مثال: أذا كان $f(x) = x^2\ ,\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$ و $g(x) = 2\,x + 3\ ,\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$ فأن:

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(x^2) = 2\,x^2 + 3$$

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(2\,x + 3) = (2\,x + 3)^2$$

مثال: أذا كان $f(x) = 2\,x\ ,\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$ و $g(x) = \sqrt{x - 2}\ ,\ \ \forall\, x \in [2, \infty)$ فأن:

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(2\,x) = \sqrt{(2x) - 2} = \sqrt{2x - 2}$$

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f\big(\sqrt{x - 2}\big) = 2\big(\sqrt{x - 2}\big) = 2\sqrt{x - 2}$$

مثال: أذا كان $f(x) = 2x + 1\ ,\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$ و $g(x) = 3\,x\ ,\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$ فأن:

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(2x + 1) = 3(2x + 1) = 6x + 3$$

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(3x) = 2(3x) + 1 = 6x + 1$$

مثال: أذا كان $f(x) = 3x - 4\ ,\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$ و $g(x) = x^2 + 6\ ,\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$ فأن:

$$(g \circ f)(x) = 9x^2 - 24x + 22$$

$$(f \circ g)(x) = 3x^2 + 14$$

واضح أن $g \circ f \neq f \circ g$.

مثال: لتكن $f(x) = \frac{1}{2-x}$ حيث أن $x \in \mathbb{R} - \{2\}$. أحسب $(f \circ f)(3)$

الحل: نحسب

$$(f \circ f)(x) = f\big(f(x)\big) = f\left(\frac{1}{2 - x}\right) = \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - x}}$$

ولأيجاد $(f \circ f)(3)$ نعوض عن كل x بـــ 3 في الدالة الناتجة، أي أن

$$(f \circ f)(3) = \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - 3}} = \frac{1}{2 - \frac{1}{-1}} = \frac{1}{2 + 1} = \frac{1}{3}$$

مثال: لتكن $f(x) = 2x + 1$ و $g(x) = \frac{x+3}{2}$. أحسب $(g \circ f)(5)\ ,\ (f \circ g)(5)$

الحل:

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f\left(\frac{x + 3}{2}\right) = 2\left(\frac{x + 3}{2}\right) + 1 = x + 4$$

أذاً

$$(f \circ g)(5) = 5 + 4 = 9$$

ولايجاد $(g \circ f)(5)$

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(2x + 1) = \frac{2x + 1 + 3}{2} = \frac{2x + 4}{2} = x + 2$$

أذاً

$$(g \circ f)(5) = 5 + 2 = 7$$

مبرهنة:

- أذا كان كل من f و g دالة متباينة فأن $g \circ f$ دالة متباينة أيضاً.
- أذا كان كل من f و g دالة شاملة فأن $g \circ f$ دالة شاملة أيضاً.
- أذا كان كل من f و g دالة متقابلة فأن $g \circ f$ دالة متقابلة أيضاً.

ملاحظة:

- مجال الدالة $g \circ f$ هو المجموعة الناتجة من تقاطع مجال الدالة f مع مجال الدالة الناتجة من التركيب.
- مجال الدالة $f \circ g$ هو المجموعة الناتجة من تقاطع مجال الدالة g مع مجال الدالة الناتجة من التركيب.

مثال: أذا كانت $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = 3x - 1$ فجد كل مما يأتي:

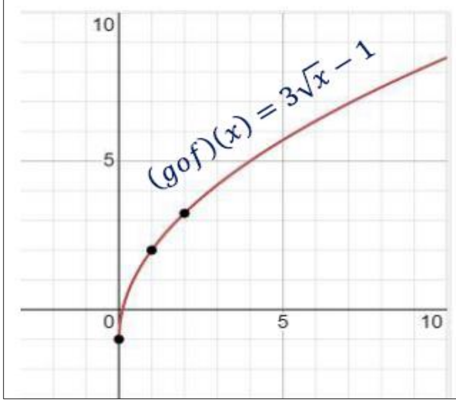
$$g \circ f \quad , \quad f \circ g \quad , \quad D_{g \circ f} \quad , \quad D_{f \circ g}$$

