حساب التوزيع الاحتمالي P_n

إن قيمة $P_\circ$ يمكن استخراجها من خلال كون أو من خلال بديهية كون أن مجموع كل الاحتمالات يساوي الواحد الصحيح كما يلي:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\rho^n}{n!}P_\circ + \frac{\rho^n}{C!\,C^{n-C}}P_\circ\right] = 1$$

نقوم بسحب $P_\circ$ عامل مشترك. وندخل Σ على الحدين:

$$P_\circ\left[\sum_{n=0}^{C-1}\frac{\rho^n}{n!} + \sum_{n=C}^{\infty}\frac{\rho^n}{C!\,C^{n-C}}\right] = 1$$

$$\therefore P_\circ = \left[\sum_{n=0}^{C-1}\frac{\rho^n}{n!} + \sum_{n=C}^{\infty}\frac{\rho^n}{C!\,C^{n-C}}\right]^{-1} \quad Or \quad P_\circ = \frac{1}{\sum_{n=0}^{C-1}\frac{\rho^n}{n!} + \sum_{n=C}^{\infty}\frac{\rho^n}{C!\,C^{n-C}}}$$

مركز خدمة اُحادية $\rho < 1$

مركز خدمة متعددة $\frac{\rho}{C} < 1$

$$\sum_{n=C}^{\infty}\frac{\rho^n}{C!\,C^{n-C}}$$

$$Let\ n = j + C$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\rho^{j+C}}{C!\,C^j}$$

نسحب $\frac{\rho^C}{C!}$ لان $\sum_{j=0}$ يدخل فقط على j:

$$\frac{\rho^C}{C!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\rho^j}{C^j}$$

$$\frac{\rho^C}{C!}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{C}\right)^j \quad \to \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{C}\right)^j = \frac{1}{1-\frac{\rho}{C}}$$

$$\frac{\rho^C}{C!}\left(1-\frac{\rho}{C}\right) \xrightarrow{\text{توضيح المقدار داخل القوس}} 1-\frac{\rho}{C} = \frac{1}{\frac{C-\rho}{C}} = \frac{C}{C-\rho} = \frac{C}{C-\frac{\lambda}{M}} = \frac{C}{\frac{CM-\lambda}{M}} = \frac{CM}{CM-\lambda}$$

$$\frac{\rho^C}{C!} * \frac{CM}{CM-\lambda}$$

$$P_\circ = \left[\sum_{n=0}^{C-1}\frac{\rho^n}{n!} + \sum_{n=C}^{\infty}\frac{\rho^n}{C!\,C^{n-C}}\right]^{-1}$$

$$\therefore P_\circ = \left[\sum_{n=0}^{C-1}\frac{\rho^n}{n!} + \left(\frac{\rho^C}{C!} * \frac{CM}{CM-\lambda}\right)\right]^{-1}$$

مؤشرات نظام صف الانتظار $(M/M/C):(GD/\infty/\infty)$

1- عدد الوحدات المتوقعة في صف الانتظار (Lq):

$$Lq = E(n-C) = \sum_{n=c}^{\infty}(n-C)P_n$$

$$= \sum_{n=c}^{\infty}(n-C)\frac{\rho^n}{C!\,C^{n-C}}P_\circ$$

Let $n = j + C$

$$Lq = \sum_{j=0}^{\infty} j\frac{\rho^{j+C}}{C!\,C^j}P_\circ$$

$$= \frac{\rho^C}{C!}P_\circ \sum_{j=0}^{\infty} j\left(\frac{\rho}{C}\right)^j$$

$$= \frac{\rho^C}{C!}\,\frac{\rho}{C}P_\circ \sum_{j=1}^{\infty} j\left(\frac{\rho}{C}\right)^{j-1}$$

$$= \frac{\rho^C}{C!}\,\frac{\rho}{C}P_\circ * \frac{d}{d\left(\frac{\rho}{C}\right)}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{C}\right)^j \longleftarrow \text{متوالية هندسية غير منتهية}$$

$$= \frac{\rho^C}{C!}\,\frac{\rho}{C}P_\circ * \frac{d}{d\left(\frac{\rho}{C}\right)}\left[\frac{1}{1-\frac{\rho}{C}}\right] \xrightarrow{\text{توضيح المقدار}} \frac{d}{d\left(\frac{\rho}{C}\right)}\left(1-\frac{\rho}{C}\right)^{-1} = -1\left(1-\frac{\rho}{C}\right)^{-2}(-1)$$

$$= \left(1-\frac{\rho}{C}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(1-\frac{\rho}{C}\right)^2} = \frac{C^2}{(C-\rho)^2}$$

$$\frac{\rho^C}{\cancel{C}!}\,\frac{\rho}{\cancel{C}}P_\circ\frac{\cancel{C^2}}{(C-\rho)^2}$$

$$\therefore Lq = \frac{\rho^{C+1}}{(C-1)!\,(C-\rho)^2}P_\circ$$

2- عدد الوحدات المتوقعة في نظام الانتظار (Ls):

$$Ls = Lq + \rho$$

3- وقت الانتظار المتوقع في صف الانتظار (Wq):

$$Wq = \frac{Lq}{\lambda}$$

4- وقت الانتظار المتوقع في النظام (Ws):

$$Ws = Wq + \frac{1}{M} \quad or \quad Ws = \frac{Ls}{\lambda}$$