مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ ، أذا كانت $y = x^2\, 3^x$

الحل: $\frac{dy}{dx} = x^2 \cdot (3^x \cdot \ln 3) + 3^x \cdot (2x) = x\, 3^x(x\, \ln 3 + 2)$

مثال: جد $\frac{dy}{dt}$ ، أذا كانت $y = 4^{t^4}$

الحل: $\frac{dy}{dt} = 4^{t^4} \cdot (4t^3) \cdot \ln 4$

مثال: جد $\frac{dy}{dt}$ ، أذا كانت $y = 4^t \cdot\ 2^{t^2}$

الحل: $y = 4^t \cdot\ 2^{t^2} = 2^{2t} \cdot\ 2^{t^2} = 2^{2t+t^2}$

$$\frac{dy}{dt} = 2^{2t+t^2} \cdot (2 + 2t) \cdot \ln 2$$

Example: Find the derivative of $y = 5^{-2x^3}$

مثال: أحسب التكامل الاتي: $\int 7^{2x+3}\, dx$

الحل: مشتقة الاس 2. أذاً بالضرب والقسمة على 2

$$\frac{1}{2}\int 2\,(7^{2x+3})\, dx = \frac{1}{2}\, \frac{7^{2x+3}}{\ln 7} + C = \frac{7^{2x+3}}{2\ln 7} + C = \frac{7^{2x+3}}{\ln 7^2} + C = \frac{7^{2x+3}}{\ln 49} + C$$

مثال: أحسب التكامل الاتي: $\int \frac{3}{2^{3x}}\, dx$

الحل: $\int \frac{3}{2^{3x}}\, dx = \int 3\ \cdot\ 2^{-3x} d = -\int(-3)\ \cdot\ 2^{-3x} dx$

$$= \frac{-1}{\ln 2}\ 2^{-3x} + C$$

مثال: جد قيمة التكامل الاتي: $\int_0^1 \frac{3^x+4^x}{5^x}\, dx$

الحل:

$$\int_0^1 \frac{3^x + 4^x}{5^x}\, dx = \int_0^1 \left(\frac{3^x}{5^x} + \frac{4^x}{5^x}\right) dx = \int_0^1 \left\{\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x\right\} dx$$

$$= \left\{\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^x}{\ln(3/5)} + \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^x}{\ln(4/5)}\right\}\Bigg|_0^1 \quad = \left\{\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{(1)}}{\ln(3/5)} + \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^{(1)}}{\ln(4/5)}\right\} - \left\{\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{(0)}}{\ln(3/5)} + \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^{(0)}}{\ln(4/5)}\right\}$$

$$= \left\{\frac{\frac{3}{5}}{\ln(3/5)} + \frac{\frac{4}{5}}{\ln(4/5)}\right\} - \left\{\frac{1}{\ln(3/5)} + \frac{1}{\ln(4/5)}\right\} = \frac{\frac{3}{5} - 1}{\ln(3/5)} + \frac{\frac{4}{5} - 1}{\ln(4/5)}$$

$$= \frac{-2/5}{\ln(3/5)} + \frac{-1/5}{\ln(4/5)}\ .$$

مثال: أحسب التكاملات الاتية: $\int_0^1 2^x dx \quad , \quad \int 5^{-3x} dx \quad , \quad \int x\, 6^{2x^2}\, dx$

الدالة الاسية الطبيعية $y = e^x$ Natural Exponential Function

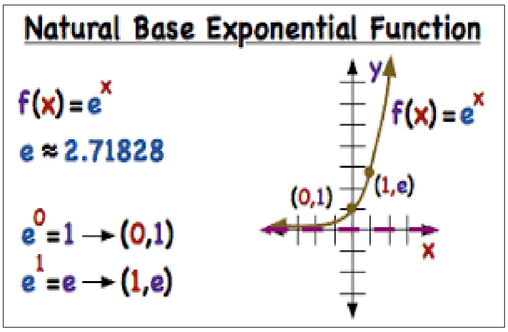
يعرف العدد e كالاتي:

