة المبسطة الاعتيادية ونتوقف لحين الحصول على حل اساسي ممكن أمثل.

مثال(4):

أوجد الحل الامثل لنموذج البرمجة الخطية الاتي:

$$\text{Min. } Z = 2X_1 + X_2$$

S.T.

$$3X_1 + X_2 \geq 3$$
$$4X_1 + 3X_2 \geq 6$$
$$X_1 + 2X_2 \leq 3$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

الحل: اول خطوة نحول القيدين الاول والثاني الى اقل او يساوي بضرب طرفي كل منهما بـ (1-)

$$\begin{aligned}
&\text{Min. } Z = 2X_1 + X_2\\
&\text{S.T.}\\
&-3X_1 - X_2 \le -3\\
&-4X_1 - 3X_2 \le -6\\
&X_1 + 2X_2 \le 3\\
&X_1,\ X_2 \ge 0
\end{aligned}$$

نحول النموذج الى الصيغة القياسية:

$$\begin{aligned}
&\text{Min. } Z = 2X_1 + X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3\\
&\text{S.T.}\\
&-3X_1 - X_2 + S_1 = -3\\
&-4X_1 - 3X_2 + S_2 = -6\\
&X_1 + 2X_2 + S_3 = 3\\
&X_1,\ X_2, S_1, S_2, S_3 \ge 0
\end{aligned}$$

اول حل اساسي هو :

$$Z = 0\ ,\quad X_1 = X_2 = 0\ ,\ S_1 = -3\ ,\ S_2 = -6\ ,\ S_3 = 3$$

وهذا الحل غير مقبول

نعمل جدول المبسط الاول:

C_B	Basic variable (B.V) \ C_j	2	1 ↓	0	0	0	b R.H.S
		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	
0	S_1	-3	-1	1	0	0	-3
0	← S_2	-4	-3	0	1	0	-6
0	S_3	1	2	0	0	1	3
$Z_j - C_j$		-2	-1	0	0	0	Z= 0

نلاحظ ان هذا الحل الاساسي غير مقبول لان قيم المتغيرات المكملة سالبة، بالرغم من ان شرط أمثلية الحل متحقق (معاملات الصف $Z_j - C_j$ اقل او تساوي صفر).

نحدد أولا المتغير الخارج من بين المتغيرات الاساسية وهو المتغير S_2 اذ له اقل قيمة (6-) وصفه يعتبر الصف المحوري.

نستخرج النسب $(R_1 = -2/-4 = 1/2)$ و $(R_2 = -1/-3 = 1/3)$ أما البقية فتهمل لان المقام اما صفر او موجب (دالة الهدف تصغير)، اقل النسبتين هي R_2 لذا المتغير غير الاساسي الداخل هو X_2 .

نعمل جدول مبسط ثاني باجراء العمليات المحورية كما في الطريقة المبسطة الاعتيادية:

C_B	Basic variable (B.V) \ C_j	2	1	0	0	0	b R.H.S
		X_1 ↓	X_2	S_1	S_2	S_3	
0	← S_1	-5/3	0	1	-1/3	0	-1
1	X_2	4/3	1	0	-1/3	0	2
0	S_3	-5/3	0	0	2/3	1	-1
$Z_j - C_j$		-2/3	0	0	-1/3	0	Z= 2

الحل الاساسي الثاني هو ايضا أمثل ولكنه غير مقبول لذا نستمر ونكون حل اساسي جديد.

لدينا متغيرين اساسيين لهما قيمة سالبة وهي نفس القيمة لذا يمكن اختيار احدهما كمتغير خارج، لنختار S_1 كمتغير خارج (لاحظ ستكون قيمة المتغير S_3 في الحل الثالث تساوي الصفر ، وأذا تم اختيار S_3 كمتغير خارج ستكون قيمة المتغير S_1 في الحل الثالث تساوي الصفر).

الصف الاول هو الصف المحوري ، نحسب النسب $(R_1 = 2/5)$ و $(R_4 = 1)$ والبقية تهمل، لذا المتغير غير الاساسي X_1 هو المتغير الداخل.وجدول الحل الثالث يكون كالاتي :

C_B	Basic variable (B.V) \ C_j	2	1	0	0	0	b R.H.S
		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	
0	X_1	1	0	-3/5	1/5	0	3/5
1	X_2	0	1	4/5	-3/5	0	6/5
2	S_3	0	0	-1	1	1	0
$Z_j - C_j$		0	0	-2/5	-1/5	0	Z= 12/5

