مثال(6): أوجد الحل الامثل لنموذج البرمجة الخطية الاتي:

$$\text{Max. } Z = -3X_1 - 2X_2$$

S.T.

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 &\geq 1 \\ X_1 + X_2 &\leq 7 \\ X_1 + 2X_2 &\geq 10 \\ X_2 &\leq 3 \\ X_1 , X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

نحول القيدين الاول والثالث الى اقل او يساوي بضرب طرفي كل منهما بـ (1-)

$$\text{Max. } Z = -3X_1 - 2X_2$$

S.T.

$$\begin{aligned} -X_1 - X_2 &\leq -1 \\ X_1 + X_2 &\leq 7 \\ -X_1 - 2X_2 &\leq -10 \\ X_2 &\leq 3 \\ X_1 , X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

نحول الصيغة العامة للنموذج الى الصيغة القياسية

$$\text{Max. } Z = -3X_1 - 2X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4$$

S.T.

$$\begin{aligned} -X_1 - X_2 + S_1 &= -1 \\ X_1 + X_2 + S_2 &= 7 \\ -X_1 - 2X_2 + S_3 &= -10 \\ X_2 + S_4 &= 3 \\ X_1 , X_2 , S_1, S_2, S_3, S_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

الحل الاساسي الاولي يكون

$Z=0$

$X_1 = 0 \ , \ X_2 = 0$

$S_1 = -1 , S_2 = 7 \ , \ S_3 = -10 \ , \ S_4 = 3$

وهذا الحل غير مقبول لان قيمة كل من S_1 و S_3 سالبة

نعمل الجدول المبسط الاول:

C_B	Basic variable (B.V) / C_j	-3 X_1	-2 X_2 ↓	0 S_1	0 S_2	0 S_3	0 S_4	b R.H.S
0	S_1	-1	-1	1	0	0	0	-1
0	S_2	1	1	0	1	0	0	7
0	← S_3	-1	(-2)	0	0	1	0	-10
0	S_4	0	1	0	0	0	1	3
$Z_j - C_j$		3	2	0	0	0	0	Z= 0

بملاحظة معاملات الصف $Z_j - C_j$ نجد انها تحقق شرط الامثلية لهذا الحل الاساسي الاولي ولكنه غير مقبول ، لذا نكون حل اساسي جديد، المتغير الخارج من بين المتغيرات الاساسية هو المتغير S_3 لان له اقل قيمة (-10) وصفه يمثل الصف المحوري، لتحديد المتغير الداخل من بين المتغيرين غير الاساسيين(X_1 , X_2) ، نحسب القيم المطلقة للنسب بقسمة قيم صف $Z_j - C_j$ على القيم المناظرة لها في الصف المحوري ثم أخذ القيمة المطلقة لناتج القسمة ($R_1 = 3$ ، $R_2 = 1$) اقل هذه النسب المطلقة هي R_2 لذا يعتبر المتغير X_2 هو المتغير الداخل وعموده يمثل العمود المحوري ، والعنصر المحوري هو (-2). نكون الجدول المبسط الثاني :

C_B	Basic variable (B.V) / C_j	-3 X_1 ↓	-2 X_2	0 S_1	0 S_2	0 S_3	0 S_4	b R.H.S
0	S_1	-1/2	0	1	0	-1/2	0	4
0	S_2	1/2	0	0	1	1/2	0	2
-2	X_2	1/2	1	0	0	-1/2	0	5
0	← S_4	(-1/2)	0	0	0	1/2	1	-2
$Z_j - C_j$		2	0	0	0	1	0	Z= -10

قيم صف $Z_j - C_j$ تشير الى ان الحل الاساسي الثاني هو حل امثل ولكنه غير مقبول لان قيمة المتغير S_4 سالبة ، وهو المتغير الوحيد ذو قيمة سالبة لذا يعتبر هو المتغير الخارج وصفه هو الصف المحوري، نحسب القيم المطلقة للنسب ($R_1 = 4$) وتهمل البقية لذا فأن X_1 هو المتغير الداخل وعموده هو العمود المحوري ، اما العنصر المحوري فهو (-1/2).

