مثال: لتكن $f(x) = |x-4|$. أحسب $\lim_{x\to 4} f(x)$ أذا كانت موجودة ؟.

الحل:

$$f(x) = |x-4| = \begin{cases} x-4 & , \quad x \ge 4 \\ -(x-4) & , \quad x < 4 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} (x-4) = 0$$
$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} \left(-(x-4)\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^-} f(x) = 0$$

أذاً الغاية لهذه الدالة موجودة عندما $x \to 4$ وأن $\lim_{x\to 4} f(x) = 0$.

مثال: لتكن

$$f(x) = \begin{cases} 2-x & , \quad x < 1 \\ x^2+1 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

أدرس غاية الدالة عندما $x \to 1$.

الحل:

الغاية من اليمين $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x^2+1) = 2$

الغاية من اليسار $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (2-x) = 1$

بما أن $\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$ ، أذاً $\lim_{x\to 1} f(x)$ غير موجودة.

مبرهنات في الغايات

1) أذا كانت الدالة $f(x)$ **متعددة حدود**، فأن

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

مثال: لتكن $f(x) = x^2 - 1$ ، فأن

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} (x^2-1) = f(3) = 3^2 - 1 = 9 - 1 = 8$$

2) **غاية مجموع دالتين :** لتكن $f(x)$ ، $g(x)$ دالتين في x فأن

$$\lim_{x\to a}\left(f(x) + g(x)\right) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

مثال: لتكن $g(x) = 3x^2 \quad , \quad f(x) = 6x^3$ ، فأن

$$\lim_{x\to -2}\left(f(x) + g(x)\right) = \lim_{x\to -2} f(x) + \lim_{x\to -2} g(x) = f(-2) + g(-2)$$
$$= -48 + 12 = -36$$

3) **غاية فرق دالتين :** لتكن $f(x)$ ، $g(x)$ دالتين في x فأن

$$\lim_{x\to a}\left(f(x) - g(x)\right) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$$

مثال: اذا كانت $g(x) = x^3 \quad , \quad f(x) = 2\,x^2$ ، فأن

$$\lim_{x\to 1}\big(f(x) - g(x)\big) = \lim_{x\to 1} f(x) - \lim_{x\to 1} g(x) = f(1) - g(1)$$
$$= 2 - 1 = 1$$

وعموماً اذا كانت $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ دوال في x فأن:

$$\lim_{x\to a}(f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_n(x)) = \lim_{x\to a} f_1(x) \pm \lim_{x\to a} f_2(x) \pm \cdots \pm \lim_{x\to a} f_n(x)$$

مثال: لتكن

$$f_4(x) = x^4\,, \qquad f_3(x) = -2x^3\,, f_2(x) = 3x^2\,, \qquad f_1(x) = x$$

$$\lim_{x\to 1}(f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x)) = \lim_{x\to 1}(x + 3x^2 - 2x^3 + x^4)$$
$$= 1 + 3(1)^2 - 2(1)^3 + (1)^4 = 3$$

4) غاية ضرب دالتين :

لتكن $f(x)$ ، $g(x)$ دالتين في x فأن

$$\lim_{x\to a}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

مثال: اذا كانت $g(x) = 5x^2 + 1 \quad , \quad f(x) = -2\,x^3 - 1$ ، فأن

$$\lim_{x\to -1}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim_{x\to -1} f(x) \cdot \lim_{x\to -1} g(x) = f(-1) \cdot g(-1)$$
$$= (-2\,(-1)^3 - 1\,) \cdot (\,5\,(-1)^2 + 1\,)$$
$$= (2 - 1) \cdot (5 + 1) = (1) \cdot (6) = 6$$

وعموماً اذا كانت $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ دوال في x فأن:

$$\lim_{x\to a}(f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_n(x)) = \lim_{x\to a} f_1(x) \cdot \lim_{x\to a} f_2(x) \cdot \dots \cdot \lim_{x\to a} f_n(x)$$

5) **غاية قسمة دالتين :** لتكن $f(x)$ ، $g(x)$ دالتين في x وأن $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ ، فأن