الحل الاخير الاساسي الاخير يمثل حل امثل مقبول :

$$X_1 = 3/5 \qquad X_2 = 6/5 \qquad Min.\ Z = 12/5$$

مثال(5):

أوجد الحل الامثل لنموذج البرمجة الخطية الاتي:

$$\begin{aligned}
&\text{Min. } Z = 2X_1 + X_2\\
&\text{S.T.}\\
&3X_1 + X_2 \geq 3\\
&4X_1 + 3X_2 \geq 6\\
&X_1 + 3X_2 \leq 3\\
&X_1\ ,\ X_2 \geq 0
\end{aligned}$$

الحل: اول خطوة نحول القيدين الاول والثاني الى اقل او يساوي بضرب طرفي كل منهما بـ (1-)

$$\begin{aligned}
&\text{Min. } Z = 2X_1 + X_2\\
&\text{S.T.}\\
&-3X_1 - X_2 \leq -3\\
&-4X_1 - 3X_2 \leq -6\\
&X_1 + 3X_2 \leq 3\\
&X_1\ ,\ X_2 \geq 0
\end{aligned}$$

نحول النموذج الى الصيغة القياسية:

$$\begin{aligned}
&\text{Min. } Z = 2X_1 + X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3\\
&\text{S.T.}\\
&-3X_1 - X_2 + S_1 = -3\\
&-4X_1 - 3X_2 + S_2 = -6\\
&X_1 + 3X_2 + S_3 = 3\\
&X_1\ ,\ X_2 , S_1 , S_2 , S_3 \geq 0
\end{aligned}$$

اول حل اساسي هو :

$$Z = 0\ ,\quad X_1 = X_2 = 0\ ,\ S_1 = -3\ ,\ S_2 = -6\ ,\ S_3 = 3$$

وهذا الحل غير مقبول

نعمل جدول المبسط الاول:

C_B	Basic variable (B.V) \ C_j	2	1 ↓	0	0	0	b R.H.S
		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	
0	S_1	-3	-1	1	0	0	-3
0	← S_2	-4	-3	0	1	0	-6
0	S_3	1	3	0	0	1	3
$Z_j - C_j$		-2	-1	0	0	0	Z= 0

نلاحظ ان هذا الحل الاساسي غير مقبول لان قيم المتغيرات المكملة سالبة، بالرغم من ان شرط أمثلية الحل متحقق (معاملات الصف $Z_j - C_j$ اقل او تساوي صفر).

نحدد أولا المتغير الخارج من بين المتغيرات الاساسية وهو المتغير S_2 اذ له اقل قيمة (-6) وصفه يعتبر الصف المحوري.

نستخرج النسب ($R_1 = -2/-4 = 1/2$) و ($R_2 = -1/-3 = 1/3$) أما البقية فتهمل لان المقام اما صفر او موجب (دالة الهدف تصغير)، اقل النسبتين هي R_2 لذا المتغير غير الاساسي الداخل هو X_2 .

نعمل جدول مبسط ثاني باجراء العمليات المحورية كما في الطريقة المبسطة الاعتيادية:

C_B	C_j / Basic variable (B.V)	2	1	0	0	0	b R.H.S
		X_1 ↓	X_2	S_1	S_2	S_3	
0	S_1	-5/3	0	1	-1/3	0	-1
1	X_2	4/3	1	0	-1/3	0	2
0	← S_3	-3	0	0	1	1	-3
$Z_j - C_j$		-2/3	0	0	-1/3	0	Z= 2

الحل الاساسي الثاني هو ايضا أمثل ولكنه غير مقبول لذا نستمر ونكون حل اساسي جديد.

لدينا متغيرين اساسيين لهما قيمة سالبة هما S_1 وS_3، نختار S_3 كمتغير خارج (لان له اقيل قيمة) الصف الثالث هو الصف المحوري ، نحسب النسب ($R_1 = 2/9$) و والبقية تهمل، لذا المتغير غير الاساسي X_1 هو المتغير الداخل.وجدول الحل الثالث يكون كالاتي :

C_B	C_j / Basic variable (B.V)	2	1	0	0	0	b R.H.S
		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	
0	S_1	0	0	1	-8/9	-5/9	2/3
1	X_2	0	1	0	1/5	4/9	2/3
2	X_1	1	0	0	-1/3	-1/3	1
$Z_j - C_j$		0	0	0	-5/9	-2/9	Z= 8/3

الحل الاخير الاساسي الاخير يمثل حل امثل مقبول :

$X_1 = 1 \quad X_2 = 2/3 \quad Min.\ Z = 8/3$