نكون جدول المبسط الثالث :

C_B	Basic variable (B.V) \ C_j	-3	-2	0	0	0	0	b R.H.S
		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	
0	S_1	0	0	1	0	-1	-1	6
0	S_2	0	0	0	1	1	1	0
-2	X_2	0	1	0	0	0	1	3
-3	X_1	1	0	0	0	-1	-2	4
$Z_j - C_j$		0	0	0	0	3	4	Z= -18

الحل الاساسي الاخير يمثل حل امثل :

$X_1 = 4$, $X_2 = 3$, Max. $Z = -18$

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

طريقة (M) الكبيرة

تستخدم هذه الطريقة عندما تكون القيود بصيغة المساواة أو بصيغة الأكبر أو يساوي $(\geq)$ وفي هذه الحالة يصعب تطبيق طريقة السمبلكس الإعتيادية حيث إذا أردنا تحويل الإنموذج إلى الصيغة القياسية فإن ذلك يتطلب طرح متغير وهمي (S) من القيد الذي من نوع $(\geq)$ كما أسلفنا سابقاً، وعند إيجاد الحل الأولي المقبول $(S \cdot B \cdot F)$ نبعد تعويض قيم (x_j) بالصفر فإننا نحصل على قيم سالبة للمتغير الوهمي (S) وهذا مخالف لشرط عدم السالبية الذي يجب توفره لحل إنموذج البرمجة الخطية، لذلك نقوم بإضافة متغيرات إصطناعية إلى القيود من نوع $(\geq)$ بعد طرح المتغير الوهمي منها وكذلك إضافة المتغيرات الإصطناعية إلى القيود من نوع $(=)$ ونرمز لهذه المتغيرات الإصطناعية بالرمز (R)

إن دخول المتغيرات الإصطناعية إلى دالة الهدف يكون مع معامل مقداره M بحيث M تمثل عدد كبير جداً لكـي نضفي عدم دخول المتغيرات الإصطناعية تدخل في دالة الهدف بإشارة سالبة إذا كانت دالة الهدف تعظيم وإشارة موجبة وإذا كانت دالة الهدف تقليل فـــ عليه يتم إستبعادها من دالة الهدف عندما تبدأ بالحل لأنها ذات معامل كبير جداً، ولهذا سُميت بطريقة (M) الكبيرة ولتوضيح ذلك ناخذ المثال الأتي:

مثال: أوجد حل إنموذج البرمجة الخطية الآتي بطريقة M الكبيرة:

$$min\, Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.to$$

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_2 \leq 4$$

$$x_1 + 3x_2 \geq 20$$

$$x_1 + x_2 = 10$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

الحل: نحول الإنموذج إلى الشكل القياسي وكما يلي:

$$min\, Z = 2x_1 + 3x_2 + 0s_1 + MR_1 + MR_2$$

$$s.to$$

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + s_1 = 4$$

$$x_1 + 3x_2 - s_2 + R_1 = 20$$

$$x_1 + x_2 \qquad + R_2 = 10$$

$$x_1 , x_2 , s_1 , s_2 , R_1 , R_2 \geq 10$$

الأن نضع المسألة في جدول السمبلكس وكما يأتي:

c_j		2	3	0	0	M	M	0
$B.V$		x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R_2	sol
0	s_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	0	0	0	4
M	R_1	1	**3**	0	-1	1	0	20
M	R_2	1	1	0	0	0	1	10
$Z-C_j$		$2M-2$	$4M-3$	0	$-M$	0	0	$30M$

القيم في صف $(Z-C_j)$ يمكن الحصول عله كما يأتي:

$$\left(\frac{1}{2}\right)(0)+(1)(M)+(1)(M)-2=2M-2$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)(0)+(3)(M)+(1)(M)-3=4M-3$$

$$(1)(0)+(0)(M)+(0)(M)-0=0$$

$$(0)(0)+(-1)(M)+(0)(M)-0=-M$$

$$(0)(0)+(1)(M)+(0)(M)-M=0$$

$$(0)(0)+(0)(M)+(1)(M)-M=2M-2$$

$$(4)(0)+(20)(M)+(10)(M)=30$$

بعد وضع المسألة في جدول السمبلكس نتبع نفس خطوات الحل التي تم ذكرها بطريقة السمبلكس الإعتيادية.