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

مثال: اذا كانت $g(x) = 5x^2 - 1 \quad , \quad f(x) = 2\,x + 5$ ، فأن

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to 0} f(x)}{\lim_{x\to 0} g(x)} = \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{2\,(0) + 5}{5\,(0)^2 - 1} = \frac{5}{-1} = -5$$

6) أذا كانت الدالة $f(x)$ دالة ثابتة، أي أن، $f(x) = c$ ، حيث أن c عدد حقيقي، فأن:

$$\lim_{x\to a} f(x) = c$$

مثال: لتكن $f(x) = 7$ ، فأن

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 7$$

7) أذا كانت $\lim_{x\to a} f(x) = L$ موجودة، فأن $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = L^n$ حيث أن n عدد صحيح، وأن $L \neq 0$ عندما يكون n عدداً صحيحاً سالباً.

مثال:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{4x^2+x}{2x}\right)^4 = \left(\frac{4\,(1)^2+1}{2\,(1)}\right)^4 = \left(\frac{5}{2}\right)^4 = \frac{3125}{16}$$

8) أذا كانت $\lim_{x\to a} f(x) = L$ موجودة، وكان n عدداً صحيحاً، فأن:

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

بشرط أن يكون المقدار $\sqrt[n]{L}$ عدداً حقيقياً.

9) أذا كانت $\lim_{x\to a} f(x) = L$ موجودة، وكان c عدداً حقيقياً، فأن:

$$\lim_{x\to a} c\, f(x) = c \lim_{x\to a} f(x)$$

مثال: لتكن $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$ ، $x \neq 1$. جد $\lim_{x\to 1} f(x)$ ان وجدت.

الحل:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x-1} = 1 & , \; x > 1 \\ \dfrac{-(x-1)}{x-1} = -1 & , \; x < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(1) = 1$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(-1) = -1$$

بما أن $\lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$ ، أذاً $\lim_{x\to 1} f(x)$ غير موجودة.

مثال: أذا كانت $\lim_{x\to 2} f(x) = 11$ ، حيث أن

$$f(x) = \begin{cases} bx^2+3 & , \quad x \leq 2 \\ c-2x & , \quad x > 2 \end{cases}$$

جد قيمة $c\,,b$.

الحل: بما أن $\lim_{x\to 2} f(x) = 11$ ، هذا يعني أن الغاية موجودة وان

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = 11$$

$$\mathbf{\lim_{x\to 2^-} f(x) = 11 \Rightarrow \lim_{x\to 2^-}(bx^2+3) = 11 \Rightarrow b(2)^2+3 = 11 \Rightarrow b = \frac{8}{4} = 2}$$

$$\mathbf{\lim_{x\to 2^+} f(x) = 11 \Rightarrow \lim_{x\to 2^+}(c-2x) = 11 \Rightarrow c-2(2) = 11 \Rightarrow c = 15}$$

الغايات اللانهائية Infinite limits

بالرغم من ان الرمزين ∞ , $-\infty$ لا يمثلان عددين حقيقيين، ومع ذلك فأنهما يستعملان بكثرة في الغايات. فيما يلي نذكر بعض الخواص:

$$\infty + \infty = \infty \quad , \quad \infty \cdot \infty = \infty$$
$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty \quad , \quad (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$$
$$\infty \cdot (-\infty) = -\infty \quad , \quad (-\infty) \cdot \infty = -\infty$$

وأذا كان c عدداً حقيقياً موجباً، فأن

$$c \cdot \infty = \infty \quad , \quad c \cdot (-\infty) = -\infty$$

وأذا كان c عدداً حقيقياً سالباً، فأن

$$c \cdot \infty = -\infty \quad , \quad c \cdot (-\infty) = \infty$$

ولكل عدد حقيقي c ، فأن

$$\infty + c = \infty \quad , \quad \infty - c = \infty$$
$$(-\infty) + c = -\infty \quad , \quad (-\infty) - c = -\infty$$

مثال: أحسب الغاية للدالة

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}\ , \qquad x \neq 1$$
$$\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$$

وبما أن ∞ لا يمثل عدد حقيقي، فأن الغاية غير موجودة.