الحل:

$$(g \circ f)_{(x)} = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = 3\sqrt{x} - 1$$

مجال الدالة الناتجة من التركيب: $D = [0, \infty)$ ومجال الدالة f هو أيضاً $D_f = [0, \infty)$ ، وبذلك يكون

$$D_{g \circ f} = D_f \cap D = \{x : x \in \mathbb{R}, 0 \le x < \infty\} = [0, \infty).$$



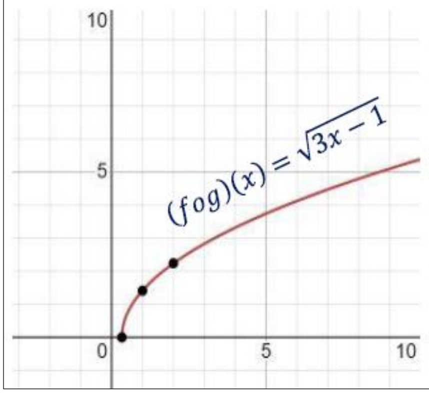
x	y
0	−1
1	2
2	3.24

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x - 1) = \sqrt{3x - 1}$$

لأيجاد المجال نضع $3x - 1 \ge 0 \Rightarrow 3x \ge 1 \Rightarrow x \ge \frac{1}{3}$

أذاً مجال الدالة الناتجة من التركيب يكون $D = \left\{x \in \mathbb{R}, \frac{1}{3} \le x < \infty\right\} = [\frac{1}{3}, \infty)$

بما أن مجال الدالة g هو $D_g = \mathbb{R}$ ، وعليه فأن $D_{f \circ g} = D_g \cap D = \mathbb{R} \cap [\frac{1}{3}, \infty) = [\frac{1}{3}, \infty)$



x	y
0.333	0
1	1.41
2	2.24

مثال: أذا كانت $f(x) = \frac{5}{x-1}$ و $g(x) = \frac{4}{3x-2}$ ، فجد كل مما يأتي:

$g \circ f \quad , \quad f \circ g \quad , \quad D_{g \circ f} \quad , \quad D_{f \circ g}$

الحل: لايجاد $f \circ g$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{4}{3x-2}\right) = \frac{5}{\frac{4}{3x-2} - 1} = \frac{5(3x-2)}{4 - 1(3x-2)}$$

$$= \frac{5(3x-2)}{4 - 3x + 2} = \frac{5(3x-2)}{6 - 3x}$$

لأيجاد مجال الدالة الناتجة نضع: $6 - 3x = 0 \Longrightarrow x = 2$

$$\Longrightarrow D = \{x \in \mathbb{R}: x \neq 2\} = (-\infty, 2) \cup (2, \infty).$$

أما مجال الدالة g هو: $D_g = \left\{x \in \mathbb{R}: x \neq \frac{2}{3}\right\} = (-\infty, \frac{2}{3}) \cup (\frac{2}{3}, \infty)$

وبذلك يكون:

$D_{f \circ g} = D \cap D_g = \left\{x \in \mathbb{R}: x \neq \frac{2}{3}, x \neq 2\right\}$ **or** $D_{f \circ g} = \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{2}{3}, 2\right\}$ **or** $D_{f \circ g} = \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}, 2\right\}$

or $D_{f \circ g} = (-\infty, \frac{2}{3}) \cup (\frac{2}{3}, 2) \cup (2, \infty)$

أيجاد $g \circ f$, $D_{g \circ f}$ يترك تمرين (واجب).

مثال: أذا كانت $f(x) = \sqrt{x+2}$ و $g(x) = \sqrt{3-x}$ ، فأن:

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{\sqrt{3-x} + 2} \quad , \quad D_{f \circ g} = (-\infty, 3].$$

الدالة العكسية Inverse Function

اذا كانت $f: A \rightarrow B$ دالة فأن العلاقة العكسية $f^{-1}: B \rightarrow A$ قد تحقق شروط الدالة أو لا تحققها. كذلك أذا كانت $f^{-1}: C \rightarrow D$ دالة فليس من الضروري أن تكون $f: D \rightarrow C$ دالة.