c_j		2	3	0	0	M	M	0
$B.V$		x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R_2	sol
0	s_1	$\frac{5}{12}$	0	1	$\frac{1}{12}$	$\frac{-1}{12}$	0	$\frac{7}{3}$
3	x_1	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{-1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{20}{3}$
M	R_2	$\mathbf{\frac{2}{3}}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{3}$	1	$\frac{10}{3}$
$Z-C_j$		$\frac{2M-3}{3}$	0	0	$\frac{M-3}{3}$	$\frac{3-4M}{3}$	0	$\frac{60+10M}{3}$
0	s_1	0	0	1	$\frac{-1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{-5}{8}$	$\frac{1}{4}$
3	x_1	0	1	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	5
2	x_2	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{3}{2}$	5
$Z-C_j$		0	0	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1-2M}{2}$	$\frac{3-2M}{2}$	25

بما أن $(Z - C_j)$ أصغر او تساوي الصفر والحالة (min) إذا الحل في الجدول الاخير هو الحل الأمثل

أي أن: $x_1 = 5 \;\; , \;\; x_2 = 5 \;\; , \;\; Z = 25$

إسلوب أم الكبيرة $(M - Technique)$

توضيح إسلوب أم الكبيرة بالرجوع إلى المثال الأتي:

$minise\ Z = 3x_1 + 8x_2 + x_3$

$S.T$

$6x_1 + 2x_2 + 6x_3 \geq 6$

$6x_1 + 4x_2 \qquad = 12$

$2x_1 - 2x_2 \qquad \leq 2$

$x_1 \,, x_2 \,, x_3 \geq 0$

لتحويل الشكل أعلاه إلى شكل قياسي نضيف متغيرات مكملة (s_1, s_2) إلى كل من القيود ذات الإشارة أكبر أو يساوي ثم إضافة متغيرات إصطناعية (R_1, R_2) إلى كل قيد له إشارة أكبر او يساوي أو إشارة مساواة كما مبين أدناه:

$6x_1 + 2x_2 + 6x_3 - s_1 + R_1 = 6$

$6x_1 + 4x_2 \qquad\qquad + R_2 = 12$

$2x_1 - 2x_2 \qquad + \; s_2 \qquad = 2$

ولكي لايؤثر ذلك على معادلة دالة الهدف نضيف (R_1, R_2) إلى دالة الهدف بعد ضرب كل منهما بكمية كبيرة (M) وكذلك سمي هذا الإسم بإسلوب أم. بعبارة اخرى:

$minise\ Z = 3x_1 + 8x_2 + x_3 + MR_1 + MR_2$

$S.t$

$6x_1 + 2x_2 + 6x_3 - s_1 + R_1 = 6$

$6x_1 + 4x_2 \qquad\qquad + R_2 = 12$

$2x_1 - 2x_2 \qquad + \; s_2 \qquad = 2$

$x_1 \,, x_2 \,, x_3 \,, s_1 \,, s_2 \,, R_1 \,, R_2 \geq 0$

من أجل أن تكون معاملات (R_1, R_2) تساوي صفراً في دالة الهدف نضيف إلى دالة الهدف:

R_1 معادلة $* \; M$

R_2 معادلة $* \; M$

نوضح ماجاءَ في الصفحة السابقة بعبارة أخرى لدالة الهدف:

$$Z - 3x_1 - 8x_2 - MR_1 - MR_2 = 0$$

وكذلك نضرب القيود أيضا بـــــــ (M)

$$6Mx_1 + 2Mx_2 + 6Mx_3 - Ms_1 + MR_1 = 6M \quad R_1 \text{ معادلة } * M$$

$$6Mx_1 + 4Mx_2 \qquad + MR_2 = 12M \quad R_2 \text{ معادلة } * M$$

$$(-3 + 12M)x_1 + (-8 + 6M)x_2 + (-1 + 6M)x_3 - MS_1 = 18M$$

لذلك فإن مشلكة البرمجة الخطية القياسية كما يلي:

$$minimise\ Z + (-3 + 12M)x_1 + (-8 + 6M)x_2 + (-1 + 6M)x_3 - MS_1 = 18M$$

وفقاً إلى القيود الأتية:

$6x_1 + 2x_2 + 6x_3 - s_1 + R_1 = 6$ القيد الأول

$6x_1 + 4x_2 \qquad + R_2 = 12$ القيد الثاني

$2x_1 - 2x_2 \qquad + s_2 \quad = 2$ القيد الثالث

نتبع خطوات طريقة السمبلكس نفسها للحصول على الحل الأمثل نضع البيانات في جدول مُبسط وكما مبين ذلك في الجدول المبسط (6)

المتغيرات الأساسية	$\downarrow x_1$	x_2	x_3	s_1	s_2	R_1	R_2	الثابت
$\leftarrow MR_1$	**6**	2	6	-1	0	1	0	6
MR_2	6	4	0	0	0	0	1	12
$0S_2$	2	-2	0	0	1	0	0	2
Z-Cj	$12M - 3$	$6M - 8$	$6M - 1$	$-M$	0	0	0	$18M$

تحديد المتغير الداخل: بما أن مشكلة البرمجة الخطية هي التصغير $(minimise)$ لذلك فإن أكبر معامل موجب في دالة الهدف هو (x_1) والذي يساوي $(12M - 3)$ المتغير الداخل (x_1).

تحديد المتغير الخارج: هو المتغير الواقع أزاء أقل نسبة من النسب الأتية:

$$\left[\frac{2}{2} \quad , \quad \frac{12}{2} \quad , \quad \frac{6}{6}\right], \left[\frac{b_1}{a_4} \quad , \quad \frac{b_2}{a_{21}} \quad , \quad \frac{b_3}{a_{31}}\right]$$

هناك نسبتان متساويتان هما الاولى والثالثة، لذلك نختار الاولى (الاختيار يكون كيفما اتفق, والأفضل اختيار المتغير الذي يحوي على معامل M)

$\therefore$ R_1 سيكون المتغير الخارج وسيحل محله المتغير (x_1) في الجدول المبسط (7).

العنصر المحوري: هو العنصر (6) بعد تطبيق خطوات الطريقة المسبطة فـــــينتج كم في الجدول الأتي:

الجدول المبسط (7)

المتغيرات الأساسية	x_1	$\downarrow x_2$	x_3	s_1	s_2	R_1	R_2	الثابت
x_1	1	$\frac{1}{3}$	1	$-1/6$	0	$\frac{1}{6}$	0	1
$\leftarrow MR_2$	0	**2**	-6	1	0	-1	1	6
$0S_2$	0	$-\frac{8}{3}$	-2	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{16}{3}$	0	0
Z-Cj	0	$2M-7$	$-6M+2$	$M-\frac{1}{2}$	0	$-2M+\frac{1}{2}$	0	$6M+3$

الحل في الجدول أعلاه غير أمثل لوجود قيم موجبة في دالة الهدف. نختار اكبر القيم الموجبة في دالة الهدف، حيث أكبر قيمة موجبة في دالة الهدف هو المقدار $(2M-7)$. لذلك فأن المتغير الداخل سيكون (x_2) لان $(2M-7)$ هو معامل (x_2) في دالة الهدف.

المتغير الخارج: هو أزاء أقل نسبة من النسب الأتية:

$$\left[\frac{1}{\frac{1}{3}} \quad , \quad \frac{6}{2}\right] \quad \frac{0}{-\frac{8}{3}}$$ يهمل لان المقام سالب

نختار (R_2) بأن تكون المتغير الخارج ويحل محله (x_2) $\quad\left[1*\frac{3}{1}, 6/2\right]$

$\longrightarrow [3,3]$

بتطبيق خطوات الطريقة المبسطة للحل نحصل على الجدول المبسط (8)

الجدول المبسط (8)

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	$\downarrow s_1$	s_2	R_1	R_2	الثابت
x_1	1	0	2	$-\frac{1}{3}$	0	0	$-1/6$	0
x_2	0	1	-3	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	3
$\leftarrow 0s_2$	0	0	-10	$\mathbf{\frac{8}{3}}$	1	4	$\frac{4}{3}$	8
Z-Cj	0	0	-19	3	0	$-M-3$	$-M+\frac{1}{2}$	24

إن (R_1, R_2) متغيران إصطناعيان يساعدان في إيجاد الحل وليس لهما أي دور بعد أن خرجا من ضمن المتغيرات الاساسية ولذلك نحذف عمودي (R_1, R_2) من أية إعتبارات اخرى.