Hyperbolic functions الدوال المثلثية الزائدية

تعتمد الدوال المثلثية الزائدية في تعريفها على الدوال الاسية الطبيعية

$$\sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \quad , \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \quad , \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

بقية الدوال الزائدية تعرف من الدالتين السابقتين وكالاتي:

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} \quad , \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}} \quad , \qquad \forall x \neq 0$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^{x} + e^{-x}} \quad , \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^{x} - e^{-x}} \quad , \qquad \forall x \neq 0$$

ملاحظات:

- الدوال $\sinh x$, $\tanh x$, $\coth x$, $\operatorname{csch} x$ دوال فردية
  أما $\cosh x$, $\operatorname{sech} x$ دوال زوجية.
- المتطابقة: $\cosh^{2} x - \sinh^{2} x = 1$.

المشتقة والتكامل

المشتقة	التكامل
$\frac{d}{dx}\sinh u = \cosh u \frac{du}{dx}$	$\int \sinh x \; dx = \cosh x + C$
$\frac{d}{dx}\cosh u = \sinh u \frac{du}{dx}$	$\int \cosh x \; dx = \sinh x + C$
$\frac{d}{dx}\tanh u = \operatorname{sech}^{2} u \frac{du}{dx}$	$\int \operatorname{sech}^{2} x \, dx = \tanh x + C$
$\frac{d}{dx}\coth u = -\operatorname{csch} u \frac{du}{dx}$	$\int \operatorname{sech} x \; \tanh x \; dx = -\operatorname{sech} x + C$
$\frac{d}{dx}\operatorname{sech} u = -\tanh u \operatorname{sech} u \frac{du}{dx}$	$\int \operatorname{csch}^{2} x \, dx = -\coth x + C$
$\frac{d}{dx}\operatorname{csch} u = -\coth u \operatorname{csch} u \frac{du}{dx}$	$\int \operatorname{csch} x \; \coth x \; dx = -\operatorname{csch} x + C$

مثال: جد المشتقة للدوال الاتية: $f(x) = 2x^5 \cosh x \quad , \quad \mathrm{h(t)} = \frac{\sinh \mathrm{t}}{\mathrm{t}+1}$

الحل: $f'(x) = 2x^5(\sinh x) + 10x^4 \cosh x$

$$\mathrm{h'(t)} = \frac{(\mathrm{t}+1)\cosh \mathrm{t} - \sinh \mathrm{t} \ \cdot 1}{(\mathrm{t}+1)^2} = \frac{(\mathrm{t}+1)\cosh \mathrm{t} - \sinh \mathrm{t}}{(\mathrm{t}+1)^2}$$

الواجب: جد المشتقة للدوال

$$\mathrm{y} = \tanh(x^2 + 3x) \quad , \quad \mathrm{y} = \frac{1}{(\sinh x)^2} \quad , \quad \mathrm{y} = (\cosh x)^2$$

$$\mathrm{y} = \tanh x + \cosh(\sin(\mathrm{e}^x)) \quad , \quad \mathrm{y} = \sinh(x^2) + \cosh\left(\sqrt{x^3}\right)$$

$$\mathrm{y} = \cosh^2 x + \sinh^2 x \quad , \quad \mathrm{y} = \cosh(\cos x) \quad , \quad \mathrm{y} = (\cosh x)^2$$

$$\mathrm{y} = \frac{\cosh(x^2)}{2\sinh x} \quad , \quad \mathrm{y} = 3\coth\left(\frac{2}{x+1}\right)$$

Example: Evaluate $\int x\cosh(x^2)\ \mathrm{d}x$

$$\int x\cosh(x^2)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 2x\cosh(x^2)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sinh(x^2) + \mathrm{C}$$

Example: Evaluate $\int \tanh x\, \mathrm{d}x$

$$\int \tanh x\, \mathrm{d}x = \int \frac{\sinh x}{\cosh x}\mathrm{d}x = \ln|\cosh x| + \mathrm{C}$$

Example: Evaluate $\int \frac{\sinh x}{4\cosh x+7}\mathrm{d}x$

$$\int \frac{\sinh x}{4\cosh x + 7}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{4\sinh x}{4\cosh x + 7}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln|4\cosh x + 7| + \mathrm{C}$$