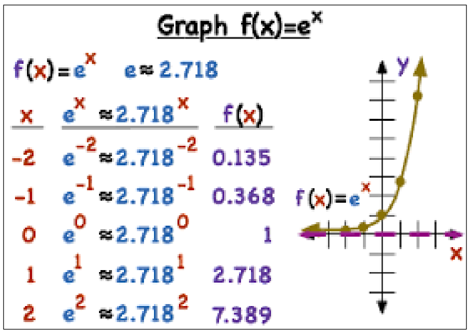
$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

فالعدد e هو أحد أهم الاعداد في الرياضيات وهو عدد غير نسبي ويمكن حساب قيمته مقربة الى أي عدد من المراتب العشرية وبأكثر من طريقة واحدة. وقيمة e التي حسبت هي

$$e = 2.718281828459045\,...$$

الدالة التي تأخذ الصيغة $y = e^x$ تسمى بالدالة الاسية الطبيعية لأن أساسها e ولها خصائص الدوال الاسية الأخرى.

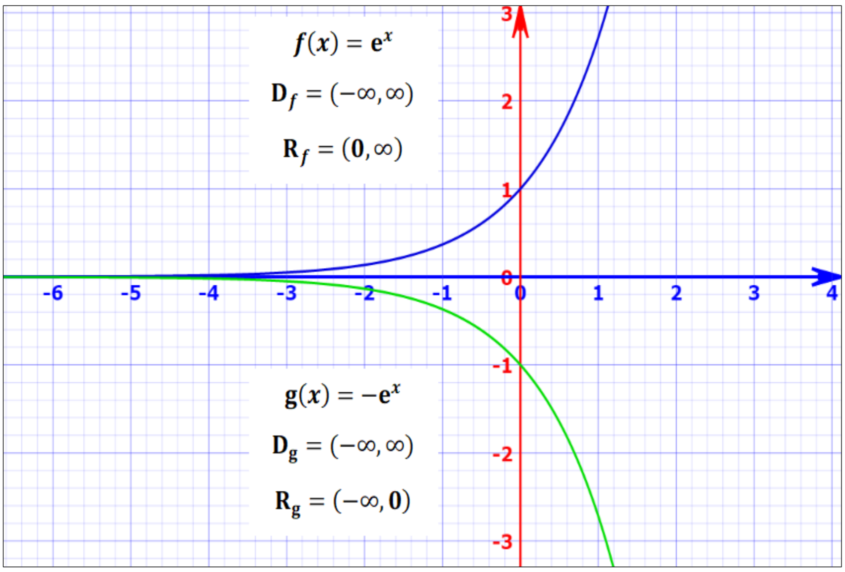




$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \quad , \quad \lim_{x\to\infty} e^x = \infty$$

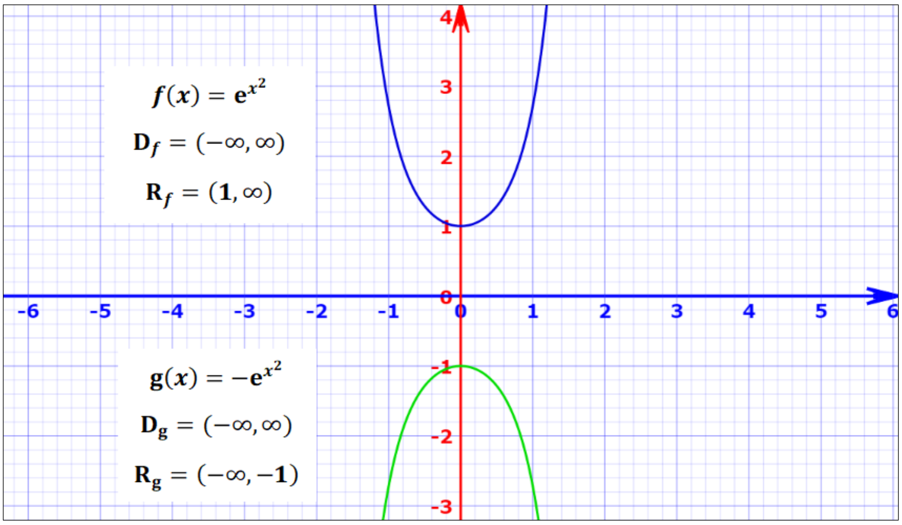
مثال: حدد المجال والمدى وأرسم المخطط للدوال:

$$f(x) = e^x \quad , \quad g(x) = -e^x$$



مثال: حدد المجال والمدى وأرسم المخطط للدوال:

$f(x) = e^{x^2} \quad , \quad g(x) = -e^{x^2}$



مشتقة الدالة الاسية الطبيعية

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \cdot \frac{du}{dx}$$

مثال: جد مشتقة الدالة $\quad y = e^{-x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x^2} \cdot (-2x) = -2xe^{-2x}$$

مثال: جد المشتقة لكل من: $\quad g(x) = e^{3x^2} \quad , \quad f(x) = e^{3t} \cdot e^{t^2}$

مثال: جد مشتقة الدالة $\quad y = e^{3x}\sin(2x)$

$$\frac{dy}{dx} = e^{3x} \cdot (2\cos(2x)) + \sin(2x) \cdot (3e^{3x})$$

$$= 2e^{3x}\cos(2x) + 3e^{3x}\sin(2x)$$

مثال: جد مشتقة الدالة $\quad y = -5\, e^{\sin x}$

$$\frac{dy}{dx} = -5\, e^{\sin x} \cdot (\cos x) = -5\cos x \cdot e^{\sin x}$$

Example: Find the derivative of the following functions

$y = 2e^{4x+1} \quad , \quad y = e^{\sin x} \quad , \quad y = e^{\tan x} \quad , \quad y = e^{\sqrt{x}} \quad , \quad y = e^{\sin(x^2)}$

تكامل الدالة الاسية الطبيعية

$$\int e^{u}\,du = e^{u} + C$$

مثال: جد قيمة التكامل $\int x\, e^{x^2}\, dx$

الحل: بالضرب والقسمة على 2 $\quad \frac{1}{2}\int 2x\, e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$

مثال: جد قيمة التكامل $\int \frac{dx}{e^{x}+1}$

الحل: نضرب البسط والمقام بـــ e^{-x} فنحصل على $\quad \int \frac{dx}{e^{x}+1} = \int \frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x}}$

والان نوفر مشتقة المقام (نضرب ونقسم على -1)

$$\int \frac{dx}{e^{x}+1} = -\int \frac{-e^{-x}dx}{1+e^{-x}} = -\ln(1+e^{-x}) + C$$

مثال: أحسب التكاملات الاتية:

$$\int (\cos x - 1) e^{\sin x - x}\, dx \ ,\ \int 2x e^{-x^2}\, dx \ ,\ \int 2\, e^{2x+\cos x}(2-\sin x)\, dx$$

$$\int_0^{\pi} e^{\sin x} \cos x\, dx \ ,\ \int (x-1)\, e^{x^2-2x+1}\, dx \ ,\ \int \frac{e^{x}}{\sqrt{e^{x}+1}} dx \ ,\ \int \frac{e^{x}}{1-e^{x}} dx$$

$$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx \ ,\ \int 3^{2x}\, e^{5-3^{2x}}\, dx \ ,\ \int 2^{1+\cot(5x)} \csc^2(5x)\, dx$$

الدالة اللوغاريتمية $\quad$ **Logarithmic Function** $\quad y = \log_a(x)$

يطلق على معكوس $f(x) = a^{x}$ دالة لوغاريتمية بالأساس a ، ويرمز لها بـــ $\log_a(x)$. هذا يعني أنه اذا كانت

$$f(x) = a^{x} \ ,\ a > 0\ , \quad a \neq 1$$

فأن

$$f^{-1}(x) = \log_a(x)$$

تعرف الدالة اللوغاريتمية العامة للأساس a كالاتي:

$$\log_a\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$$

$$x = a^{y} \Leftrightarrow \log_a(x)$$

لوغاريتم x للاساس a .

مجال دالة اللوغاريتم هو الاعداد الحقيقية الموجبة.