مثال: لتكن $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{4, 5\}$ ولتكن $f: A \rightarrow B$ علاقة بحيث أن

$$f = \{(1,4), (2,4), (3,5)\}$$

واضح أن العلاقة f تمثل دالة. ولكن العلاقة العكسية $f^{-1}: B \rightarrow A$ حيث أن

$$f^{-1} = \{(4,1), (4,2), (5,3)\}$$

ليست دالة.

مثال: لتكن $A = \{1\}$ و $B = \{2,3\}$ ولتكن $f: A \rightarrow B$ علاقة بحيث أن

$$f = \{(1,2), (1,3)\}$$

واضح أن العلاقة f لا تمثل دالة.

ولكن العلاقة العكسية $f^{-1}: B \rightarrow A$ حيث أن

$$f^{-1} = \{(2,1), (3,1)\}$$

تمثل دالة.

تعريف:

يقال أن الدالة $f: \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ لها معكوس اذا كانت العلاقة $f^{-1}: \mathrm{B} \to \mathrm{A}$ دالة، وتسمى العلاقة f^{-1} بالدالة العكسية للدالة f .

مبرهنة: أذا كانت $f: \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ دالة متقابلة، فأن f^{-1} دالة متقابلة من B الى A .

من المبرهنة يتضح أنه حتى يكون للدالة معكوس فيجب أن تكون هذه الدالة متقابلة.

ملاحظة: أذا كان $\mathrm{y} = f(x)$ ، فأن:

- $x = f^{-1}(\mathrm{y})$
- $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = x$

طريقة أيجاد معكوس الدالة نوضحها بالامثلة الاتية

مثال: جد الدالة العكسية للدالة $f(x) = 3x + 1$.

الحل:

الخطوة الأولى: ضع y بدلاً من $f(x)$ ، أي أن $\mathrm{y} = 3x + 1$

الخطوة الثانية: أوجد x بدلالة y ، أي أن $x = \frac{\mathrm{y}-1}{3}$

الخطوة الثالثة: ضع $f^{-1}(\mathrm{y}) = \frac{\mathrm{y}-1}{3}$

الخطوة الرابعة: أستبدل كل y بـــ x لتحصل على الدالة العكسية، أي أن $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}$

للتحقق من الحل، أوجد $f \circ f^{-1}$ و $f^{-1} \circ f$ ، كلاهما يجب أن يساوي الدالة الذاتية.

مثال: جد الدالة العكسية للدالة $f(x) = \sqrt{2x-3}$.

الحل: التعويض عن $f(x)$ بالمتغير y يعطينا $\mathrm{y} = \sqrt{2x-3}$.

وبالتربيع، نجد أن $\mathrm{y}^2 = 2x - 3$. لأيجاد x بدلالة y نجد أن

$$2x = \mathrm{y}^2 + 3 \Longrightarrow x = \frac{\mathrm{y}^2 + 3}{2}$$

والان نضع $f^{-1}(\mathrm{y}) = \frac{\mathrm{y}^2+3}{2}$

وبأستبدال كل y بـــ x نحصل على الدالة العكسية

$$f^{-1}(x) = \frac{x^2+3}{2}$$

للتحقق من الحل:

$$(f^{-1} \circ f)_x = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\sqrt{2x-3}\right) = \frac{\left(\sqrt{2x-3}\right)^2 + 3}{2} = x$$

كذلك لاحظ أن:

$$(f \circ f^{-1})_x = f(f^{-1}(x)) = \sqrt{2\left(\frac{x^2+3}{2}\right) - 3} = \sqrt{x^2} = x$$

مثال: لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ حيث $f(x)=x^3$ لكل $x\in\mathbb{R}$. بما أن f دالة متقابلة، فالدالة العكسية f^{-1} لها موجودة وأنها متقابلة، ومعرفة كالاتي: $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ، حيث $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$ لكل $x\in\mathbb{R}$