مثال: أحسب التكاملات

$$\int \sinh^3 x\cosh x\ \mathrm{d}x \quad , \quad \int \mathrm{sech}^2(3x)\,\mathrm{d}x \quad , \quad \int \tanh(3x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int x\cosh(x^2)\ \mathrm{d}x \quad , \quad \int \frac{\cosh x}{2 + 3\sinh x}\mathrm{d}x \quad , \quad \int x^2\sinh(x^3)\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\sinh x}{1 + \cosh x}\mathrm{d}x \quad , \quad \int \sinh^2 x\,\mathrm{d}x \quad , \quad \int \cosh^2 x\,\mathrm{d}x$$

التكامل بالتجزئة (أو بالأجزاء)   Integration by Parts

هذه الطريقة مبنية على قاعدة مشتقة حاصل ضرب دالتين

$$d(u \cdot v) = u\,dv + v\,du$$

حيث u و v دالتان لــ x قابلتان للتفاضل. وبتكامل طرفي هذه المتساوية، نحصل على

$$u \cdot v = \int u \cdot dv + \int v \cdot du$$

ومنه نحصل على قانون التكامل بالتجزئة

$$\boxed{\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du}$$

وبهذا نكون قد انتقلنا من حساب التكامل $\int u \cdot dv$ الى حساب التكامل $\int v \cdot du$ الذي يكون عادة أقل صعوبة من الأول أذا أحسنا اختيار u و dv .

مثال: أحسب التكامل $\int x \cdot \sin x\, dx$

لاحظ أن هذا التكامل لا يمكن حسابه مباشرة لأنه لا ينطبق عليه أي من قوانين التكامل المباشرة، لذلك سنحسبه بطريقة التكامل بالتجزئة. نأخذ $u = x$, $dv = \sin x\, dx$. عندئذ

$$v = -\cos x \qquad , \qquad du = dx$$

$$\int x \cdot \sin x\, dx = -x \cos x - \int (-\cos x)\, dx = -x \cos x + \sin x + C$$

مثال: أحسب التكامل $\int_0^3 x \cdot \sqrt{x+1}\, dx$

الحل:

$$u = x \Longrightarrow du = dx$$

$$dv = \sqrt{x+1}\, dx = (x+1)^{\frac{1}{2}} dx \Longrightarrow v = \frac{(x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}$$

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

$$\int_0^3 x \cdot \sqrt{x+1}\, dx = \left[x.\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 - \frac{2}{3}\int_0^3 (x+1)^{\frac{3}{2}}\, dx$$

$$= \frac{2}{3}\left[x.(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 - \frac{2}{3}\left[\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}\right]_0^3 = \frac{2}{3}\left(3(3+1)^{\frac{3}{2}} - 0\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{(3+1)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{(1)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left(3(4)^{\frac{3}{2}}\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{(4)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{1}{\frac{5}{2}}\right) = \frac{6}{3}(4)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}\left((4)^{\frac{5}{2}} - 1\right) = \frac{48}{3} - \frac{4}{15}(31)$$

$$= \frac{48}{3} - \frac{124}{15} = \frac{240 - 124}{15} = \frac{116}{15}$$

مثال: أحسب التكامل $\int x \cdot e^x \, dx$

حاصل ضرب دالتين لا يمكن حساب التكامل مباشرة. نفرض $u = x \quad , \quad dv = e^x dx$. فأن

$v = e^x \qquad , \qquad du = dx$

$$\int x \cdot e^x \, dx = x \cdot e^x - \int e^x \, dx = x \cdot e^x - e^x + C$$

مثال: أحسب التكامل $\int \ln x \, dx$

Solution: $\int \ln x \, dx = \int \ln x \cdot 1 \, dx$

نفرض أن $u = \ln x \quad , \quad dv = dx$. فان: $du = \frac{1}{x} \, dx \qquad v = x$

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

مثال: جد $\int (x-2) \cdot \ln x \, dx$

الفرضية: $u = \ln x \quad , \quad dv = (x-2)dx$. فان $du = \frac{1}{x} dx \qquad , \qquad v = \frac{x^2}{2} - 2x$

$$\int (x-2) \cdot \ln x \, dx = (\ln x) \cdot \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right) - \int \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right) \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= (\ln x) \cdot \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right) - \frac{1}{2} \int x \, dx + 2 \int dx = (\ln x) \cdot \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right) - \frac{x^2}{4} + 2x + C$$

