b) $f(x) = x^6 - x - 1$ ضمن الفترة $[1,2]$ وبدقة $\epsilon = 0.02$

الحل:-

$x_1 = 1, \quad y_1 = -1$
$x_2 = 2, \quad y_2 = 61$

$y_1 * y_2 < 0$ يوجد جذر ضمن الفترة المعطاة

$$x_3 = x_2 - \frac{y_2(x_2 - x_1)}{y_2 - y_1} = 2 - \frac{61(2-1)}{61+1} = 1.016$$

$|x_3 - x_2| = 0.984 > \epsilon$

$y_3 = f(x_3) = -0.916, \quad y_1 * y_3 > 0 \Rightarrow [1.016,2]$

$$x_4 = x_3 - \frac{y_3(x_3 - x_2)}{y_3 - y_2} = 1.016 + \frac{0.916(1.016-2)}{-0.916-61} = 1.031$$

$|x_4 - x_3| = 0.015 > \epsilon$

$y_4 = f(x_4) = -0.83, \quad y_3 * y_4 > 0 \Rightarrow [1.031,2]$

$$x_5 = x_4 - \frac{y_4(x_4 - x_3)}{y_4 - y_3} = 1.031 + \frac{0.83(1.031-2)}{-0.83-61} = 1.044$$

$|x_5 - x_4| = 0.013 < \epsilon$

x_5 هو الجذر المطلوب

واجب:- باستخدام طريقة الموضع الكاذب جد قيمة تقريبية لجذر المعادلة التالية
$f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 1, [-1,0], \epsilon = 0.00005$

3-طريقة القاطع:- Secant method

ان هذه الطريقة متشابهة الى طريقة الموضع الكاذب غير ان تقارب هذه الطريقة غير مؤكد ولكنها اذا تقاربت فان تقاربها يكون سريعا.

الصيغة العامة لهذه الطريقة هي:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{y_i(x_i - x_{i-1})}{(y_i - y_{i-1})}, i = 2,3, \dots.$$

مع شرط التقارب $|x_{i+1} - x_i| < \epsilon$

مثال:- باستخدام طريقة القاطع جد قيمة تقريبية لجذر المعادلة التالية

$$f(x) = xlnx - 1, [1,2], \epsilon = 0.005$$

الحل:-

$x_1 = 1, \qquad y_1 = -1$
$x_2 = 2, \qquad y_2 = 0.3862$

$$x_3 = x_2 - \frac{y_2(x_2 - x_1)}{y_2 - y_1} = 2 - \frac{0.3862(2-1)}{0.3862 + 1} = 1.7213$$

$|x_3 - x_2| = 0.2787 > \epsilon$

$x_2 = 2, \qquad y_2 = 0.3862$
$x_3 = 1.7213, \qquad y_3 = -0.0651$

$$x_4 = x_3 - \frac{y_3(x_3 - x_2)}{y_3 - y_2} = 1.7213 + \frac{0.0651(1.7213 - 2)}{-0.0651 - 0.3862} = 1.7613$$

$|x_4 - x_3| = 0.04 > \epsilon$

$x_3 = 1.7213, \qquad y_3 = -0.0651$
$x_4 = 1.7613, \qquad y_4 = -0.003$

$$x_5 = x_4 - \frac{y_4(x_4 - x_3)}{y_4 - y_3} = 1.7613 + \frac{0.003(1.7613 - 1.7213)}{-0.003 + 0.0651} = 1.9275$$

$|x_5 - x_4| = 0.2062 > \epsilon$

$x_4 = 1.7613, \qquad y_4 = -0.003$
$x_5 = 1.9275, \qquad y_5 = 0.2648$

$$x_6 = x_5 - \frac{y_5(x_5 - x_4)}{y_5 - y_4} = 1.9275 - \frac{0.2648(1.9275 - 1.7213)}{0.2648 + 0.003} = 1.72359$$

$|x_6 - x_5| = 0.00377 < \epsilon,\quad x_6$ is the root

واجب:- باستخدام طريقة القاطع جد قيمة تقريبية لجذر المعادلة التالية

a) $f(x) = sinx - x^2 - x + 1, [1,2], \epsilon = 0.001$

b) $f(x) = xe^x - 1, [0,1], \epsilon = 0.05$

4-طريقة نيوتن - رافسون:- Newton-Raphson method

لتكن $f(x)$ دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق في $[a,b]$ ولتكن x_0 قيمة اولية للجذر فان قيمة الجذر الجديد هو $x_1 = x_0 + h$ حيث ان h قيمة التصحيح في قيمة x

$$\Rightarrow f(x_1) = f(x_0 + h)$$

وباستخدام صيغة تايلر عن النقطة x_0 فان

$$f(x_1) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_0) + \cdots$$

$$\Rightarrow\ f(x_1) = f(x_0) + (x_1 - x_0)f'(x_0) + \frac{(x_1 - x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \frac{(x_1 - x_0)^3}{3!}f'''(x_0) + \cdots$$

لتكن x_1 قريبة من الجذر بالنسبة الى x_0 فانه يمكن كتابة $f(x_1) \approx 0$ هذا يعني

$$f(x_0) + (x_1 - x_0)f'(x_0) + \frac{(x_1 - x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \frac{(x_1 - x_0)^3}{3!}f'''(x_0) = 0$$

عند بتر المتسلسلة بعد الثاني نحصل على

$$f(x_0) + (x_1 - x_0)f'(x_0) = 0$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_0)f'(x_0) = f(x_0)$$

$$\Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

وبصورة عامة فان

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}\ \ , i = 0,1, \dots$$

نتوقف عن التكرار عندما $|x_{i+1} - x_i| \le \epsilon$

4-طريقة نيوتن – رافسون المحسنة:- Improvement Newton-Raphson method

وباستخدام سلسلة تايلر ايضا مع بتر هذه السلسلة بعد الحد الثالث نحصل على

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} - \frac{f^2(x_0)f''(x_0)}{2f'^3(x_0)} \quad , i = 0,1, \ldots$$

مثال:- باستخدام طريقة نيوتن-رافسون جد قيمة تقريبية لجذر المعادلة التالية

$$f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1, [0,1], \epsilon = 0.0001$$

الحل :- اولا نشتق الدالة بحيث $f'(x) = 3x^2 - 2x + 2$ ومن ثم نوجد قيمة اولية من خلال تقسيم الفترة وذلك

$$x_0 = \frac{a+b}{2} = 0.5$$

$$f(x_0) = -0.125$$

$$f'(x_0) = 1.75$$

$$f''(x) = 6x - 2 \Rightarrow f''(x_0) = 1$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0.5 - \frac{-0.125}{1.75} = 0.57143$$

$$|x_1 - x_0| = |0.57143 - 0.5| = 0.0714 > \epsilon$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.57143 - \frac{0.00213}{1.84} = 0.56984$$

$$|x_2 - x_1| = |0.56984 - 0.57143| = 0.00158 > \epsilon$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0.56984 - \frac{-0.0000005}{1.83447} = 0.56984$$

$$|x_3 - x_2| =< \epsilon$$

x_3 هو الجذر المطلوب

مثال:- باستخدام طريقة نيوتن-رافسون جد قيمة تقريبية لجذر المعادلة التالية

$$f(x) = xe^x + x^2 - 5, [1,2], \epsilon = 0.003$$