الخصائص الأساسية للوغاريتمات

$a>0$ و $a\neq 1$ و x,y أعداد موجبة، فان:

1) $\log_a(xy)=\log_a(x)+\log_a(y)$
2) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a(x)-\log_a(y)$
3) $\log_a(1)=0$
4) $\log_a\left(\frac{1}{x}\right)=-\log_a(x)$
5) $\log_a(a)=1$
6) $\log_a(x^r)=r\cdot\log_a(x)$ where $r\in\mathbb{R}$
7) $a^{\log_a(x)}=x$
8) $\log_a(b)=\frac{1}{\log_b(a)}$
9) $\log_a(a^x)=x$

مثال: أوجد قيمة كل لوغاريتم مما يأتي.

$\log_3(81)$, $\log_5(\sqrt{5})$, $\log_7\left(\frac{1}{49}\right)$, $\log_2(2)$

$\log_8(512)$, $\log_4(4^{3.2})$, $\log_2\left(\frac{1}{32}\right)$, $\log_{16}(\sqrt{2})$

الحل: لأيجاد $\log_3(81)$ نفرض أن

$\log_3(81)=y$

نكتب بصيغة اسية $3^y=81$

$3^y=3^4$

خاصية المساواة في الأسس $y=4$

ولهذا فأن $\log_3(81)=4$

لأيجاد $\log_5(\sqrt{5})$ نفرض أن

$\log_5(\sqrt{5})=y$

نكتب بصيغة اسية $5^y=\sqrt{5}$

$5^y=5^{\frac{1}{2}}$

خاصية المساواة في الأسس $y=\frac{1}{2}$

ولهذا فأن $\log_5(\sqrt{5})=\frac{1}{2}$

Logarithmic Form	Exponential Form
$\log_2 16 = 4$	$2^4 = 16$
$\log_5 25 = 2$	$5^2 = 25$
$\log_6 1 = 0$	$6^0 = 1$
$\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$	$3^{1/2} = \sqrt{3}$
$\log_7 \left(\frac{1}{49}\right) = -2$	$7^{-2} = \frac{1}{49}$

مشتقة الدالة اللوغاريتمية

أذا كانت $y = \log_a(u)$ حيث $a > 0 , a \neq 1$ و u دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة الى x فأن:

$$\boxed{y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{u'}{u} \cdot \frac{1}{\ln a}}$$

مثال: أذا كانت $y = \log_3(3x^2 - 5)$ جد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x}{3x^2-5} \cdot \frac{1}{\ln 3}$$

مثال: أذا كانت $y = \log_8(7x^2 + 4)$ جد $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{14x}{7x^2 + 4} \cdot \frac{1}{\ln 8}$$

مثال: أذا كانت $y = \log_3 \sqrt{x^2 + 1}$ جد $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{2}(x^2 + 1)^{\frac{-1}{2}}(2x)}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{1}{\ln 3} = \frac{x}{x^2 + 1} \cdot \frac{1}{\ln 3}$$

مثال: أذا كانت $y = \log_3\left(\tan\left(e^{x^2}\right)\right)$ جد $\frac{dy}{dx}$

مثال: أذا كانت $f(x) = a^x$ و $g(x) = \log_a x$ ، اوجد $(f \circ g)_{(x)}$ ، $(g \circ f)_{(x)}$

$$(f \circ g)_{(x)} = f(g(x)) = f(\log_a x) = a^{\log_a x} = x$$

$$(g \circ f)_{(x)} = g(f(x)) = g(a^x) = \log_a(a^x) = x \cdot \log_a(a) = x \cdot 1 = x$$

أذاً $g = f^{-1}$

دالة اللوغاريتم الاعتيادي The Common logarithm Function

أذا كان الأساس $a = 10$ ، فأن $\log_{10}(x)$ يسمى اللوغاريتم الاعتيادي (أو الشائع) وغالباً ما يكون مكتوباً بدون الأساس $\log(x)$. أن دالة اللوغاريتم الاعتيادي $y = \log(x)$ هي معكوس الدالة الاسية $y = 10^x$ ، ولذلك $y = \log(x)$ فقط في حالة $10^y = x$ لكل $x > 0$. تنطبق خصائص اللوغاريتمات أيضاً على اللوغاريتمات الاعتيادية.

$$\frac{d}{dx}\log_{10}(3x+1) = \frac{3}{(3x+1)}\cdot\frac{1}{\ln 10}$$

دالة اللوغاريتم الطبيعي The Natural logarithm Function

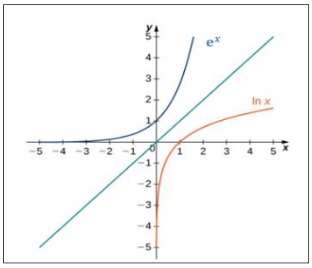
عندما يكون أساس اللوغاريتم e ، فأن اللوغاريتم $\log_e(x)$ يسمى اللوغاريتم الطبيعي، ويكتب $\ln x$. أي أن $\ln x = \log_e(x)$.