مثال: أحسب التكامل $\int \sin^{-1} x \, dx$

Solution: $\int \sin^{-1} x \, dx = \int \sin^{-1} x \cdot 1 \, dx$

الفرضية: $u = \sin^{-1} x \quad , \quad dv = dx$. فان $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad , \qquad v = x$

$$\int \sin^{-1} x \, dx = x \cdot \sin^{-1} x - \int \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \cdot \sin^{-1} x - \int x \cdot (1-x^2)^{-1/2} \, dx$$

$$= x \cdot \sin^{-1} x - \left(\frac{-1}{2}\right) \int (-2\,x) \cdot (1-x^2)^{-1/2} \, dx$$

$$= x \cdot \sin^{-1} x - \left(\frac{-1}{2}\right) \frac{(1-x^2)^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C = x \cdot \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + C$$

مثال: أوجد $\int x^2 \cdot \cos x \, dx$

نأخذ $u = x^2 \quad , \quad dv = \cos x \, dx$. عندئذ يكون $du = 2\,x \, dx \qquad , \qquad v = \sin x$

فان : $\int x^2 \cdot \cos x \, dx = x^2 \cdot \sin x - 2 \int x \cdot \sin x \, dx$

الصيغة الناتجة لا يمكن تكاملها مباشرة، لذا نكرر العملية على الصيغة الناتجة مرة أخرى وعلى النحو الاتي:

$u = x \quad , \quad dv = \sin x \, dx$. فأن: $du = dx \qquad , \qquad v = -\cos x$

$$x^2 \cdot \sin x - 2 \int x \cdot \sin x \, dx = x^2 \sin x - 2\left(-x \cos x - \int (-\cos x) \, dx\right)$$

$$= x^2 \sin x + 2\,x \cos x + 2 \int \cos x \, dx = x^2 \sin x + 2\,x \cos x - 2 \sin x + C$$

Example: Evaluate $\int x \cdot \sec^2 x \, dx$

الفرضية: $u = x\,,\ dv = \sec^2 x\, dx$

$du = dx \quad , \quad v = \tan x$

$$\therefore \int x \cdot \sec^2 x\, dx = x \tan x - \int \tan x\, dx = x \tan x - \ln|\sec x| + C$$

Example: Evaluate $\int x^n \cdot \ln x \, dx \ , \quad n \neq -1$

الفرضية: $u = \ln x\,,\ dv = x^n dx$

$du = \frac{dx}{x} \quad , \quad v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$$\therefore \int x^n \cdot \ln x\, dx = (\ln x)\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) - \int \frac{x^{n+1}}{n+1}\frac{dx}{x} = \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x\right) - \frac{1}{n+1}\int x^n\, dx$$

$$= \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\ln x - \frac{1}{(n+1)}\frac{x^{n+1}}{(n+1)} + C = \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C$$

Example: Evaluate $\int \tan^{-1} x\, dx$

Solution: $\int \tan^{-1} x\, dx = \int \tan^{-1} x \cdot 1\, dx$

الفرضية: $u = \tan^{-1} x \ ,\ dv = dx$

$du = \frac{1}{1+x^2} dx \quad , \quad v = x$

$$\therefore \int 1 \cdot \tan^{-1} x\, dx = x \tan^{-1} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$= x \tan^{-1} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2} dx = x \tan^{-1} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

EXAMPLE 6 Finding Area

Find the area of the region bounded by the curve $y = xe^{-x}$ and the x-axis from $x = 0$ to $x = 4$.

Solution The region is shaded in Figure 8.1. Its area is

$$\int_0^4 xe^{-x}\, dx.$$

Let $u = x$, $dv = e^{-x}\, dx$, $v = -e^{-x}$, and $du = dx$. Then,

$$\int_0^4 xe^{-x}\, dx = -xe^{-x}\Big]_0^4 - \int_0^4 (-e^{-x})\, dx$$

$$= [-4e^{-4} - (0)] + \int_0^4 e^{-x}\, dx$$

$$= -4e^{-4} - e^{-x}\Big]_0^4$$

$$= -4e^{-4} - e^{-4} - (-e^0) = 1 - 5e^{-4} \approx 0.91.$$

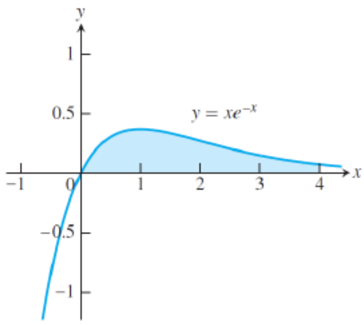

FIGURE 8.1 The region in Example 6.