مثال: أحسب الغاية للدالة

$$f(x) = \frac{-2}{x^2}\ , \qquad x \neq 0$$
$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$$

مثال: أحسب الغايتين $\lim_{x\to 1^-} \frac{2}{x-1}$, $\lim_{x\to 1^+} \frac{2}{x-1}$

الحل:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2}{x-1} = \infty$$
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2}{x-1} = -\infty$$

مبرهنة: ليكن n عدداً صحيحاً موجباً، فأن:

1) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} = \infty$

2) $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} \infty & \text{عندما } n \text{ زوجي} \\ -\infty & \text{عندما } n \text{ فردي} \end{cases}$

مثال: أحسب الغاية $\lim_{x\to -1} \frac{3x+1}{x^2+2x+1}$

الحل:

$$\lim_{x\to -1} (3x+1) = -2 < 0$$
$$\lim_{x\to -1} (x^2+2x+1) = 0$$

وبما أن لكل $x \in \mathbb{R}$ ، عدا -1 ،

$$x^2+2x+1 = (x+1)^2 > 0$$

ولذلك: $\lim_{x\to -1} \frac{3x+1}{x^2+2x+1} = -\infty$

مثال: أثبت أن

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x+1}{x-2} = \infty \qquad , \qquad \lim_{x\to 2^-} \frac{x+1}{x-2} = -\infty$$

مثال: أحسب الغايات

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x+2} + \frac{1}{(x-1)^2}\right) \quad , \quad \lim_{x\to 1} \frac{1}{(x+2)(x-1)^2}$$

$$\lim_{x\to -2} \left(\frac{5(x-3)}{(x+2)^4 \cdot \sqrt{x+3}}\right) \quad , \quad \lim_{x\to -2} \frac{1}{(x+2)^4}$$

الغايات في اللانهاية Limits at Infinity

هناك حالات نحتاج فيها لأيجاد غاية دالة ما عندما تزداد قيمة المتغير المستقل x زيادة مطلقة غير منتهية، أي، عندما $x \to \infty$ وفي هذه الحالة يجب أن تكون الدالة معرفة لكل القيم المتناهية في الكبر. كما أن هناك حالات أخرى نجد فيها غاية دالة ما عندما تتناقص قيمة x دون حد، أي، عندما تصبح قيمته متناهية في الصغر، بمعنى اخر، $x \to -\infty$.

لاحظ أن $x \to \infty$ أو $x \to -\infty$ يبين سلوكية المتغير x فقط ولا يعني مطلقاً أن قيمة x هي ∞ أو $-\infty$ ، لأن مجال x هو مجموعة أعداد حقيقية وأن ∞ و $-\infty$ غير حقيقيين.

مبرهنة: $f(x) = \frac{1}{x}$ ، $x \neq 0$ فأن

$$\lim_{x\to \infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

مبرهنة: ليكن $x \neq 0$ و n عدداً صحيحاً موجباً، فأن

$$\lim_{x\to \infty} \frac{1}{x^{\mathrm{n}}} = 0$$

مثال: $\lim_{x\to \infty} \frac{2}{x^2} = 0$ و $\lim_{x\to \infty} \frac{3}{x^5} = 0$

مبرهنة:

$$\lim_{x\to\infty} \left(a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + a_{n-2}\, x^{n-2} + \cdots a_1\, x + a_0\right) = \infty$$

مثال: $\lim_{x\to\infty} \left(4\, x^2 + 2\, x + 5\right) = \infty$

مثال: أحسب الغاية $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+6x-21}{x^2+1}$

الحل: بما أن درجة البسط أكبر من درجة المقام، فان الغاية ∞ ، أي، غير موجودة.

صيغ غير معينة Indeterminate Forms

هناك سبع صيغ (أو كميات) غير معينة في الرياضيات، وهذه الصيغ هي:

$$\frac{\infty}{\infty} \quad , \quad \infty - \infty \quad , \quad 0 \cdot \infty \quad , \quad \frac{0}{0} \quad , \quad 0^0 \quad , \quad \infty^0 \quad , \quad 1^\infty$$

أولاً: $\frac{0}{0}$

يمكن معالجة هذه الحالة بالتحليل وقسمة البسط على المقام وبالأختصار أو بالقيام بعملية طرح أو جمع أو باستعمال طرائق أخرى مثل قاعدة لوبيتال.