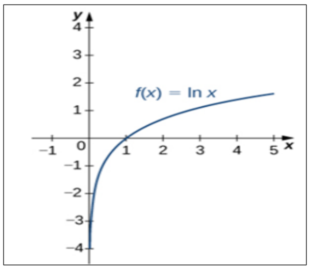
أن دالة اللوغاريتم الطبيعي $y = \ln x$ مستمرة ومتزايدة في الفترة المفتوحة $(0,\infty)$. وأن

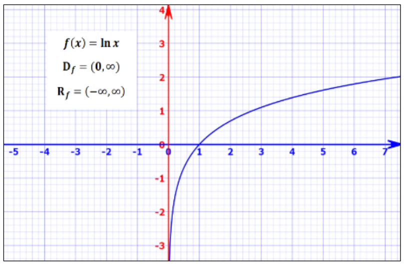
$$\lim_{x\to\infty}(\ln x) = \infty \quad , \quad \lim_{x\to 0}(\ln x) = -\infty$$

واستناداً الى التعريف فأن $y = \ln x$ دالة متقابلة منطلقها $\mathbb{R}^+$ ومداها $\mathbb{R}$.

$$\boxed{e^{\ln x} = x \text{ for } x > 0\,,\ \ln(e^x) = x \text{ for all } x\,,\ \ln(e) = 1\,,\ \ln(1) = 0}$$







مثال: عبر عن $\ln 4.5$ بدلالة $a_1 = \ln 2$ و $a_2 = \ln 3$.

$$\ln 4.5 = \ln\frac{9}{2} = \ln 9 - \ln 2 = \ln 3^2 - \ln 2 = 2\ln 3 - \ln 2 = 2a_2 - a_1$$

مشتقة اللوغاريتم الطبيعي $\ln x$

أذا كانت $y = \ln u$ و u دالة قابلة للأشتقاق بالنسبة الى x ، فأن:

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx}$$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = \frac{1}{\ln x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\ln x \cdot 0 - 1 \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{-1}{x(\ln x)^2}$$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = 7\ln(4x)$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 7 \cdot \left(\frac{1}{4x}\right) \cdot 4 = \frac{7}{x}$$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = \ln(\tan x)$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\tan x} \cdot \sec^2 x = \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \csc x \cdot \sec x$$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ اذا كانت $y = (\ln(3x+1))^{3/2}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}(\ln(3x+1))^{1/2}\left(\frac{1}{3x+1}\right)(3) = \frac{9}{2}\frac{\sqrt{\ln(3x+1)}}{3x+1}$$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = \ln(\sin x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{d}{dx}(\sin x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

Example: Find y' for the following functions

$y = \ln(5x^3 - 2)$, $y = (\ln(3x))^2$, $y = \ln(\cos x)$, $y = \ln\left(2 + \sqrt{x}\right)$

$y = e^{-x}\ln(x^2)$, $y = e^{-2x}\ln(x)\sin(2x)$, $y = x^x$, $y = 2^{\ln x}$

$y = \ln(2x) + \tan(3x)$, $y = \ln\sqrt[3]{7x-3}$, $y = \ln\left(e^{x^2}\right)$

$y = 4^x - 5\log_9 x$, $y = 3e^x \ln x$, $y = \frac{5e^x}{3e^x+1}$

$y = \ln\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\right)$, $y = \sin^4\left(\frac{1}{\ln x}\right)$, $y = \ln(e^{10})$, $y = \ln(1)$

مثال: احسب التكامل $\int \frac{x}{x^2+4}\,dx$

$$\int \frac{x}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + C$$