الواجب أحسب التكاملات الاتية:

$$\int x^2 \ \ln x\, dx \ , \quad \int x^3 \ \sin(2x^2)\, dx \ , \quad \int x^5 \ e^{x^3}\, dx \ , \quad \int \sin^2 x\, dx \ , \quad \int x\, e^{1-3x}\, dx$$

$$\int \tan^3 x\, dx \ , \quad \int \sec^3 x\, dx \ , \quad \int \ln(5x+3)\, dx \ , \quad \int x\sqrt{x+4}\, dx$$

تستعمل هذه الطريقة لتكامل الدوال الكسرية (النسبية). تسمى الدالة $\mathrm{F}(x)=\frac{f(x)}{\mathrm{g}(x)}$ كسرية أذا كان كل من $f(x)$ و $\mathrm{g}(x)$ متعددة حدود.

الدوال الاتية دوال كسرية : $\frac{x-1}{x^2+1}$, $\frac{-2x+1}{x^2+1}$, $\frac{x(x+1)}{x^3+1}$, $\frac{1}{x(x^2+1)}$

بينما الدوال الاتية ليست كسرية: $\frac{\ln x}{x}$, $\frac{\sin x+\mathrm{e}^x}{x^2}$, $\frac{|x-2|}{x^3}$

تسمى الدالة $\frac{f(x)}{\mathrm{g}(x)}$ كسرية فعلية، أذا كانت درجة $f(x)$ أصغر من درجة $\mathrm{g}(x)$ والا فتسمى غير فعلية.
ويمكن التعبير عن كل دالة كسرية فعلية بمجموع كسور بسيطة (كسور جزئية) من الشكل $\frac{\mathrm{A}}{(x-\mathrm{r})^{\mathrm{k}}}$ أو $\frac{\mathrm{A}x+\mathrm{B}}{(\mathrm{a}x^2+\mathrm{b}x+\mathrm{c})^{\mathrm{k}}}$
حيث أن $(\mathrm{a}x^2+\mathrm{b}x+\mathrm{c})^{\mathrm{k}}$ غير قابل للاختزال، أي ليس له جذور حقيقية.

ملاحظة-1: أذا كان المقدار الموجود في البسط يمثل مشتقة المقام ففي هذه الحالة نجري عملية التكامل كما في الطرائق السابقة ولا نحتاج الى تجزئة الكسور كما موضح في الأمثلة الاتية:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(5-x)^2}=\int(5-x)^{-2}\,\mathrm{d}x=-\int-(5-x)^{-2}\,\mathrm{d}x=-\frac{(5-x)^{-1}}{-1}+\mathrm{C}$$
$$=\frac{1}{5-x}+\mathrm{C}$$

****

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x+2}=\ln|x+2|+\mathrm{C}$$

****

$$\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+1}=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\mathrm{C}$$

****

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\tan^{-1}x+\mathrm{C}$$

****

ملاحظة-2: إذا كانت الدالة الكسرية غير فعلية (أي أن درجة البسط أكبر او يساوي درجة المقام) نوجد أولًا ناتج القسمة باستخدام القسمة المطولة ثم نكتب الدالة على الصورة: $\mathrm{q}(x)+\frac{f(x)}{\mathrm{g}(x)}$ حيث أن $\mathrm{q}(x)$ هو الباقي. أي ان ناتج القسمة يكون عبارة عن مجموع متعددة حدود ودالة كسرية فعلية. فمثلاً

$$\frac{x^3-4x^2-x}{x^2-6x+5}$$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & x & +2 & & \\
\hline
x^2-6x+5 & x^3 & -4x^2 & -x & +0 \\
- & x^3 & -6x^2 & +5x & \\
\hline
 & & 2x^2 & -6x & +0 \\
 & - & 2x^2 & -12x & +10 \\
\hline
 & & & 6x & -10
\end{array}
$$

Therefore, $\dfrac{x^3-4x^2-x}{x^2-6x+5}=x+2+\dfrac{6x-10}{x^2-6x+5}$

كذلك الدالة $\frac{x^3-1}{x^2+1}$:

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & x & & & \\
\hline
x^2+1 & x^3 & +0x^2 & +0x & -1 \\
- & x^3 & +0x^2 & +x & \\
\hline
 & & & -x & -1
\end{array}
$$

Therefore, $\dfrac{x^3-1}{x^2+1}=x+\dfrac{-x-1}{x^2+1}$

سنوضح فيما يلي طريقة تجزئة الكسور بجميع حالاتها الثلاث.