الواجب: أوجد معكوس كل دالة مما يأتي، ثم مثل الدالة ومعكوسها بيانياً على مستوى أحداثي واحد.

$$f(x)=\frac{3x-1}{x+2}\ ,\quad f(x)=\frac{x+6}{5}\ ,\quad f(x)=\frac{x+5}{-3}\ ,$$

$$f(x)=\frac{1}{2}x+3\ ,\quad f(x)=\frac{4x+1}{5}\ ,\quad f(x)=x+2\ ,$$

$$f(x)=-2x+1\ ,\quad f(x)=5x$$

الغايات للدوال

مثال: لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالة، بحيث أن لكل $x\in\mathbb{R}$

$$f(x)=x^2-1$$

ماذا يحدث لقيمة الدالة $f(x)$ عندما نعطي لـــ x قيماً قريبة جداً الى العدد 2 من الجهتين، أي أعطاء قيم لـــ x أقل بقليل من العدد 2 وأكثر بقليل من العدد 2 . لأجل ذلك نكون الجدول الاتي:

x	1.7	1.9	1.99	1.999	1.9999	2.3	2.1	2.05	2.001	2.0001
$f(x)$	1.89	2.61	2.96	2.996	2.9996	4.29	3.41	3.203	3.004	3.0004

نلاحظ ان قيمة الدالة f تقترب جداً الى العدد 3 كلما أقتربت قيمة x من العدد 2 . ونعبر عن هذه النتيجة بالقول: غاية الدالة $f(x)=x^2-1$ في العدد 2 هي 3 . ويكتب ذلك رياضياً

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}(x^2-1)=3$$

مثال: جد غاية الدالة

$$f(x)=\frac{1}{1+\sqrt{x}}$$

عندما تقترب x من 1 .

الحل: نلاحظ أن $\sqrt{x}$ يقترب من 1 كلما أقتربت قيمة x من 1، وأن $1+\sqrt{x}$ يقترب من 2 كلما أقتربت قيمة x من 1، ولذلك نستنتج أن:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right)=\frac{1}{2}$$

حساب غاية الدالة

لحساب غاية الدالة $f(x)$ عندما $x\to \mathrm{a}$ نعوض في هذه الدالة عند $x=\mathrm{a}$ وقد نحصل عليها وقد لا نحصل عليها عندئذ نتبع طرائق أخرى للحل.

مثال: لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالة، بحيث أن لكل $x\in\mathbb{R}$

$$f(x)=x^3$$

أحسب غاية الدالة $f(x)$ عندما $x\to 2$.

الحل:

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\ x^3=2^2=8$$

وهذا يعني أن $f(x)$ تقترب من 8 عندما تقترب قيمة x من العدد 2 .

مثال: أذا كانت

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & , \quad x\neq 2 \\ 0 & , \quad x=2 \end{cases}$$

جد $\lim_{x\to 2} f(x)$.

الحل: نلاحظ أنه أذا كان $x\to 2$ هذا يعني أن $x\neq 2$ ، فأذاً

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2} x^2=4$$

الغايات من جهة واحدة One−Sided Limits

الغاية من اليمين (أو الغاية اليمنى) للدالة $f(x)$ هي غاية الدالة عندما x تقترب من العدد a من اليمين (أي بقيم أكبر) ونرمز لها بـــ $\lim_{x\to a^+} f(x)$ أو $\lim_{\substack{x\to a \\ >}} f(x)$.

الغاية من اليسار (أو الغاية اليسرى) للدالة $f(x)$ هي غاية الدالة عندما x تقترب من العدد a من اليسار (أي بقيم أصغر) ونرمز لها بـــ $\lim_{x\to a^-} f(x)$ أو $\lim_{\substack{x\to a \\ <}} f(x)$.