L'Hôpital's Rule:

If $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ or $\frac{\infty}{\infty}$, then $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

مثال: أحسب الغاية

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$$

الحل:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{0}{0}$$ صيغة غير معينة

يجب معالجة هذه الحالة

$$\frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)} = (x+3)\,, \qquad x \neq 3$$

أذاً

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3} (x+3) = 6$$

ويمكن استعمال قاعدة لوبيتال وذلك باشتقاق البسط والمقام وكالاتي:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{2x}{1} = \lim_{x\to 3} (2x) = 2(3) = 6$$

مثال: أحسب الغاية $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-x}{x}$

الحل: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-x}{x} = \frac{0}{0}$

يمكن معالجة الحالة بالتحليل والاختصار :

$$\frac{x\,(x-1)}{x} = (x-1)\,, \quad x \neq 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-x}{x} = \lim_{x\to 0}\ (x-1) = -1\ , \quad x \neq 0$$

ويمكن استعمال قاعدة لوبيتال:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x-1}{1} = \lim_{x\to 0}\ (2x-1) = 2(0)-1 = -1$$

مثال: أحسب كل مما يأتي:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\,x^4+4\,x^2}{x^4+3\,x^2}\ , \quad \lim_{x\to -3} \frac{x^2+x-6}{x^2-9}\ , \quad \lim_{x\to 3} \frac{2x^2-2x-12}{x-3}$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3+6x^2+12x+8}{x+2}\ , \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1}\ , \quad \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x^3-1}\ , \quad \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}$$

ثانياً: $\frac{\infty}{\infty}$

لمعالجة هذه الحالة، نقسم البسط والمقام على المتغير الذي يحمل أكبر أس. ويمكن أستعمال قاعدة لوبيتال لمعالجة المشكلة.

مثال: أحسب الغايات

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5+3}{x^2}\ , \quad \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{3x+5}{6x-8}}\ , \quad \lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{3x-4}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-2x+1}{3x^3+x^2+5}\ , \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+1}\ , \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x+5}{x^3}$$

الحل:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5+3}{x^2} = \frac{\infty}{\infty}$$

لمعالجة هذه الحالة نقسم البسط والمقام على x^5 :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5+3}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{3}{x^5}}{\frac{1}{x^3}} = \frac{1+0}{0} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{3x+5}{6x-8}} = \frac{\infty}{\infty}$$

بقسمة البسط والمقام على x :

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{3+\frac{5}{x}}{6-\frac{8}{x}}} = \sqrt[3]{\frac{3+0}{6-0}} = \sqrt[3]{\frac{3}{6}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

****

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{\infty}{\infty}$$

نقسم البسط والمقام على x^2 فيكون لدينا:

$$\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

ثالثاً: $0\cdot\infty$ و $\infty-\infty$:

لمعالجة هذه الحالة نستعمل طريقة التحليل الجبري ثم نقوم بالأختصار والقيام بعملية الضرب والقسمة في حالة وجودهما.

مثال: أحسب الغاية $\lim_{x\to 0} x\left(1+\frac{1}{x}\right)$

الحل: $\lim_{x\to 0} x\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0\cdot(1+\infty) = 0\cdot\infty$

$$x\left(1+\frac{1}{x}\right) = x\left(\frac{x+1}{x}\right) = x+1$$

$$\lim_{x\to 0}(x+1) = 1$$

مثال: أحسب الغاية $\lim_{x\to 0} x\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2-x}\right)$

الحل: $\lim_{x\to 0} x\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2-x}\right) = 0\cdot\infty$

لمعالجة هذه الحالة نجري الاتي:

$$x\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2-x}\right) = x\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x(x-1)}\right) = 3+\frac{2}{(x-1)}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(3+\frac{2}{(x-1)}\right) = 3+\frac{2}{0-1} = 3-2 = 1$$