أولاً: أذا تحلل المقام الى عوامل مختلفة وخطية (عوامل من الدرجة الاولى)

$$g(x)=(x\pm r_1)\cdot(x\pm r_2)\cdots\cdots(x\pm r_n)$$

حيث أن $r_1\neq r_2\neq\cdots\cdots\neq r_n$. فأن:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A_1}{x\pm r_1}+\frac{A_2}{x\pm r_2}+\cdots\cdots+\frac{A_n}{x\pm r_n}$$

حيث أن $A_1,A_2,\cdots\cdots,A_n$ ثوابت يجب تعيينها.

مثال: أحسب التكامل

$$\int\frac{20\,x+16}{x^2+3x+2}dx$$

الحل: لا يمكن حساب هذا التكامل مباشرة لان البسط لا يمثل مشتقة للمقام. ولاحظ ايضاً أن درجة البسط أصغر من درجة المقام (أي لا نحتاج الى القسمة المطولة). لذلك نقوم اولاً بتحليل المقام

$$\frac{20\,x+16}{(x+1)\cdot(x+2)}=\frac{A_1}{(x+1)}+\frac{A_2}{(x+2)}$$

بضرب الطرفين في $(x+1)\cdot(x+2)$ ينتج

$$20\,x+16=A_1\cdot(x+2)+A_2\cdot(x+1)$$

نعوض عن x بالقيم -1 و -2 .

عندما $x=-1$ ، فأن

$$20\,(-1) + 16 = \mathrm{A}_1 \cdot (-1+2) + \mathrm{A}_2 \cdot (-1+1)$$
$$-4 = \mathrm{A}_1$$

عندما $x = -2$ ، فأن

$$20\,(-2) + 16 = \mathrm{A} \cdot (-2+2) + \mathrm{B} \cdot (-2+1)$$
$$-24 = -\mathrm{A}_2 \Longrightarrow 24 = \mathrm{A}_2$$

وبالتعويض عن A_1 و A_2 بقيمتيهما، نحصل على

$$\frac{20\,x + 16}{(x+1)\cdot(x+2)} = \frac{-4}{(x+1)} + \frac{24}{(x+2)}$$

أذاً

$$\int \frac{20\,x+16}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{-4}{(x+1)} + \frac{24}{(x+2)}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \int \frac{-4}{(x+1)}\,\mathrm{d}x + \int \frac{24}{(x+2)}\,\mathrm{d}x = -4\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)} + 24\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)}$$

$$= -4\ln|x+1| + 24\ln|x+2| + \mathrm{C}$$

مثال: أوجد: $\int \frac{2x^3-9x^2+25}{x^2-6x+8}\,\mathrm{d}x$

الحل: درجة البسط 3 ودرجة المقام 2. أذاً يجب استخدام القسمة المطولة.

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x+3 \longleftarrow \text{ناتج القسمة} \\
x^2 - 6x + 8 & 2x^3 - 9x^2 + \quad 25 \\
- & 2x^3 - 12x^2 + 16x \\
\hline
 & \quad 3x^2 - 16x + 25 \\
 & - \; 3x^2 - 18x + 24 \\
\hline
 & \qquad 2x + 1
\end{array}$$

أي أن:

$$\frac{2x^3-9x^2+25}{x^2-6x+8} = (2x+3) + \frac{2x+1}{x^2-6x+8}$$

نأخذ الحدود النسبية:

$$\frac{2x+1}{x^2-6x+8} = \frac{2x+1}{(x-2)(x-4)}$$

ونكتبها على الصورة:

$$\frac{2x+1}{(x-2)(x-4)} = \frac{\mathrm{A}_1}{(x-2)} + \frac{\mathrm{A}_2}{(x-4)}$$

نضرب طرفي المعادلة في $(x-2)\cdot(x-4)$ فنحصل على:

$$2x+1 = \mathrm{A}_1(x-4) + \mathrm{A}_2(x-2)$$

بالتعويض عن $x = 2$ ، نحصل على: $\mathrm{A}_1 = \frac{-5}{2}$. بالتعويض عن $x = 4$ ، نحصل على: $\mathrm{A}_2 = \frac{9}{2}$.

$$\int \frac{2x^3-9x^2+25}{x^2-6x+8}\,\mathrm{d}x = \int (2x+3)\,\mathrm{d}x + \int \left(\frac{\mathrm{A}_1}{(x-2)} + \frac{\mathrm{A}_2}{(x-4)}\right)\mathrm{d}x$$