مبرهنة وحدانية الغاية

أذا كانت غاية الدالة $f: \mathrm{D}\to\mathbb{R}$ في العدد a موجودة فأنها تكون وحيدة، أي، أذا كانت

$$\lim_{x\to a} f(x)=\mathrm{L}_1 \quad , \qquad \lim_{x\to a} f(x)=\mathrm{L}_2$$

فأن $\mathrm{L}_1=\mathrm{L}_2$.

ملاحظة:

- من الواضح ان وجود العبارة $\lim_{x\to a} f(x)$ تستلزم وجود تساوي كل من غاية اليمين $\lim_{x\to a^+} f(x)$ وغاية اليسار $\lim_{x\to a^-} f(x)$. أي أن

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a} f(x)$$

- أن وجود غاية من اليمين لا يستلزم وجود غاية من اليسار والعكس صحيح أيضاً.

مثال: أذا كانت

$$f(x)=\begin{cases} 1 & , \quad x\geq 0 \\ 0 & , \quad x<0 \end{cases}$$

أحسب $\lim_{x\to 0} f(x)$.

الحل: أذا أقتربت قيمة x الى الصفر من جهة اليمين (أي بقيم أكبر) ، فأن:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=1$$

وأذا أقتربت قيمة x الى الصفر من جهة اليسار (أي بقيم أصغر) ، فأن:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$$

وبالتالي، فان $\lim_{x\to 0} f(x)$ ليست وحيدة. وعليه، فأن غاية الدالة غير موجودة عندما تقترب x من الصفر.

مثال: أفرض أن $f(x) = \sqrt{x}$. أدرس وجود الغاية عندما $x \to 0$.

الحل: منطلق هذه الدالة هو $[0,\infty)$. لنفرض أولاً أن x تقترب من 0 من اليمين (أي بقيم أكبر) فنجد أن $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$ موجودة. أما أذا جعلنا x تقترب من 0 من اليسار (أي بقيم أصغر) فنجد أن $\lim_{x\to 0^-} \sqrt{x}$ غير موجودة لأن الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ غير معرفة عندما تكون قيمة x أصغر من الصفر. وعليه فان $\lim_{x\to 0} \sqrt{x}$ غير موجودة.

مثال: جد $\lim_{x\to 3} f(x)$ اذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5 \ , & x \le 3 \\ \sqrt{x+13} \ , & x > 3 \end{cases}$$

الحل: عندما تقترب x الى العدد 3 من اليسار فأن الدالة $f(x)$ هي $f(x) = x^2 - 5$ ، وبالتالي فأن

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (x^2 - 5) = 3^2 - 5 = 4$$

وعندما تقترب x الى العدد 3 من اليمين فأن الدالة $f(x)$ هي $f(x) = \sqrt{x+13}$ ، فأن

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (\sqrt{x+13}) = \sqrt{3+13} = 4$$

بما أن الغايتين من اليمين ومن اليسار متساويتين، فأن الغاية موجودة وتساوي 4 . أي أن

$$\lim_{x\to -3} f(x) = 4$$

مثال: جد $\lim_{t\to 0} \mathrm{g(t)}$ اذا كانت

$$\mathrm{g(t)} = \begin{cases} \mathrm{t}^2 \ , & \mathrm{t} \ge 0 \\ \mathrm{t} - 2 \ , & \mathrm{t} < 0 \end{cases}$$

الحل: عندما تقترب t الى العدد 0 من اليسار فأن الدالة $\mathrm{g(t)}$ هي $\mathrm{g(t)} = \mathrm{t} - 2$ ، فأن

$$\lim_{t\to 0^-} \mathrm{g(t)} = \lim_{t\to 0^-} (\mathrm{t} - 2) = 0 - 2 = -2$$

وعندما تقترب t الى العدد 0 من اليمين فأن الدالة $\mathrm{g(t)}$ هي $\mathrm{g(t)} = \mathrm{t}^2$ ، فأن

$$\lim_{t\to 0^+} \mathrm{g(t)} = \lim_{t\to 0^+} (\mathrm{t}^2) = 0^2 = 0$$

بما أن الغاية من اليمين لا تساوي الغاية من اليسار، فليس للدالة غاية عند هذه النقطة.